

Inhaltsverzeichnis

Einführung	19
Über dieses Buch	19
Konventionen in diesem Buch	20
Törichte Annahmen über den Leser	20
Aufbau dieses Buches	21
Teil I: Aufstellen, Lösen, Zeichnen	21
Teil II: Die wichtigsten Grundlagen der Trigonometrie	21
Teil III: Analytische Geometrie und die Lösung von Gleichungssystemen	21
Teil IV: Der Teil der Zehn	22
Symbole in diesem Buch	22
Wie es weitergeht	23
Teil I	
Aufstellen, Lösen, Zeichnen	25
Kapitel 1	
Themen aus der Mathematik vor den Grundlagen der Analysis	27
Grundlagen der Analysis: Ein Überblick	27
Zahlengrundlagen (und nein, hier wird nicht gezählt!)	29
Die Vielfalt der Zahlentypen: Begriffe, die Sie kennen sollten	29
Die grundlegenden Operationen für Zahlen	30
Die Eigenschaften von Zahlen: Was Sie sich unbedingt merken sollten!	31
Mathematische Aussagen in sichtbare Form bringen: Spaß mit Graphen	32
Grundlegende Begriffe und Konzepte kennen lernen	32
Graphen für Gleichungen im Vergleich zu Ungleichungen	33
Informationen aus Graphen ablesen	34
Der Umgang mit dem graphischen Taschenrechner	36
Kapitel 2	
Reelle Zahlen	39
Ungleichungen lösen	39
Eine kurze Wiederholung zu Ungleichungen	39
Gleichungen und Ungleichungen mit Absolutwerten lösen	40
Lösungen für Ungleichungen unter Verwendung der Intervallnotation ausdrücken	42
Variationen zur Division und Multiplikation: Wurzeln und Exponenten	44
Wurzeln und Exponenten definieren und einander zuordnen	44
Wurzeln als Exponenten umschreiben (oder rationale Exponenten erzeugen)	45
Eine Wurzel aus dem Nenner entfernen: Rationalisieren	46

Kapitel 3

Die Voraussetzung für die Grundlagen der Analysis: Funktionen 49

Eigenschaften gerader und ungerader Funktionen und ihre Graphen	49
Grundfunktionen (die gebräuchlichsten) und ihre Graphen	50
Quadratische Funktionen	50
Quadratwurzelfunktionen	51
Absolutwertfunktionen	52
Kubikfunktionen	52
Kubikwurzelfunktionen	53
Transformation der Grundgraphen	54
Vertikale Transformationen	55
Horizontale Transformationen	56
Translationen	57
Spiegelungen	59
Kombinationen verschiedener Transformationen (selbst wieder eine Transformation!)	60
Punktweise Transformation von Funktionen	62
Graphen für Funktionen erstellen, die mehrere Regeln verwenden:	
Stückweise Funktionen	63
Ausgabewerte für rationale Funktionen berechnen	65
Schritt 1: Suche nach vertikalen Asymptoten	65
Schritt 2: Suche nach horizontalen Asymptoten	66
Schritt 3: Schräge Asymptoten suchen	67
Schritt 4: Die x- und y-Schnittpunkte finden	67
Die Ergebnisse umsetzen: Graphen rationaler Funktionen	68
Der Nenner hat den höheren Grad	68
Zähler und Nenner haben denselben Grad	71
Der Zähler hat den höheren Grad	72
Operationen auf Funktionen: Ganz ohne Skalpell	73
Addieren und Subtrahieren	74
Multiplizieren und Dividieren	75
Die Verknüpfung von Funktionen verstehen	76
Anpassung des Definitionsbereichs und des Wertebereichs verknüpfter Funktionen (falls nötig)	76
Wechselspiele mit inversen Funktionen	79
Den Graphen einer Inversen darstellen	79
Invertierung einer Funktion, um ihre Inverse zu finden	81
Eine Inverse überprüfen	81

Kapitel 4

**Nullstellen finden und nutzen, um die Graphen
von Polynomfunktionen darzustellen 83**

Die Bedeutung von Graden und Nullstellen	83
Einen Polynomausdruck faktorisieren	85
Immer der erste Schritt: Die Suche nach einem ggT	86

Bringen Sie Ordnung hinein: Die EAIL-Methode für Trinome	87
Spezielle Polynomtypen erkennen und faktorisieren	89
Gruppieren, um vier oder mehr Terme zu faktorisieren	92
Die Nullstellen einer faktorisierten Gleichung bestimmen	94
Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Quadratformel) – falls nicht faktorisiert werden kann	94
Die Quadratformel anwenden	95
Die quadratische Ergänzung	95
Nicht faktorisierbare Polynome mit einem höheren Grad als 2 auflösen	97
Alle Nullstellen eines Polynoms zählen	97
Die reellen Nullstellen erkennen: Die Vorzeichenregel von Descartes	97
Imaginäre Nullstellen zählen: Der Fundamentalsatz der Algebra	98
Reelle Nullstellen raten und prüfen	100
Und jetzt rückwärts: Mit Hilfe von Lösungen Faktoren finden	106
Graphen von Polynomen zeichnen	107
Wenn alle Nullstellen reelle Zahlen sind	107
Wenn einige (oder alle) der Nullstellen imaginäre Zahlen sind:	
Alle Techniken kombinieren	110

