Lineare Algebra – Was ist das?

1

In diesem Kapitel…

- Den algebraischen Teil der linearen Algebra mit Gleichungssystemen abgleichen
- Matrizen und Determinanten kennen lernen
- Sich mit Vektoren verteidigen
- Einen Blick auf Eigenwerte und Eigenvektoren werfen

Die Begriffe *linear* und *Algebra* werden nicht unbedingt zusammen verwendet. Das Wort *linear* ist ein Adjektiv, das häufig in Kombinationen auftritt: *lineare Gleichungen*, *lineare Regression*, *lineare Programmierung*, *lineare Technologie* usw. Und der Begriff *Algebra* ist den meisten Schülern schon ab der 5. Klasse vertraut. In ihrer Kombination jedoch beschreiben die beiden Begriffe einen Bereich der Mathematik, in dem einige altbekannte algebraische Symbole, genauer gesagt Operationen und Manipulationen auf Vektoren und Matrizen angewendet werden. Damit werden Systeme oder Strukturen geschaffen, die es gestatten, sich noch tiefer gehend mit der Mathematik zu beschäftigen, oder die die unterschiedlichsten praktischen Anwendungsmöglichkeiten in Wissenschaft und Wirtschaft bieten.

Die wichtigsten Elemente der linearen Algebra sind lineare Gleichungssysteme, Vektoren und Matrizen, lineare Transformationen, Determinanten und Vektorräume. Dabei handelt es sich um jeweils eigenständige Themenbereiche, die sich wiederum verzweigen und in sich abgeschlossen sind. Und alle diese Hauptthemen sind eng miteinander verwoben. Es handelt sich um eine Art symbiotischer Beziehung – das Beste aus allen Welten.

Sie finden lineare Gleichungssysteme in Kapitel 4, Vektoren in Kapitel 2, Matrizen in Kapitel 3. Natürlich ist das jeweils nur der Ausgangspunkt. Der Verwendungszweck und die Anwendungen dieser Themen werden im gesamten Buch durchgängig beschrieben. In Kapitel 8 erhalten Sie einen Überblick über Lineartransformationen. Um Determinanten geht es in Kapitel 10, um Vektorräume in Kapitel 13.

Gleichungssysteme entspannt lösen

Ein *Gleichungssystem* ist eine Gruppierung oder Auflistung mathematischer Aussagen, die aus irgendeinem Grund miteinander verknüpft sind. Mehrere Gleichungen können dadurch zusammen hängen, dass sie alle Beziehungen zwischen denselben zwei oder mehr Variablen oder Unbekannten beschreiben. Bei der Beschäftigung mit Gleichungssystemen (siehe Kapitel 4) versuchen Sie festzustellen, ob die verschiedenen Gleichungen oder Aussagen gemeinsame Lösungen haben – das sind Wertemengen für die Variablen, für die alle Gleichungen gleichzeitig wahr sind.

Das folgende Gleichungssystem beispielsweise besteht aus drei verschiedenen Gleichungen, die alle wahr sind (eine Seite ist gleich der anderen Seite), wenn $x = 1$ und $y = 2$.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y^2 - x = 3 \\ \sqrt{x+3} = y \end{cases}$$

Aus Sicht der *linearen* Algebra besteht das einzige Problem des oben gezeigten Gleichungssystems darin, dass die zweite und die dritte Gleichung des Systems nicht *linear* sind.

Eine lineare Gleichung hat die Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = k,$ wobei a_i eine reelle Zahl, x_i eine Variable und k irgendeine reelle Konstante ist.

Beachten Sie, dass in einer linearen Gleichung jede der Variablen genau den Exponenten 1 hat. Ich weiß, dass Sie hier keine Exponenten an den x sehen, aber das ist einfach Standard – die 1 wird als vorhanden angenommen. In dem zuvor gezeigten Gleichungssystem habe ich x und y als Variablen anstelle eines x mit unterschiedlichen tiefgestellten Indizes verwendet. Es ist einfacher, x, y, z usw. zu schreiben (oder einzutippen), wenn man es mit kleineren Systemen zu tun hat, als Indizes für einen einzelnen Buchstaben zu verwenden.

