Am Anfang stand … die Algebra

1

In diesem Kapitel …

- Die Gesetze der Algebra einhalten (und anwenden)
- Die Multiplikationseigenschaft der Null ausnutzen
- Ihre Exponentialkraft stärken
- Spezielle Produkte und Faktorisierung genauer betrachten

Die Algebra ist ein Zweig der Mathematik, den die Menschen kennen lernen, bevor sie sich mit anderen Bereichen der Mathematik oder Wissenschaft beschäftigen. Beispielsweise verwenden Sie die Prozesse und die Verfahrensweisen der Algebra in der Analysis, um Transformationen zu erzeugen. Sie nutzen die Algebra in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Statistik, um Durchschnittswerte und Schätzungen zu berechnen. Und Sie setzen die Algebra in der Chemie ein, um das Verhältnis der verschiedenen Chemikalien richtig bestimmen zu können. Die Algebra alleine ist ein ästhetischer Genuss, aber erst in Kombination mit anderen Anwendungen wird sie zum Leben erweckt.

Alle Disziplinen der Wissenschaft und so auch die Mathematik beinhalten Regeln und Muster. Sie werden sich dem Thema unter Verwendung der Regeln und Muster annähern, die Sie bereits kennen, und Sie bauen bei weitergehenden Studien auf diesen Regeln auf. Die Belohnung? All die neuen Horizonte, die sich Ihnen eröffnen.

Diskussionen über die Algebra setzen voraus, dass Sie die richtige Notation und Terminologie verwenden. In *Algebra für Dummies* (Wiley-VCH Verlag) lernen Sie zunächst, Terme richtig zu kombinieren, Operationen für vorzeichenbehaftete Zahlen auszuführen und korrekt mit Exponenten zu arbeiten. Außerdem erfahren Sie dort, wie Sie die grundlegenden linearen und quadratischen Gleichungen lösen. Algebra II beschäftigt sich mit anderen Funktionsarten, wie beispielsweise Exponentialfunktionen und logarithmischen Funktionen, ebenso wie mit Themen, die als Ausgangspunkt für andere Mathematikkurse dienen können.

Sie können jede algebraische Diskussion – auf jeder Ebene – wie folgt charakterisieren: vereinfachen, lösen und weitergeben.

Und jetzt im Detail: Die Grundlagen der Algebra beinhalten die Regeln für den Umgang mit Gleichungen, Regeln für die Verwendung und Kombination von Termen mit Exponenten, Muster für die Faktorisierung von Ausdrücken sowie eine allgemeine Regel für die Kombination aller genannter Bereiche. In diesem Kapitel stelle ich Ihnen die Grundlagen vor, damit Sie Ihr Studium der Algebra weiterführen und auf Ihre algebraischen Fähigkeiten vertrauen können. Sie können jederzeit auf diese Regeln zurückgreifen, wenn Sie sie brauchen, um die vielen fortgeschrittenen Themenbereiche der Algebra zu verstehen.

Algebraische Eigenschaften – eine Skizze

Die Mathematiker haben die Regeln und Eigenschaften entwickelt, die Sie in der Algebra anwenden, damit jeder Student, Forscher, neugierige Schüler und gelangweilte Streber, die an derselben Aufgabe arbeiten, alle dieselbe Lösung erhalten – egal, wo sie sich befinden oder wann sie die Aufgabe lösen. Natürlich wollen Sie nicht, dass sich die Regeln täglich ändern (und ich will auch nicht jedes Jahr ein neues Buch schreiben!). Sie brauchen Regelmäßigkeit und Sicherheit – und das gewährleisten die strengen Regeln und Eigenschaften der Algebra, die ich Ihnen in diesem Abschnitt vorstelle.

