

# Inhalt

|   |  |           |
|---|--|-----------|
| ■ | <b>Einleitung</b>  | <b>13</b> |
| ■ | <b>1 Es geht ums Geld</b>  | <b>17</b> |
|   | 1.1 Zeit und Geld  | 17        |
|   | 1.2 Inflation und Deflation  | 18        |
|   | 1.3 Barwert und Endwert  | 21        |
|   | 1.3.1 Nominalwert und Äquivalenzprinzip                                  | 22        |
| ■ | <b>Teil I: Einzelne Zahlungen</b>  | <b>25</b> |
| ■ | <b>2 Zinsrechnung über ganze Jahre</b>                                   | <b>25</b> |
|   | 2.1 Definition wichtiger Begriffe  | 25        |
|   | 2.2 Zinsberechnung über eine Periode/ein Jahr                            | 26        |
|   | 2.2.1 Vom Endwert zum Barwert  | 27        |
|   | 2.3 Einfache Verzinsung über mehrere Perioden/mehrere Jahre              | 28        |
|   | 2.3.1 Zinsanteil und Kapitalendwert                                      | 29        |
|   | 2.3.2 Vom Endwert zum Barwert  | 30        |
|   | 2.3.3 Unterschiedliche Zinssätze   | 31        |
|   | 2.3.3.1 Vom Endwert zum Barwert bei unterschiedlichen Zinssätzen         | 31        |
|   | 2.4 Zinseszinsrechnung über mehrere Perioden/Jahre                       | 32        |
|   | 2.4.1 Kapitalendwertberechnung mit Zinseszinsen                          | 34        |
|   | 2.4.2 Der Barwert in der Zinseszinsrechnung                              | 36        |
|   | 2.4.3 Zinseszinsrechnung mit unterschiedlichen Periodenzinssätzen        | 36        |
|   | 2.5 Durchschnittliche Verzinsung   | 38        |
|   | 2.5.1 Durchschnittliche Verzinsung bei einfacher Verzinsung              | 38        |
|   | 2.5.2 Durchschnittszins bei exponentieller Verzinsung                    | 39        |
|   | 2.5.2.1 Die Ungleichheit von geometrischem und arithmetischem Mittel     | 40        |
|   | 2.6 Anwendungsbeispiele für die lineare und die exponentielle Verzinsung | 40        |
|   | 2.7 Formelübersicht zu den Kapitel 2                                     | 41        |
| ■ | <b>3 Unterjährliche Zinsrechnung</b>                                     | <b>43</b> |
|   | 3.1 Zum Unterschied zwischen Nominal- und Effektivzinssatz               | 44        |
|   | 3.2 Unterjährlich lineare Verzinsung                                     | 44        |
|   | 3.2.1 Der linear proportionale Zinssatz                                  | 45        |
|   | 3.2.1.1 Konformer Zinssatz   | 46        |
|   | 3.3 Konformer Zinssatz bei unterjährlicher Zinseszinsrechnung            | 46        |

- 3.3.1 Linear proportionaler Zinssatz nicht mehr konform 47
- 3.3.2 Der exponentiell proportionale Zinssatz 48
- 3.3.3 Effektivzinssatz bei unterjährlicher Verzinsung – Effektivzins zum Ersten 49
- 3.3.4 Zinsberechnungsmethoden 51
  - 3.3.4.1 Deutsche kaufmännische Methode (30/360) 52
  - 3.3.4.2 Französische Methode (act/360) 53
  - 3.3.4.3 Effektivzinsmethode (act/act) 54
  - 3.3.4.4 Anwendungsbeispiel Lieferantenkredit 55
- 3.3.5 Stetige Verzinsung 56
  - 3.3.5.1 Grenzwert der stetigen Verzinsung 56
  - 3.3.5.2 Anwendungen der stetigen Verzinsung 57
- 3.4 Unterjährliche Zinseszinsrechnung über mehrere Jahre 59
  - 3.4.1 Verwendung des linear proportionalen Zinssatzes 59
    - 3.4.1.1 Extremfall stetige Verzinsung 60
  - 3.4.2 Verwendung des exponentiell proportionalen Zinssatzes 60
    - 3.4.2.1 Gebrochene Exponenten in der Zinseszinsrechnung 61
- 3.5 Gemischte Verzinsung 62
  - 3.5.1 Berechnung des Kontostandes bei unterjährlichen Ein- und Auszahlungen 63
  - 3.5.2 Barwert bei gemischter Verzinsung 65
  - 3.5.3 Die Ungerechtigkeit der gemischten Verzinsung 66
- 3.6 Formelübersicht zu den Kapiteln 2 und 3 67