Als nächstes zeige ich Ihnen ein System *linearer* Gleichungen. Ich verwende x, y, z und w als Variablen statt x_1, x_2, x_3 und x_4.

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 4w = 11 \\ x + 3y - 2z + w = 5 \\ 3x + y + 2w = 13 \\ 4x + y + 5z - w = 17 \end{cases}$$

Das System aus vier linearen Gleichungen mit vier Variablen oder Unbekannten *hat* eine einzige Lösung. Jede Gleichung ist wahr, wenn $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ und $w = 4$. Ein Wort zur Vorsicht: Nicht jedes lineare Gleichungssystem hat eine Lösung. Einige Gleichungssysteme haben keine Lösungen, und andere haben mehrere oder sogar unendlich viele Lösungen. In Kapitel 4 werden Sie erfahren, wie Sie feststellen, welche Situation vorliegt: keine, eine oder viele Lösungen.

Lineare Gleichungssysteme werden genutzt, um die Beziehungen zwischen verschiedenen Einheiten zu beschreiben. Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Süßwarenladen und wollen unterschiedliche Packungen mit Süßigkeiten zusammenstellen. Sie wollen eine Packung mit 480 g, eine Packung mit 960 g, eine Packung mit 1440 g und eine jede Diät sprengende Packung mit 1920 g anbieten. Als nächstes werde ich den Inhalt der verschiedenen Packungen beschreiben. Nachdem Sie alle Beschreibungen gelesen haben, werden Sie zu schätzen wissen, wie übersichtlich und einfach die zugehörigen Gleichungen sind.

Die vier Arten von Süßigkeiten, die Sie verwenden werden, sind Nougatriegel, Cremetörtchen, Nussecken und Karamellbonbons. Paket 1 mit 480 g enthält drei Nougatriegel, ein Kremtörtchen, eine Nussecke und zwei Tüten Karamellbonbons. Paket 2 mit 960 g enthält drei Nougatriegel, zwei Kremtörtchen, drei Nussecken und vier Tüten Karamellbonbons.

Das Paket 3 mit 1440 g enthält vier Nougatriegel, zwei Cremetörtchen, acht Nussecken und vier Tüten Karamellbonbons. Und das Paket 4 mit 1920 g enthält sechs Nougatriegel, fünf Kremtörtchen, acht Nussecken und sechs Tüten Karamellbonbons. Was wiegen die einzelnen Süßigkeiten?

Wir stellen das Gewicht der Nougatriegel durch x_1 dar, das Gewicht der Cremetörtchen durch x_2, das Gewicht der Nussecken durch x_3 und das Gewicht der Karamellbonbontüten durch x_4. Damit erhalten Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = 480 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 960 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 1440 \\ 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 1920 \end{cases}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet $x_1 = 30$ g, $x_2 = 60$ g, $x_3 = 90$ g, $x_4 = 120$ g. Dies ist eine sehr vereinfachte Darstellung des Süßwarenhandels, aber Sie können daran erkennen, wie lineare Gleichungssysteme aufgebaut sind, und wie sie helfen, komplizierte Probleme zu lösen. Sie lösen ein solches System unter Verwendung algebraischer Methoden oder Matrizen. Weitere Informationen darüber, wie Sie mit einer solchen Situation umgehen, finden Sie in Kapitel 4.

Gleichungssysteme haben nicht immer Lösungen. Bereits eine einzige Gleichung kann unendlich viele Lösungen haben. Betrachten Sie die Gleichung $2x + 3y = 8$. Wenn Sie geordnete Paare (x, y) verwenden, um die gewünschten Zahlen darzustellen, sind einige Lösungen des Systems (1, 2), (4, 0), (–8, 8) und (10, –4). Keine der Lösungen für die Gleichung $2x + 3y = 8$ ist jedoch gleichzeitig eine Lösung für die Gleichung $4x + 6y = 10$. Sie können versuchen, Übereinstimmungen zu finden, aber es gibt keine. Einige Lösungen von $4x + 6y = 10$ sind (1, 1), (4, –1) und (10, –5). Jede Gleichung hat unendlich viele Lösungen, aber es gibt keine übereinstimmenden Lösungspaare. Das folgende System hat also keine Lösung:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$$

Und auch die Information, dass es keine Lösung gibt, ist eine sehr wichtige Erkenntnis.