Bewahren Sie Ordnung – mit dem Kommutativgesetz

Das *Kommutativgesetz* gilt für die Operationen der Addition und Multiplikation. Es besagt, dass Sie die Reihenfolge der Terme in einer Operation ändern können, ohne dass sich das Endergebnis dadurch ändert:

$a + b = b + a$ Kommutativgesetz der Addition

$a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativgesetz der Multiplikation

Wenn Sie 2 und 3 addieren, erhalten Sie 5. Wenn Sie 3 und 2 addieren, erhalten Sie ebenfalls 5. Wenn Sie 2 mit 3 multiplizieren, erhalten Sie 6. Wenn Sie 3 mit 2 multiplizieren, erhalten Sie ebenfalls 6.

Algebraische Ausdrücke treten normalerweise in einer bestimmten Reihenfolge auf, die praktisch ist, wenn Sie es mit Variablen und Koeffizienten (Multiplikatoren von Variablen) zu tun haben. Zuerst kommt der Ziffernanteil, gefolgt von den Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge. Aber die Eleganz des Kommutativgesetzes ist, dass $2xyz$ dasselbe ist wie $x2zy$. Es gibt keinen Grund, den Ausdruck in der zweiten, scheinbar durcheinander geratenen Darstellung zu schreiben, aber es ist gut zu wissen, dass Sie die Reihenfolge bei Bedarf beliebig ändern können.

Harmonie in der Gruppe – mit dem Assoziativgesetz

Wie das Kommutativgesetz (voriger Abschnitt) gilt auch das Assoziativgesetz nur für die Operationen der Addition und Multiplikation. Das *Assoziativgesetz* besagt, dass Sie die Gruppierung von Operationen verändern können, ohne dass sich dadurch das Ergebnis ändert:

$a + (b + c) = (a + b) + c$ Assoziativgesetz der Addition

$a(b \cdot c) = (a \cdot b)\, c$ Assoziativgesetz der Multiplikation

Sie können das Assoziativgesetz der Addition oder Multiplikation nutzen, um Ausdrücke zu vereinfachen. Wenn Sie dann bei Bedarf auch noch das Kommutativgesetz anwenden, haben Sie damit eine sehr mächtige Kombination an der Hand. Wenn Sie beispielsweise $(x + 14) + (3x + 6)$ vereinfachen wollen, können Sie damit anfangen, die Klammern wegzulassen (dank des Assoziativgesetzes). Anschließend vertauschen Sie die beiden mittleren

Terme unter Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition. Schließlich ordnen Sie die Terme mit Hilfe von Klammern neu an und kombinieren die zusammengehörigen Terme:

$$
\begin{aligned}
&(x + 14) + (3x + 6)\\
&= x + 14 + 3x + 6\\
&= x + 3x + 14 + 6\\
&= (x + 3x) + (14 + 6)\\
&= 4x + 20
\end{aligned}
$$

Die Schritte sind hier äußerst detailliert beschrieben. Sie haben die Aufgabe wahrscheinlich sofort im Kopf gelöst. Ich habe die Schritte so gezeigt, um zu verdeutlichen, wie Kommutativgesetz und Assoziativgesetz kombiniert werden. Jetzt können Sie sie auf komplexere Aufgabenstellungen anwenden.

Das Distributivgesetz – Werte verteilen

Das *Distributivgesetz* besagt, dass Sie jeden Term in einem Ausdruck innerhalb einer Klammer mit dem Koeffizienten außerhalb der Klammer multiplizieren können, ohne den Wert des Ausdrucks zu verändern. Sie brauchen dazu eine einzige Operation, die Multiplikation, die sich über die Terme erstreckt, die Sie addieren und subtrahieren:

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ Distributive Multiplikation über die Addition

$a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ Distributive Multiplikation über die Subtraktion