## Teil II: Mehrere Zahlungen

71

### 4 Zahlungsströme

71

- 4.1 Einleitung 71
- 4.2 Finanzmathematische Bewertung von Zahlungsströmen 71
  - 4.2.1 Endwertberechnung 73
- 4.3 Der Kalkulationszinssatz 74
  - 4.3.1 Kriterien für den Kalkulationszinssatz 75
- 4.4 Zahlungsströme mit unterjährlichen Zahlungen 76
  - 4.4.1 Unterjährliche Zinseszinsen 77
  - 4.4.2 Unterjährlich lineare Verzinsung 78
  - 4.4.3 Vergleich der beiden unterjährlichen Varianten 79
- 4.5 Formelübersicht 80

### 5 Rentenrechnung

83

- 5.1 Zahlungsempfang oder Zahlungsleistung – kommt es darauf an? 83
- 5.2 Rentenwert bei konstanter Rate und konstantem Zinssatz 84

- 5.2.1 Nachschüssige Zahlungsweise 85
  - 5.2.1.1 Anwendung der geometrischen Reihe 86
- 5.2.2 Vorschüssige Zahlungsweise 87
- 5.2.3 Unterjährliche Rentenzahlungen 89
  - 5.2.3.1 Unterjährliche Zinseszinsrechnung 89
  - 5.2.3.2 Gemischte Verzinsung 90
- 5.3 Rentenwert bei unterschiedlichen Raten und Zinssätzen 91
  - 5.3.1 Unterschiedliche Zinssätze - Teilrenten 91
  - 5.3.2 Unterschiedliche Raten - Dynamische Renten 93
    - 5.3.2.1 Arithmetische Änderung der Rate 94
    - 5.3.2.2 Geometrische Änderung der Rate 95
- 5.4 Formelübersicht 98

## 6 Kapitalaufbau und Kapitalverbrauch

101

- 6.1 Kapitalaufbau 101
- 6.2 Nachschüssiger Kapitalverbrauch 103
  - 6.2.1 Berechnung der möglichen Entnahmerate 105
    - 6.2.1.1 Berechnung des benötigten Anfangskapitals 105
    - 6.2.1.2 Berechnung der möglichen Entnahmedauer 106
  - 6.2.2 Entnahme ohne Verbrauch - Ewige Rente 106
  - 6.2.3 Kapitalaufbau trotz Entnahme 107
  - 6.2.4 Unterjährliche Raten 108
- 6.3 Vorschüssiger Kapitalverbrauch 109
- 6.4 Kapitalverbrauch mit geometrischer Rate 110
  - 6.4.1 Bar- und Endwertberechnung 110
  - 6.4.2 Berechnung der möglichen Entnahmedauer 111
- 6.5 Kombination von Kapitalaufbau und -verbrauch 112
  - 6.5.1 Jährliche Raten 113
  - 6.5.2 Unterjährliche Entnahme 114
  - 6.5.3 Unterbrechung zwischen Aufbau und Verbrauch 115
  - 6.5.4 Unterbrechungen innerhalb der Anspar- oder Verbrauchsphase 116
  - 6.5.5 Anfangs- und Endkapital ungleich null 117
- 6.6 Formelübersicht 118

## 7 Tilgungsrechnung

121

- 7.1 Begriffe 121
- 7.2 Endfällige Darlehen 123
  - 7.2.1 Jährlich geleistete Zinszahlungen 123
  - 7.2.2 Zinszahlung am Ende der Laufzeit 123
- 7.3 Tilgung in jährlichen Raten 124
  - 7.3.1 Ratentilgung 124