Vergleichen durch die Anordnung von Daten in Matrizen

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen in rechteckigen oder runden Klammern. Sie sehen einfach nur ein paar Zahlen – Zeile für Zeile und Spalte für Spalte. Matrizen sind Werkzeuge, um alle Nichtigkeiten (wie etwa die nervtötenden Variablen) zu eliminieren und die sachdienlichen Informationen in einer organisierten, logischen Reihenfolge darzustellen. (Matrizen werden in Kapitel 3 genauer vorgestellt, und in Kapitel 4 werden Sie mit ihrer Hilfe Gleichungssysteme lösen.) Wenn man Matrizen für die Lösung von Gleichungssystemen einsetzt, dann werden die Koeffizienten der Variablen in eine Matrix aufgenommen, und die Variablen werden weggelassen. Woher wissen Sie also, was was ist? Anhand der Reihenfolge – ganz einfach.

Nachfolgend ein System aus vier linearen Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 8 \\ x_1 \qquad\quad - 10x_3 + x_4 = 11 \\ 4x_1 + x_2 \qquad\quad - 4x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \qquad\quad = 6 \end{cases}$$

Bei der Arbeit mit diesem Gleichungssystem können Sie eine Matrix verwenden, um alle Koeffizienten der Variablen darzustellen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & -10 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Beachten Sie, dass ich für die in der Gleichung fehlende Terme eine 0 angegeben habe. Die Koeffizienten schreibt man in der Reihenfolge der Terme auf, mit denen sie multipliziert werden; für fehlende Terme werden daher Nullen als Platzhalter verwendet. Die Koeffizientenmatrix ist sehr viel einfacher zu überblicken als das Gleichungssystem. Sie müssen jedoch unbedingt die Reihenfolge einhalten. Außerdem habe ich der Matrix einen Namen gegeben – nein, nicht *Angelina*, sondern ein einfaches A.

Wenn Sie Koeffizientenmatrizen verwenden, sind diese in der Regel von zwei Vektoren begleitet. (Ein *Vektor* ist im Grunde eine eindimensionale Matrix. Er hat eine Spalte und viele Zeilen oder eine Zeile und viele Spalten. Weitere Informationen über Vektoren finden Sie in den Kapiteln 2 und 3.)

Die Vektoren, die dem obigen Gleichungssystem entsprechen, sind der Variablenvektor und der Konstantenvektor. Ich gebe den Vektoren die Namen X und C.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nachdem Sie die Matrizen- und Vektorform vorliegen haben, können Sie individuelle Operationen für Matrizen und Vektoren oder auch Operationen mit Matrizen auf Vektoren oder umgekehrt ausführen. Und genau darum wird es in Kapitel 2 gehen.

Ich werde Ihnen hier jedoch eine praktischere Anwendung von Matrizen zeigen, und demonstrieren, warum es so übersichtlich ist, die Zahlen (Koeffizienten) in einer Matrix abzulegen. Stellen Sie sich eine Versicherungsagentur vor, die verfolgt, wie viele Policen die einzelnen Mitarbeiter verkaufen. In meinem Beispiel halte ich die Anzahl der Mitarbeiter und der Policen klein, und überlasse es Ihnen zu erahnen, wie riesig die Matrizen bei einer großen Anzahl an Mitarbeitern und vielen verschiedenen Policentypen werden.