Beispielsweise können Sie das Distributivgesetz auf die Aufgabenstellung $12\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$ anwenden, um sich das Leben leichter zu machen. Sie verteilen die 12 über die Brüche, indem Sie jeden Bruch mit 12 multiplizieren, und fassen dann die Ergebnisse zusammen:

$$
\begin{aligned}
&12\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\\
&=12\cdot\frac{1}{2}+12\cdot\frac{2}{3}-12\cdot\frac{3}{4}\\
&={}^{6}\cancel{12}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_1}+{}^{4}\cancel{12}\cdot\frac{2}{\cancel{3}_1}-{}^{3}\cancel{12}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_1}\\
&=6+8-9\\
&=5
\end{aligned}
$$

Es ist viel einfacher, die Lösung mit Hilfe des Distributivgesetzes zu finden, als alle Brüche auf denselben Nenner 12 zu bringen, sie zu kombinieren und dann mit 12 zu multiplizieren.

Sie können das Distributivgesetz anwenden, um Gleichungen zu vereinfachen – mit anderen Worten, Sie können sie auf die Lösung vorbereiten. Das Gegenteil des Distributivgesetzes findet statt, wenn Sie Ausdrücke *faktorisieren*. Weitere Informationen darüber finden Sie im Abschnitt *Faktorisierungstechniken implementieren* später in diesem Kapitel.

Eine algebraische Identität

Die Zahlen 0 und 1 spielen in der Algebra eine spezielle Rolle – als neutrale Elemente. Sie verwenden die *neutralen Elemente* in der Algebra, wenn Sie Gleichungen lösen und Ausdrücke vereinfachen. Sie müssen einen Ausdruck so behandeln, dass er seinen Wert beibehält, und nur seine Form ändert – dann verwenden Sie ein neutrales Element:

$a + 0 = 0 + a = a$	Das *Neutrale Element für die Addition* ist null. Wenn Sie zu einer Zahl null addieren, ändert sich diese Zahl nicht; sie behält ihren Wert.
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	Das *neutrale Element für die Multiplikation* ist eins. Wenn Sie eine Zahl mit eins multiplizieren, ändert sich diese Zahl dadurch nicht; sie behält ihren Wert.

Anwendung des neutralen Elementes bei der Addition

Die Anwendung des neutralen Elementes bei der Addition ist beispielsweise in Situationen praktisch, wo Sie die Form eines Ausdrucks ändern wollen, um ihn zu faktorisieren. Angenommen, Sie haben den Ausdruck x^2+6x und addieren 0 hinzu. Sie erhalten x^2+6x+0, was Ihnen (und mir) nicht viel ausmacht. Aber wie wäre es, wenn Sie diese 0 durch +9 und –9 ersetzen würden? Jetzt haben Sie $x^2+6x+9-9$, was Sie auch als $(x^2+6x+9)-9$ schreiben können – und dann in $(x+3)^2-9$ faktorisieren. Aber warum sollten Sie das tun? Lesen Sie Kapitel 11, wo es um Kegelschnitte geht, dann wissen Sie, wozu es gut ist. Wenn Sie 9 addieren und subtrahieren, addieren Sie damit letztlich 0 – das additive neutrale Element.

Anwendung des neutralen Elementes bei der Multiplikation

Sie verwenden das multiplikative neutrale Element exzessiv, wenn Sie es mit Brüchen zu tun haben. Wenn Sie Brüche so umschreiben, dass Sie einen gemeinsamen Nenner erhalten, multiplizieren Sie letztlich mit 1. Wenn Sie beispielsweise wollen, dass der Bruch $\frac{7}{2x}$ den Nenner $6x$ erhält, müssen Sie sowohl den Nenner als auch den Zähler mit 3 multiplizieren:

$$\frac{7}{2x}\cdot\frac{3}{3}=\frac{21}{6x}$$

Und jetzt können Sie mit dem Bruch nach Belieben weiterarbeiten.

Die Sache mit den Inversen

In der Algebra gibt es zwei Arten von *Inversen*: additive Inverse und multiplikative Inverse. Das additive Inverse kann mit dem additiven neutralen Element verglichen werden, das multiplikative Inverse mit dem multiplikativen neutralen Element. Das additive Inverse ist mit null verknüpft, das multiplikative Inverse mit eins.