- 7.3.2 Annuitätentilgung 126
- 7.3.3 Vergleich von Raten- und Annuitätentilgung 127
  - 7.3.3.1 Ein anderer Weg zur gleichen Erkenntnis 129
- 7.3.4 Bestimmung der Laufzeit bei Raten- und Annuitätentilgung 130
- 7.4 Tilgung in unterjährlichen Raten 131
  - 7.4.1 Unterjährlich lineare Verzinsung 131
  - 7.4.2 Unterjährlich exponentielle Verzinsung 133
- 7.5 Effektivzinssatz von Krediten – Effektivzins zum Zweiten 136
  - 7.5.1 Zwei Ideen zur Effektivzinsbestimmung 136
  - 7.5.2 Tilgungspläne zur Effektivzinsbestimmung 137
  - 7.5.3 Vorgehensweise zur richtigen Effektivzinsermittlung 139
  - 7.5.4 Vergleich mit dem Effektivzins der unterjährlichen Zinseszinsrechnung 141
- 7.6 Formelübersicht 142

## 8 Wertpapiere – Kauf und Verkauf von Zahlungsansprüchen 145

- 8.1 Allgemeines zu Kurs und Rendite 145
  - 8.1.1 Der Kurs als Werteverhältnis 145
  - 8.1.2 Die Rendite als Zinssatz 146
- 8.2 Wertpapiere und Anleihen – Begriffe 148
- 8.3 Zahlungsstrom einer festverzinslichen Anleihe 148
  - 8.3.1 Kurs einer Anleihe bei ganzjähriger Restlaufzeit 149
    - 8.3.1.1 Warum nicht lineare Diskontierung? 151
  - 8.3.2 Rendite einer festverzinslichen Anleihe 152
    - 8.3.2.1 Rendite mit Nominalwerten 152
    - 8.3.2.2 Rendite allgemein 153
    - 8.3.2.3 Negative Rendite = Verlust 154
  - 8.3.3 Rendite bei vorzeitigem Verkauf 155
    - 8.3.3.1 Erster Fall, Zinssatz gefallen 156
    - 8.3.3.2 Zweiter Fall, Zinssatz gestiegen 157
    - 8.3.3.3 Die Perspektive des Käufers 157
- 8.4 Kursberechnung bei beliebiger Restlaufzeit 157
  - 8.4.1 Stückzins- und Kursberechnung 158
- 8.5 Formelübersicht 159

## Teil III: Investitionsrechnung 161

### 9 Einzelne Investitionsprojekte 161

- 9.1 Voraussetzungen und Begriffe 162
  - 9.1.1 Investition und Normalinvestition 162

|         |  |     |
|---------|--|-----|
| 9.1.2   | Umgang mit Unsicherheit - Modellcharakter der Investitionsrechnung | 163 |
| 9.1.3   | Planungszeitraum, Abschreibungen und Steuern                       | 163 |
| 9.1.4   | Finanzierungsarten   | 164 |
| 9.1.5   | Zahlungen während des Investitionsprozesses                        | 164 |
| 9.2     | Ein kurzer Blick auf statische Verfahren                           | 165 |
| 9.2.1   | Gewinnrechnung   | 165 |
| 9.3     | Dynamische Verfahren   | 166 |
| 9.3.1   | Die Wahl des Kalkulationszinssatzes                                | 167 |
| 9.3.2   | Beispiel für die Investitionsrechnung                              | 167 |
| 9.4     | Kapitalwertmethode   | 169 |
| 9.4.1   | Interpretation des Ergebnisses                                     | 169 |
| 9.4.1.1 | Der Endwert ist die anschaulichere Größe                           | 170 |
| 9.4.1.2 | Zurück zum Barwert   | 171 |
| 9.4.2   | Deutung eines negativen Barwertes                                  | 172 |
| 9.4.3   | Fazit Kapitalwertmethode   | 173 |
| 9.4.4   | Exkurs - Kreditvergabe als Investition                             | 173 |
| 9.5     | Amortisationsdauer   | 174 |
| 9.5.1   | Die Amortisationsdauer als Beurteilungskriterium                   | 175 |
| 9.6     | Der innere Zins - Effektivzins zum Dritten                         | 175 |
| 9.6.1   | Grafische Darstellung des inneren Zinssatzes                       | 176 |
| 9.6.2   | Einfache Fälle   | 176 |
| 9.7     | Vermögensendwertmethode  | 177 |
| 9.7.1   | Kontenausgleichsverbot   | 178 |
| 9.7.2   | Kontenausgleichsgebot  | 179 |
| 9.8     | Methodenvergleich  | 180 |
| 9.9     | Steuerliche Effekte  | 180 |
| 9.9.1   | Veränderung des Kalkulationszinssatzes                             | 180 |
| 9.9.2   | Anwendung auf das Einführungsbeispiel                              | 181 |
| 9.9.2.1 | Erörterung des Ergebnisses   | 182 |
| 9.10    | Nicht-Normalinvestitionen  | 183 |
| 9.11    | Formelübersicht  | 185 |