Bei der Rundumglück-Versicherung arbeiten die Vertreter Anton, Berta, Cäsar und Dora. Im Januar hat Anton 15 Autoversicherungen, 10 Hausratversicherungen, 5 Lebensversicherungen, 9 Grundstücksversicherungen und 1 Krankenversicherung verkauft. Berta hat… ok. Hier wird es schon unübersichtlich. Ich werde alle Policen, die die Mitarbeiter im Januar verkauft haben, in einer Matrix darstellen.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{L} & \mathrm{G} & \mathrm{K} \end{array} \\ \begin{array}{r} \mathit{Anton} \\ \mathit{Berta} \\ \mathit{Cäsar} \\ \mathit{Dora} \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 & 9 & 1 \\ 10 & 9 & 4 & 9 & 2 \\ 20 & 0 & 0 & 23 & 1 \\ 15 & 6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wenn Sie die Anzahl der Policen von Januar, Februar, März usw. in Matrizen ablegen, dann ist es ganz einfach, eine *Matrixaddition* durchzuführen, um die Summen für das gesamte Jahr zu erhalten. Außerdem können die Provisionen für die Mitarbeiter berechnet werden, indem eine *Matrixmultiplikation* durchgeführt wird. Wenn die Provisionen für diese Policen beispielsweise immer gleiche Beträge sind, etwa 110 Euro, 200 Euro, 600 Euro, 60 Euro und 100 Euro, legen Sie einfach einen Vektor für die Auszahlungen an und multiplizieren.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccc} \mathrm{A} & \mathrm{H} & \mathrm{L} & \mathrm{G} & \mathrm{K} \end{array} \\ \begin{array}{r} \mathit{Anton} \\ \mathit{Berta} \\ \mathit{Cäsar} \\ \mathit{Dora} \end{array} & \begin{pmatrix} 15 & 10 & 5 & 9 & 1 \\ 10 & 9 & 4 & 9 & 2 \\ 20 & 0 & 0 & 23 & 1 \\ 15 & 6 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 200 \\ 600 \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7290 \\ 6040 \\ 3680 \\ 9710 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mathit{Anton} \\ \mathit{Berta} \\ \mathit{Cäsar} \\ \mathit{Dora} \end{array}$$

All diese Dinge mit Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation sind in Kapitel 3 beschrieben. Weitere Prozesse für das Versicherungsunternehmen, die mit Hilfe von Matrizen durchgeführt werden könnten, sind die Bestimmung der prozentualen Zu- oder Abnahmen der Verkäufe (des gesamten Unternehmens oder der einzelnen Verkaufsmitarbeiter), indem Operationen auf Summenvektoren angewendet werden, die Bestimmung von Provisionen, indem die Gesamtsummen mit den jeweiligen Raten multipliziert werden, die Einrichtung von prozentualen Zunahmezielen usw. Die Möglichkeiten sind nur durch mangelnde Phantasie, Richtlinien oder Bedürfnisse begrenzt.

Vektorräume betrachten

In Teil IV dieses Buches finden Sie alle möglichen wichtigen Informationen und interessante Mathematik zum Thema Vektorräume. In anderen Kapiteln beschreibe ich Vektoren und arbeite mit ihnen. Es tut mir leid, dass es kein separates Kapitel über *Räume* oder den Raum gibt – das muss ich den Architekten und Astronomen überlassen. Der Begriff *Vektorraum* ist letztlich nur ein mathematischer Ausdruck, mit dem eine bestimmte Gruppe von Elementen definiert wird, die bestimmten Bedingungen gehorchen. (Weitere Informationen über die Eigenschaften von Vektorräumen finden Sie in Kapitel 13.)

Stellen Sie sich einen Vektorraum wie ein Billardspiel vor. Sie haben alle Elemente (die Billardkugeln), die oben auf dem Tisch angeordnet sind (und die dort bleiben, wenn sie korrekt getroffen werden). Selbst wenn die Billardkugeln interagieren (voneinander abprallen), bleiben sie irgendwo auf dem Tisch. Die Billardkugeln sind also die Elemente des Vektorraums und der Tisch ist dieser Vektorraum. Es gibt Operationen, die Aktionen auf dem Tisch bewirken - eine Kugel wird mit einem Queue angestoßen oder eine Kugel wird von einer anderen Kugel getroffen. Und es gibt Regeln, die festlegen, wie alle Aktionen ablaufen müssen. Außerdem sollten die Billardkugeln während der Aktionen auf dem Tisch (innerhalb des Vektorraums) bleiben. Natürlich ist ein Billardspiel nicht annähernd so interessant wie ein Vektorraum, aber ich wollte mit diesem Vergleich aus dem wirklichen Leben lediglich die sonst etwas abstrakten Elemente und Regeln veranschaulichen.