Eine Zahl und ihr additives Inverses ergeben addiert null. Eine Zahl und ihr multiplikatives Inverses ergeben das Produkt eins. Beispielsweise sind –3 und 3 additive Inverse; das multiplikative Inverse von –3 ist $-{}^{1}/_{3}$. Inverse sind vor allem dann wichtig, wenn Sie Gleichungen lösen und die Variable isolieren möchten. Sie verwenden Inverse, indem Sie sie addieren, damit null neben der Variablen steht, oder indem Sie sie multiplizieren, um eins als Multiplikator (oder Koeffizient) der Variablen zu erhalten.

Bringen Sie Ihre Operationen in die richtige Reihenfolge!

Als die Mathematiker von Wörtern auf Symbole umstiegen, um mathematische Prozesse zu beschreiben, war es ihr Ziel, die Lösung von Aufgaben so einfach wie möglich zu machen. Gleichzeitig wollten sie, dass jeder verstand, was ein bestimmter Ausdruck bedeutete, und dass jeder dieselbe Lösung für die Aufgabe erhielt. Zusammen mit der speziellen Notation entstand eine spezielle Regelmenge, die beschreibt, wie mehrere Operationen innerhalb eines einzigen Ausdrucks zu behandeln sind. Wenn Sie beispielsweise die Aufgabe $4+3^2-5\cdot 6+\sqrt{23-7}+\frac{14}{2}$ haben, müssen Sie entscheiden, wann genau Sie addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren, die Wurzel ziehen und den Exponenten berechnen.

Die *Reihenfolge der Operationen* legt die folgende Abfolge fest:

1. **Potenzieren und Wurzeln ziehen.**
2. **Multiplizieren und dividieren.**
3. **Addieren und subtrahieren.**

Falls Sie mehrere Operationen auf derselben Ebene haben, führen Sie diese von links nach rechts aus. Falls es Klammern (oder andere Gruppierungssymbole) gibt, führen Sie als Erstes die Operationen innerhalb der Klammern aus.

Um die Aufgabe aus dem oben gezeigten Beispiel zu lösen, führen Sie die Operationen in der folgenden Reihenfolge aus:

1. **Die Wurzel ist ein Gruppierungssymbol, deshalb subtrahieren Sie als Erstes, was unter der Wurzel steht: $4+3^2-5\cdot 6+\sqrt{16}+\frac{14}{2}$.**

2. **Jetzt potenzieren Sie und ziehen die Wurzel:** $4+9-5\cdot 6+4+\frac{14}{2}$.

3. **Anschließend multiplizieren und dividieren Sie:** $4+9-30+4+7$.

4. **Jetzt addieren und subtrahieren Sie von links nach rechts:** $4+9-30+4+7=-6$.

Rüsten Sie sich – mit der Multiplikationseigenschaft der Null

Sie denken vielleicht, die Multiplikation mit null sei keine große Sache. Schließlich ist alles, was Sie mit null multiplizieren, gleich null. Und genau das *ist* eine große Sache. Sie können die Multiplikationseigenschaft von null ausnutzen, wenn Sie Gleichungen lösen. Wenn Sie eine Gleichung faktorisieren können – mit anderen Worten, wenn Sie sie als Produkt von zwei oder mehr Multiplikatoren schreiben können –, können Sie die Multiplikationseigenschaft von null anwenden, um die Gleichung zu lösen. Die *Multiplikationseigenschaft von null* besagt Folgendes:

Wenn das Produkt von $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f = 0$ ist, dann ist mindestens einer der Faktoren der Gleichung gleich 0.

Die einzige Möglichkeit, wie das Produkt von zwei oder mehr Termen gleich null sein kann, ist, wenn mindestens einer der Terme gleich null ist. Wenn Sie (16)(467)(11)(9)(0) multiplizieren, erhalten Sie das Ergebnis 0. Dabei spielt es keine Rolle, wie die anderen Zahlen aussehen – die Null ist immer dominant.