## 10 Vergleich von Investitionsprojekten

189

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 10.1     | Beispiel für die Vergleichsrechnung                  | 189 |
| 10.2     | Vergleich der Kapitalwerte - Vorteil Investition 1   | 190 |
| 10.2.1   | Voraussetzungen für die Vergleichbarkeit             | 190 |
| 10.2.1.1 | Unterschiedliche Anfangsauszahlung                   | 191 |
| 10.2.1.2 | Differenzinvestition                                 | 191 |
| 10.2.1.3 | Unterschiedliche Nutzungsdauer                       | 192 |
| 10.3     | Einspruch - beim inneren Zins gewinnt Investition 2! | 193 |
| 10.3.1   | Bestimmung des Schnittpunktes der Barwertkurven      | 194 |

- 10.4 Und was sagt die Amortisationsdauer? 194
- 10.5 Fazit 195
- 10.6 Ausschlussverfahren ohne Rechnung 195
- 10.7 Formelübersicht 197

## 11 Weg mit der Kristallkugel – Unsicherheiten bei Investitions- entscheidungen

199

- 11.1 Unsichere Größen im Investitionsprozess 200
  - 11.1.1 Anwendung auf das Beispiel 200
    - 11.1.1.1 Einheitlicher Korrekturfaktor für die Rückflüsse 201
    - 11.1.1.2 Periodenbezogener Korrekturfaktor für die Rückflüsse 201
    - 11.1.1.3 Unsicherheit des Kalkulationszinssatzes 201
- 11.2 Sensitivitätsanalysen 202
  - 11.2.1 Sensitivitätsanalyse eines Parameters 202
  - 11.2.2 Sensitivitätsanalyse mit zwei Parametern 203
    - 11.2.2.1 Wie Sie den vorteilhaften Bereich erkennen 204
- 11.3 Alternativrechnungen 205
  - 11.3.1 Simultane Alternativrechnungen mit zwei Parametern 205
    - 11.3.1.1 Tabellarische Ergebnisübersicht 206
    - 11.3.1.2 Grafische Ergebnisaufbereitung – Risikoprofil 207
    - 11.3.1.3 Interpretation der Rechteck-Flächen 209
  - 11.3.2 Viele Parameter – Simulation mit Excel 212
    - 11.3.2.1 Auswahl der Parameter und Wahrscheinlichkeitsannahmen 212
    - 11.3.2.2 Idee der Simulation 214
    - 11.3.2.3 Zufall per Computer 214
    - 11.3.2.4 Umsetzung mit Excel 215
    - 11.3.2.5 Zuordnung von Parameterwerten 215
    - 11.3.2.6 Berechnung der Barwerte 216
    - 11.3.2.7 Klasseneinteilung und Häufigkeitszählung 217
    - 11.3.2.8 Darstellung als Risikoprofil 218
    - 11.3.2.9 Der Zufall im Zufall – „Beweglichkeit“ der Kurven 220
    - 11.3.2.10 Und was ist mit den Erwartungswerten? 220
- 11.4 Formelübersicht 221

## Teil IV

223

## 12 Mathematische Grundlagen

223

- 12.1 Mathe? Konnte ich noch nie (leiden)! 223
- 12.2 Hantieren mit einfachen Gleichungen 224
  - 12.2.1 Umstellen von Gleichungen 225