Kapitel 5

Exponentielle und logarithmische Funktionen **113**

Exponentialfunktionen	114
Die wichtigsten Eigenschaften einer Exponentialfunktion	114
Graphendarstellung und Transformation einer Exponentialfunktion	116
Logarithmen: Die Umkehr der Exponentialfunktionen	118
Logarithmen in den Griff kriegen	118
Eigenschaften und Beziehungen von Logarithmen	119
Die Basis eines Logarithmus ändern (wenn es sich um keinen natürlichen oder allgemeinen Logarithmus handelt)	120
Eine Zahl berechnen, deren Logarithmus Sie kennen: Inverse Logarithmen	121
Graphen von Logarithmen	121
Gleichungen mit Exponenten und Logarithmen lösen	125
Die Lösung von Exponentialgleichungen schrittweise erklärt	125
Schritte zur Lösung logarithmischer Gleichungen	127
Textaufgaben mit Exponentialgleichungen lösen	129

Teil II

Die wichtigsten Grundlagen der Trigonometrie **133**

Kapitel 6

Winkel und der Einheitskreis **135**

Bogenmaß: Das Basis-Maß in den Grundlagen der Analysis	135
Trigonometrische Verhältnisse: Rechtwinklige Dreiecke einen Schritt weiter führen	136

Einen Sinus schaffen	137
Die Suche nach dem Kosinus	138
Weiter zum Tangens	139
Die Kehrseite: Reziproke trigonometrische Funktionen	140
Die Umkehr: Inverse trigonometrische Funktionen	141
Trigonometrische Verhältnisse und ihr Verhalten in der Koordinatenebene	142
Den Einheitskreis in den Griff bekommen	145
Machen Sie sich mit den gebräuchlichsten Winkeln vertraut	145
Ungebräuchliche Winkel zeichnen	146
Spezielle Winkelverhältnisse	148
Der 45er: 45° – 45° – 90° -Dreiecke	148
Das alte 30–60: 30° – 60° – 90° -Dreiecke	149
Zusammenführung von Dreiecken und dem Einheitskreis:	
Einigkeit macht stark!	150
Die wichtigsten Winkel ohne Winkelmesser korrekt platzieren	151
Werte trigonometrischer Funktionen auf dem Einheitskreis finden	153
Den Referenzwinkel finden, um nach Winkeln auf dem Einheitskreis aufzulösen	158
Nicht nur was für Robin Hood: Bögen erstellen und messen	163

Kapitel 7

Graphen und Transformationen von trigonometrischen Funktionen **165**

Grundgraphen für Sinus und Kosinus skizzieren	165
Der Sinus-Graph	166
Der Kosinus-Graph	168
Die Graphen von Tangens und Kotangens	169
Tangens	170
Kotangens	172
Sekans und Kosekans in Bildern	174
Sekans	174
Kosekans	176
Trigonometrische Graphen transformieren	177
An den Graphen von Sinus und Kosinus herumbasteln	178
Änderung der Amplitude	178
Graphen von Tangens und Kotangens anpassen	179
Die Graphen von Sekans und Kosekans transformieren	192

Kapitel 8

Trigonometrische Identitäten: Die Grundlagen **197**

Bedenke das Ende: Eine schnelle Einführung in das Thema Identitäten	198
Der Zweck heiligt die Mittel: Grundlegende trigonometrische Identitäten	198
Kehrwert-Identitäten	199
Pythagoräische Identitäten	201
Gerade/Ungerade-Identitäten	204