Warum diese Eigenschaft so praktisch bei der Lösung von Gleichungen ist, sehen Sie gleich. Wenn Sie beispielsweise die Gleichung $x^7-16x^5+5x^4-80x^2=0$ lösen wollen, müssen Sie die Zahl finden, für die das x steht, um die Gleichung zu einer wahren Aussage zu machen. Die hier gezeigte Gleichung kann faktorisiert werden: $x^2(x^3+5)(x-4)(x+4)=0$. Das Produkt der vier gezeigten Faktoren ist gleich null. Ist beispielsweise $x = 4$, ist damit der dritte Faktor 0, und das gesamte Produkt ist null. Auch wenn x gleich null ist, ist das gesamte Produkt gleich null. (Weitere Informationen über die Faktorisierung und die Ausnutzung der Multiplikationseigenschaft von null zur Lösung von Gleichungen finden Sie in den Kapiteln 3 und 8.)

Die Geburt der negativen Zahlen

In den Anfangstagen der Algebra stellten die negativen Zahlen keine akzeptierte Größe dar. Die Mathematiker hatten es schwer, zu erklären, was diese Zahlen bedeuten; es war zu schwierig, konkrete Beispiele aufzuzeigen. Einer der ersten Mathematiker, der negative Zahlen einsetzte, war Fibonacci, ein italienischer Mathematiker. Als er an einem Finanzproblem arbeitete, erkannte er, dass er das von ihm als negative Zahl bezeichnete Konstrukt benötigte, um das Problem zu lösen. Er beschrieb es als Verlust und sagte: »Ich habe gezeigt, dass diese Aufgabe unlösbar ist, es sei denn, man geht davon aus, dass der Mann eine Schuld hatte.«

Weiter zu den Exponentialregeln

Vor mehreren hundert Jahren führten die Mathematiker Potenzen von Variablen und Zahlen ein und bezeichneten sie als *Exponenten*. Die Verwendung von Exponenten war jedoch nicht sofort allgemein üblich. Die Gelehrten auf der ganzen Welt mussten überzeugt werden; irgendwann gewann jedoch die kurze, elegante Notation der Exponenten und wir profitieren noch heute davon. Statt *xxxxxxxx* zu schreiben, verwenden Sie einfach den Exponenten 8 und schreiben x^8. Diese Form ist leichter lesbar und sehr viel schneller zu schreiben.

Der Ausdruck a^n ist ein Exponentialausdruck mit der *Basis a* und dem *Exponenten n*. Das n besagt, wie oft das a mit sich selbst multipliziert werden soll.

Mit Hilfe von *Wurzelzeichen* stellen Sie Wurzeln dar. Wenn Sie $\sqrt{16}$ sehen, wissen Sie, dass nach der Zahl gesucht wird, die mit sich selbst multipliziert 16 ergibt. Die Lösung? 4 natürlich. Mit einem kleinen Index vor dem Wurzelzeichen kennzeichnen Sie eine dritte Wurzel, vierte Wurzel usw. Beispielsweise ist $\sqrt[4]{81} = 3$, weil die Zahl 3 viermal mit sich selbst multipliziert 81 ergibt. Sie können die Wurzelzeichen auch durch Brüche im Exponenten ersetzen – wodurch sie einfacher zu kombinieren sind. Dieses Exponentensystem ist sehr systematisch und praktisch – dank der Mathematiker, die vor uns lebten.

Exponenten multiplizieren und dividieren

Wenn zwei Zahlen oder Variablen dieselbe Basis haben, können Sie diese Zahlen oder Variablen multiplizieren oder dividieren, indem Sie ihre Exponenten addieren oder subtrahieren:

- ✔ $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$: Wenn Sie Zahlen mit derselben Basis multiplizieren, addieren Sie die Exponenten.
- ✔ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$: Wenn Sie Zahlen mit derselben Basis dividieren, subtrahieren Sie die Exponenten (Zähler – Nenner).