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 12.2.2   | Einseitige Operationen – Ausklammern und Erweitern | 225 |
| 12.2.3   | Auflösungserscheinungen                            | 226 |
| 12.3     | Hoch- und Tiefbau – Potenzen und Wurzeln           | 226 |
| 12.3.1   | Potenzgesetze                                      | 227 |
| 12.3.1.1 | Positiver ganzzahliger Exponent                    | 227 |
| 12.3.1.2 | Negativer ganzzahliger Exponent                    | 227 |
| 12.3.1.3 | Potenzierung von Potenzen                          | 228 |
| 12.3.1.4 | Wurzeln – Bruchzahlen als Exponent                 | 228 |
| 12.3.1.5 | Negative gebrochene Exponenten – Wurzeln im Nenner | 229 |
| 12.3.1.6 | Einschränkungen beim Wurzelziehen                  | 230 |
| 12.4     | Abhängigkeitsverhältnisse – Die Funktionen         | 230 |
| 12.4.1   | Darstellung von Funktionen                         | 231 |
| 12.4.2   | Die Potenzfunktion                                 | 232 |
| 12.4.3   | Rollentausch – Die Exponentialfunktion             | 234 |
| 12.4.4   | Kommando zurück – Der Logarithmus                  | 236 |
| 12.4.4.1 | Die Bauweise der Logarithmusfunktion               | 237 |
| 12.4.4.2 | Die verschiedenen Logarithmusfunktionen            | 238 |
| 12.4.4.3 | Verlauf der e- und der ln-Funktion                 | 239 |
| 12.4.5   | Anwendungen der Logarithmusfunktion                | 239 |
| 12.4.5.1 | Umkehrung der e-Funktion                           | 239 |
| 12.4.5.2 | Logarithmen von Produkten und Quotienten           | 239 |
| 12.4.5.3 | Logarithmen von Potenzen                           | 240 |
| 12.4.5.4 | Umrechnung in eine andere Basis                    | 241 |
| 12.5     | Spezielle Gleichungen                              | 242 |
| 12.5.1   | Quadratische Gleichungen                           | 242 |
| 12.5.1.1 | Die Lösungen einer quadratischen Gleichung         | 243 |
| 12.5.2   | Polynomiale Gleichungen und die Regula falsi       | 243 |
| 12.5.2.1 | Die Regula falsi                                   | 244 |
| 12.5.2.2 | Zweite Näherung                                    | 245 |
| 12.5.3   | Der Excel-Solver                                   | 246 |
| 12.5.3.1 | Aktivierung des Solvers                            | 247 |
| 12.5.3.2 | Aufruf des Solvers                                 | 247 |
| 12.5.4   | Wurzelgleichungen                                  | 252 |
| 12.6     | Folgen, Reihen und Summen                          | 253 |
| 12.6.1   | Das diskrete Pendant der Funktionen – die Folgen   | 253 |
| 12.6.1.1 | Die arithmetische Folge                            | 254 |
| 12.6.1.2 | Die geometrische Folge                             | 255 |
| 12.6.2   | Summen und Reihen                                  | 256 |
| 12.6.2.1 | Summenschreibweise                                 | 256 |
| 12.6.2.2 | Rechenregeln für Summen                            | 257 |
| 12.6.2.3 | Berechnung einzelner Summen                        | 258 |
| 12.6.2.4 | Summenberechnung mit der arithmetischen Reihe      | 258 |
| 12.6.2.5 | Summenberechnung mit der geometrischen Reihe       | 259 |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 12.6.2.6 | Herleitung von Formel 5-6                                  | 262 |
| 12.6.2.7 | Unendliche Reihen  | 263 |
| 12.7     | Prozente und Prozentpunkte                                 | 264 |
| 12.7.0.1 | Prozentuale Änderungen berechnen                           | 264 |
| 12.7.0.2 | Prozentangabe in absoluten Wert umrechnen                  | 265 |
| 12.7.0.3 | Neuen Wert berechnen                                       | 265 |
| 12.7.0.4 | Zurück zum bisherigen Wert rechnen                         | 265 |
| 12.7.0.5 | Prozentpunkte - Änderung von prozentual angegebenen Werten | 266 |

|   |                                       |            |
|---|---------------------------------------|------------|
| ■ | <b>Lösungen zu den Übungsaufgaben</b> | <b>269</b> |
| ■ | <b>Literaturverzeichnis</b>           | <b>299</b> |
| ■ | <b>Index</b>                          | <b>301</b> |