Kofunktions-Identitäten	205
Periodizitäts-Identitäten	207
Schwierige trigonometrische Beweise: Ein paar Techniken, die Sie kennen sollten	209
Nervtötende Nenner	210
Auf jeder Seite unabhängig arbeiten	213
Kapitel 9	
<i>Es geht weiter: Identitäten für Fortgeschrittene!</i>	217
Trigonometrische Funktionen von Summen und Differenzen finden	217
Den Sinus von $(a \pm b)$ bestimmen	218
Den Kosinus von $(a \pm b)$ berechnen	222
Den Tangens von $(a \pm b)$ berechnen	224
Die Summen- und Differenzformeln auf Beweise anwenden	226
Den trigonometrischen Wert eines Winkels verdoppeln, ohne den Winkel zu kennen	227
Den Sinus eines verdoppelten Winkels bestimmen	227
Den Kosinus für zwei berechnen	229
Quadrieren Sie Ihre Sorgen weg!	230
Doppelter Spaß mit dem Tangens	231
Trigonometrische Funktionen allgemeiner Winkel, dividiert durch zwei	232
Ausblick auf die Analysis: Von Produkten zu Summen und zurück	234
Produkte als Summen (oder Differenzen) ausdrücken	234
Von Summen (oder Differenzen) zu Produkten	236
Exponenten trigonometrischer Funktionen mit Hilfe der Formeln zur Potenzreduzierung eliminieren	237
Kapitel 10	
<i>Schiefe Dreiecke mit dem Sinus- und dem Kosinussatz bestimmen</i>	239
Ein Dreieck mit dem Sinussatz lösen	240
Zwei Winkel sind bekannt	241
Zwei bekannte aufeinander folgende Seitenlängen (SSW)	244
Einem Dreieck mit dem Kosinussatz zu Leibe rücken	250
SSS: Winkel bestimmen, wenn nur die Seiten bekannt sind	251
SWS: Der Winkel in der Mitte (und die beiden Seiten)	253
Das Dreieck durch Berechnung der Fläche bestimmen	255
Fläche anhand von zwei Seiten und einem dazwischen liegenden Winkel bestimmen (für SWS-Szenarien)	255
Die Formel von Heron (für SSS-Szenarien)	255

Teil III
Analytische Geometrie und die Lösung
von Gleichungssystemen **257**

Kapitel 11
Eine neue Denkweise: Komplexe Zahlen und Polarkoordinaten **259**

Ein Vergleich zwischen reellen und imaginären Zahlen (und wie die Mathematiker sie sehen)	259
Reell und imaginär kombinieren: Das komplexe Zahlensystem	261
Die Bedeutung komplexer Zahlen verstehen	261
Operationen mit komplexen Zahlen	261
Komplexe Zahlen graphisch darstellen	263
Polarkoordinaten	264
Die Polarkoordinatenebene	265
Polarkoordinaten mit negativen Werten graphisch darstellen	267
In und von Polarkoordinaten umrechnen	269
Polargleichungen graphisch darstellen	272

Kapitel 12
Kegelschnitte **275**

Kegel an Kegel: Die vier Kegelschnitte	276
Im Bilde (Graphenform)	276
Schriftlich (Gleichungsform)	277
Es geht rund: Kreise	278
Einen Kreis zeichnen	279
Auf und ab mit Parabeln	281
Beschriftung der Teile	281
Die Eigenschaften einer Standardparabel	282
Variationen zeichnen: Parabeln in der Ebene (und nicht im Ursprung)	283
Bestimmung von Scheitel, Symmetrieachse, Brennpunkt und Leitlinie	284
Minimum- und Maximumwerte vertikaler Parabeln bestimmen	288
Ellipsen (ein lustiges Wort für Ovale)	289
Ellipsen beschriften und algebraisch ausdrücken	290
Teile des Ovals identifizieren: Scheitel, Nebenscheitel, Achsen und Brennpunkte	291
Hyperbeln – ein Parabeln paar	294
Die beiden Hyperbeltypen und ihre Bestandteile visualisieren	294
Den Graphen einer Hyperbel aus der Gleichung ableiten	296
Die Gleichung von Asymptoten finden	298
Kegelschnitte außerhalb der Welt der kartesischen Koordinaten ausdrücken	299
Kegelschnitte in parametrischer Form zeichnen	299
Gleichungen von Kegelschnitten in der Polarkoordinatenebene	301