Um beispielsweise $x^4 \cdot x^5$ zu berechnen, addieren Sie die Exponenten: $x^{4+5} = x^9$. Wenn Sie x^8 durch x^5 dividieren, subtrahieren Sie die Exponenten: $\frac{x^8}{x^5} = x^{8-5} = x^3$.

Achten Sie darauf, dass die Basis der Ausdrücke gleich sein muss. Sie können 3^2 und 3^4 auf diese Weise kombinieren, aber Sie können diese Regeln nicht für Exponenten unterschiedlicher Basiswerte anwenden, wie etwa 3^2 und 4^3.

Hinunter zu den Wurzeln der Exponenten

Wurzelausdrücke – Quadratwurzeln, Kubikwurzeln, vierte Wurzeln usw. – verwenden ein Wurzelzeichen. Eine andere Möglichkeit, diese Werte darzustellen, sind Brüche im Exponenten. Es ist einfacher, Variablen mit derselben Basis zu kombinieren, wenn sie Bruchexponenten statt Wurzeln verwenden:

- ✔ $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$: Die Wurzel geht in den Nenner des Bruchexponenten.
- ✔ $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$: Die Wurzel geht in den Nenner des Bruchexponenten, die Potenz geht in den Zähler.

Sie können also sagen $\sqrt{x} = x^{1/2}, \sqrt[3]{x} = x^{1/3}, \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ usw., oder $\sqrt[5]{x^3} = x^{3/5}$. Um einen Wurzelausdruck wie etwa $\frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[6]{x^{11}}}{\sqrt[2]{x^3}}$ zu vereinfachen, formen Sie die Wurzelzeichen in Exponenten um und wenden die Regeln für Multiplikation und Division von Werten mit derselben Basis an (siehe voriger Abschnitt):

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[4]{x}\,\sqrt[6]{x^{11}}}{\sqrt[2]{x^3}} &= \frac{x^{1/4} + x^{11/6}}{x^{3/2}} \\
&= \frac{x^{1/4+11/6}}{x^{3/2}} = \frac{x^{3/12+22/12}}{x^{18/12}} \\
&= \frac{x^{25/12}}{x^{18/12}} = x^{25/12-18/12} \\
&= x^{7/12}
\end{aligned}
$$

Wurzeln ziehen, um die Potenz zu verändern

Sie können Zahlen oder Variablen mit Exponenten in höhere Potenzen erheben oder sie auf niedrigere Potenzen reduzieren, indem Sie Wurzeln ziehen. Wenn Sie eine Potenz in eine Potenz erheben, multiplizieren Sie die Exponenten. Wenn Sie die Wurzel einer Potenz ziehen, dividieren Sie die Exponenten:

- ✔ $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$: Sie erheben eine Potenz in eine Potenz, indem Sie die Exponenten multiplizieren.
- ✔ $\sqrt[m]{a^n} = \left(a^n\right)^{1/m} = a^{n/m}$: Sie reduzieren die Potenz, wenn Sie eine Wurzel ziehen, indem Sie die Exponenten dividieren.

Die zweite Regel kommt Ihnen vielleicht bekannt vor – es handelt sich um eine der Regeln, die für die Umformung von Wurzeln in Bruchexponenten zuständig ist (weitere Informationen über Wurzeln und Bruchexponenten finden Sie in Kapitel 4).