Ein Vektorraum ist eine Art Kategorie oder Bauplan in der Welt der linearen Algebra. Andere Bereiche der Mathematik haben Ähnliches (Kategorien und Baupläne). Eine Gemeinsamkeit dieser Kategorien ist, dass sie eine Menge oder Gruppierung von Objekten enthalten, die alle eine verbindende Eigenschaft aufweisen. Mit dem Plan sind also bestimmte Eigenschaften verknüpft – Eigenschaften, die für alle Mitglieder der Gruppierung gelten. Wenn alle Mitglieder den Regeln gehorchen müssen, können Sie Bewertungen oder Schlussfolgerungen basierend auf ein paar wenigen der Elemente ableiten, statt jedes einzelne Element untersuchen zu müssen (selbst wenn das möglich ist).

Vektorräume enthalten Vektoren, die viele unterschiedliche Formen annehmen können. Die einfachste Form, die ich Ihnen zeigen kann, ist ein Vektor im engeren Sinne, aber bei Vektoren kann es sich auch um Matrizen oder Polynome handeln. Solange diese unterschiedlichen Formen den Regeln gehorchen, haben Sie einen Vektorraum. (In Kapitel 14 werden Sie die Regeln kennen, die Sie benötigen, wenn Sie Unterräume von Vektorräumen betrachten.)

Die Regeln für einen Vektorraum sind wesentlich von den Operationen abhängig, die zu diesem Vektorraum gehören. Sie werden einige Besonderheiten gegenüber der herkömmlichen Notation für Operatoren kennen lernen. Statt eines einfachen Pluszeichens, +, wird $\oplus$ verwendet, statt des Multiplikationszeichens, $\cdot$, wird $\odot$ verwendet. Diese neuen Symbole werden eingesetzt, um Sie daran zu erinnern, dass Sie einen Schritt weiter sind. Bei Vektorräumen kann die Addition völlig anders als üblicherweise definiert sein. Beispielsweise könnten Sie die Vektoraddition von zwei Elementen x und y als $x \oplus y = 2x + y$ definieren. Funktioniert diese Regel in einem Vektorraum? Genau das müssen Sie feststellen, wenn Sie sich mit Vektorräumen beschäftigen.

Werte mit Hilfe von Determinanten bestimmen

Eine *Determinante* ist mit einer Matrix verknüpft, wie Sie in Kapitel 10 erfahren werden. Sie können sich eine Determinante wie eine Operation vorstellen, die auf eine Matrix angewendet wird. Die Determinante schließt alle Einträge einer Matrix ein. Bevor Sie die Determinante bestimmen, müssen Sie jedoch sicherstellen, dass die Matrixeinträge einige Voraussetzungen erfüllen.

Nur quadratische Matrizen haben eine Determinante. Ich werde Ihnen jetzt ein paar Beispiele für Matrizen und ihre Determinanten zeigen. Die Matrix A hat eine Determinante |A|, auch als det(A) bezeichnet, und auch die Matrizen B und C haben Determinanten.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \det(A) = |A| = -51$$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}, \det(B) = |B| = 1$$

$$C = (4), \det(C) = |C| = 4$$

Die Matrizen A, B und C sind jeweils eine 3×3-Matrix, eine 2×2-Matrix und eine 1×1-Matrix. Die Berechnung der Determinanten der einzelnen Matrizen reicht von ganz schwierig bis hin zu ganz einfach. Ich werde Ihnen alle Details zur Berechnung von Determinanten in Kapitel 10 vermitteln. Hier geht es allerdings noch gar nicht um rechnerische Details, sondern nur um die Tatsache, dass diese quadratischen Matrizen durch eine praktische Funktion mit einfachen Zahlen verknüpft sind.