Kapitel 13	
Gleichungssysteme und Matrizen	305
Eine Einführung zu den Lösungsverfahren von Gleichungssystemen	306
Lösungen von Systemen mit zwei Gleichungen algebraisch bestimmen	307
Lineare Systeme lösen	307
Nicht lineare Systeme	311
Systeme mit mehr als zwei Gleichungen lösen	313
Partialbruchzerlegung	316
Ungleichungssysteme	317
Matrizen: Grundlagen	319
Grundlegende Operationen für Matrizen	320
Matrizen miteinander multiplizieren	321
Matrizen vereinfachen, um den Lösungsprozess leichter zu machen	324
Ein System in Matrizenform darstellen	324
Reduzierte Zeilenstufenform	325
Erweiterte Form	327
Matrizen beherrschen	328
Mit der Gaußschen Eliminierung Systeme lösen	328
Eine Matrix mit ihrer Inversen multiplizieren	331
Mit Determinanten arbeiten: Die Cramersche Regel	334
Kapitel 14	
Folgen, Reihen und die Entwicklung von Binomen	339
Folgerichtig: Die allgemeine Vorgehensweise	339
Die Terme einer Folge mit Hilfe des Folgenausdrucks berechnen	340
In die umgekehrte Richtung arbeiten: Anhand von Termen	
einen Ausdruck bilden	340
Rekursive Folgen: Eine Art allgemeine Folge	341
Den Abstand zwischen Termen berechnen: Arithmetische Folgen	342
Mit Hilfe aufeinander folgender Terme einen weiteren Term in einer	
arithmetischen Folge finden	343
... mit Hilfe von zwei beliebigen Termen	343
Gleiche Verhältnisse aufeinander folgender Terme: Geometrische Folgen	344
Einen Term identifizieren, wenn man aufeinander folgende Terme kennt	345
Außer der Reihe: Einen Term finden, wenn die Terme nicht	
aufeinander folgend sind	346
Eine Reihe erstellen: Die Terme einer Folge aufsummieren	347
Die allgemeine Summennotation	347
Die Summe einer arithmetischen Folge bilden	348
Aufaddieren geometrischer Folgen	349
Weiter mit dem binomischen Lehrsatz	352
Der binomische Lehrsatz und seine Bestandteile	353
Wir beginnen ganz vorne: Binomische Koeffizienten	354
Mit dem binomischen Satz entwickeln	355

Kapitel 15

Ausblick auf die Analysis 361

Der Unterschied zwischen den Grundlagen der Analysis und der Analysis	361
Grenzwerte verstehen und darüber sprechen	363
Den Grenzwert einer Funktion finden	363
Graphisch	364
Analytisch	365
Algebraisch	366
Mit Grenzwerten arbeiten: Die Grenzwertsätze	369
Stetigkeit von Funktionen überprüfen	370
Feststellen, ob eine Funktion stetig ist	370
Der Umgang mit der Unstetigkeit	370

Kapitel 16

Grenzwerte auswerten 373

Einfache Grenzwerte	373
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	373
Einsetzen und Einkochen	374
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwert	374
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen	375
Aufgabenstellungen mit Grenzwert algebraisch lösen	377
Machen Sie eine Pause – mit einem Grenzwert-Sandwich	380
Grenzwerte bei unendlich auswerten	385
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	386
Grenzwerte bei unendlich mit einem Taschenrechner lösen	387
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden	388

Kapitel 17

Differentiation – Orientierung 391

Differentiation: Sucht die Steigung!	392
Die Steigung einer Geraden	394
Die Ableitung einer Geraden	396
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate	397
Analysis auf dem Spielplatz	397
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate	398
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung	399
Die Ableitung einer Kurve	400
Der Differenzquotient	402
Durchschnittliche Änderungsrate und unmittelbare Änderungsrate	409
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	409

Kapitel 18	
Integration und Flächenannäherung – Ein Einstieg	411
Integration: Einfach eine seltsame Addition	411
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	413
Der Umgang mit negativen Flächen	416
Flächen annähern	416
Flächen mit Hilfe linker Summen annähern	416
Flächen mit Hilfe rechter Summen annähern	419
Flächen mit Mittelpunktsummen annähern	422
Die Summennotation	423
Die Grundlagen summieren	424
Riemann-Summen in Sigma-Notation	424
Exakte Flächen mit Hilfe des bestimmten Integrals ermitteln	427
Flächen annähern mit der Trapezregel und der Simpson-Regel	430
Die Trapezregel	430
Die Simpson-Regel – Thomas (1710–1761), nicht Homer (1987–)	433
Teil IV	
Der Teil der Zehn	435
Kapitel 19	
Zehn Gewohnheiten, die Ihnen bei der Analysis helfen	437
Lesen Sie genau, wie die Aufgabe lautet!	437
Zeichnen Sie Bilder (viele Bilder!!)	438
Planen Sie Ihren Angriff!	438
Schreiben Sie sich alle Formeln auf!	439
Zeigen Sie jeden Schritt Ihrer Arbeit!	440
Erkennen Sie, wann Sie aufhören sollten!	440
Überprüfen Sie Ihre Lösungen!	441
Üben Sie!	441
Stellen Sie sicher, dass Sie die Konzepte verstanden haben!	442
Löchern Sie Ihren Lehrer mit Fragen!	442
Kapitel 20	
Zehn Dinge, die Sie sich abgewöhnen sollten, bevor Sie mit der Analysis beginnen	443
Falsche Operatorreihenfolge	443
Quadrieren ohne EAIL	443
Nenner aufsplitten	444
Falsche Terme zusammenfassen	444
Den Kehrwert vergessen	444
Minuszeichen vergessen	445

Grundlagen der Analysis für Dummies

Übervereinfachung von Wurzeln	445
Exponentielle Irrtümer	445
Zu schnell kürzen	446
Falsch Einmultiplizieren	447
Stichwortverzeichnis	449