Alle quadratischen Matrizen haben Determinanten, aber einige dieser Determinanten sind nicht besonders groß (die Determinanten sind zum Beispiel gleich 0). Wenn eine Matrix eine Determinante von 0 hat, ist das kein größeres Problem für die Matrix, aber der Wert 0 verursacht Probleme mit einigen der Anwendungen von Matrizen und Determinanten. Eine allgemeine Eigenschaft von Matrizen mit einer Determinante von 0 ist, dass sie kein multiplikatives Inverses besitzen.

Die nachfolgend gezeigte Matrix D beispielsweise hat die Determinante 0 und besitzt demzufolge keine Inverse:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & -4 \\ -2 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \det(D) = |D| = 0$$

Die Matrix D sieht auf den ersten Blick perfekt aus, aber wenn man einen Blick unter die Oberfläche wagt, erkennt man, worin das Problem bestehen könnte, wollte man diese Matrix zur Lösung von Aufgaben einsetzen. Sie müssen sich der Bedeutung einer Determinante, die gleich 0 ist, bewusst sein, und gegebenenfalls bestimmte Vorkehrungen treffen oder Anpassungen vornehmen, um eine Lösung zu erzielen.

Beispielsweise werden in Kapitel 12 Determinanten in Kombination mit der Cramerschen Regel (zum Lösen von Gleichungssystemen) eingesetzt. Die Werte der Variablen sind Quotienten aus unterschiedlichen Determinanten, die aus den Koeffizienten in den Gleichungen berechnet werden. Wenn die Determinante im Nenner des Quotienten gleich Null ist, haben Sie Pech gehabt, und Sie müssen die Lösung mit Hilfe einer anderen Methode bestimmen.

Und nun Eigenwerte und Eigenvektoren

In Kapitel 16 werden Sie erfahren, wie Eigenwerte und Eigenvektoren in Hinblick auf eine bestimmte Matrix einander entsprechen. Jeder *Eigenwert* hat einen zugehörigen *Eigenvektor*. Aber worum handelt es sich bei diesen Eigen-Dingern überhaupt?

Erstens, das Wort »Eigen« beschreibt im wahrsten Sinne des Wortes, wie es sich mit Eigenwerten und Eigenvektoren verhält. Ein Eigenwert ist eine Zahl, in unserer Welt der linearen Algebra als *Skalar* bezeichnet. Und ein Eigenvektor ist ein $n \times 1$-Vektor. Ein Eigenwert und ein Eigenvektor sind mit einer bestimmten $n \times n$-Matrix verknüpft.

Nehmen wir als Beispiel die Zahl 13. Anschließend multiplizieren wir diese Zahl 13 mit einem 2×1-Vektor. In Kapitel 2 werden Sie erfahren, dass die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar einfach bedeutet, dass jeder Eintrag in dem Vektor mit dieser Zahl multipliziert wird. Bis dahin sollten Sie mir das einfach glauben.

$$13 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Das scheint nicht besonders aufregend zu sein, deshalb lege ich noch einen drauf – vielleicht können Sie dem nächsten Schritt schon mehr abgewinnen. Auch hier müssen Sie mir in punkto Multiplikation erst einfach mal glauben. Ich werde jetzt denselben Vektor, der eben mit 13 multipliziert wurde, mit einer Matrix multiplizieren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Egal, ob ich den Vektor mit 13 oder mit der Matrix multipliziere, ich erhalte denselben Vektor. (Weitere Informationen darüber, wie diese Multiplikation vorgenommen wird, bekommen Sie in Kapitel 3.) Nur ein Wort: Manchmal findet man eine Zahl, die genau dasselbe erledigt wie eine ganze Matrix. Sie können dazu allerdings nicht einfach irgendwelche Zahlen erfinden, wie es bei mir hier den Anschein hatte. (Ich habe gespickt.) Jede Matrix hat nämlich ihre *eigenen Eigenwerte* (die Zahlen) und *Eigenvektoren* (die mit den Eigenwerten multipliziert werden). In Kapitel 16 erfahren Sie alle Details – alle Schritte und Verfahren, die erforderlich sind, um diese schwer fassbaren Gebilde zu verstehen.