Das nachfolgende Beispiel zeigt, wie Sie die beiden Regeln beim Vereinfachen eines Ausdrucks anwenden:

$$\sqrt[3]{\left(x^4\right)^6 \cdot x^9} = \sqrt[3]{x^{24} \cdot x^9} = \sqrt[3]{x^{33}} = x^{33/3} = x^{11}$$

Der freundliche Umgang mit negativen Exponenten

Sie verwenden negative Exponenten, um damit anzuzeigen, dass eine Zahl oder eine Variable in den Nenner des Terms gehört:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

Wenn Sie Variablen mit negativem Exponenten darstellen, können Sie diese Variablen mit anderen Variablen derselben Basis kombinieren. Wenn Sie beispielsweise den Ausdruck $\frac{1}{x^4} \cdot x^7 \cdot \frac{3}{x}$ haben, können Sie die Brüche unter Verwendung negativer Exponenten umschreiben, und vereinfachen dann, indem Sie die Regeln für die Multiplikation von Faktoren derselben Basis anwenden (siehe Abschnitt *Exponenten multiplizieren und dividieren*):

$$\frac{1}{x^4} \cdot x^7 \cdot \frac{3}{x} = x^{-4} \cdot x^7 \cdot 3x^{-1} = 3x^{-4+7-1} = 3x^2$$

Faktorisierungstechniken implementieren

Beim Faktorisieren eines algebraischen Ausdrucks formen Sie die Summen und Differenzen der Terme in ein Produkt um. Beispielsweise können Sie die drei Terme $x^2 - x - 42$ in faktorisierter Form als $(x-7)(x+6)$ umschreiben. Der Ausdruck, der zuvor aus drei Termen bestand, wird zu einem großen, zusammenmultiplizierten Term. Sie können zwei Terme, drei Terme, vier Terme usw. faktorisieren – für die unterschiedlichsten Zwecke. Die Faktorisierung ist dann praktisch, wenn Sie die faktorisierten Formen gleich null setzen, um eine Gleichung zu lösen. Faktorisierte Zähler und Nenner in Brüchen ermöglichen, die Brüche zu kürzen.

Sie können sich die Faktorisierung als das Gegenteil des Einmultiplizierens vorstellen. Es gibt gute Gründe, etwas einzumultiplizieren oder mit einem Wert durchzumultiplizieren – dieses Verfahren ermöglicht Ihnen, ähnliche Terme zu kombinieren und Ausdrücke zu vereinfachen. Die Ausklammerung eines gemeinsamen Faktors ist ebenfalls wichtig für die Lösung von Gleichungen und das Kombinieren von Brüchen. Die daraus entstehenden Formate sind äquivalent – sie haben einfach nur unterschiedliche Verwendungszwecke.

Zwei Terme faktorisieren

Wenn ein algebraischer Ausdruck zwei Terme hat, gibt es vier verschiedene Auswahlmöglichkeiten für die Faktorisierung – Sie können den gesamten Ausdruck faktorisieren. Wenn Sie die vier folgenden Methoden ausprobieren und keine von ihnen funktioniert, können Sie Ihren Versuch aufgeben – in diesem Fall kann der Ausdruck einfach nicht faktorisiert werden:

$ax + ay = a(x + y)$	Größter gemeinsamer Faktor
$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$	Differenz zweier perfekter Quadrate
$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$	Differenz zweier perfekter Kubikausdrücke
$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$	Summe zweier perfekter Kubikausdrücke

Im Allgemeinen sollten Sie nach dem größten gemeinsamen Faktor suchen, bevor Sie die anderen Methoden ausprobieren. Wenn Sie den gemeinsamen Faktor ausklammern, machen Sie die Zahlen häufig kleiner und übersichtlicher, wodurch Sie besser erkennen, ob eine weitere Faktorisierung erforderlich ist.

Um beispielsweise den Ausdruck $6x^4 - 6x$ zu faktorisieren, klammern Sie zuerst den gemeinsamen Faktor aus, $6x$, und wenden dann das Muster für die Differenz zweier perfekter Kubikausdrücke an:

$$\begin{aligned}6x^4 - 6x &= 6x(x^3 - 1)\\ &= 6x(x-1)(x^2 + x + 1)\end{aligned}$$

Ein *quadratisches Trinom* ist ein Polynom aus drei Termen, wobei ein Term in die zweite Potenz erhoben ist. Wenn Sie etwas wie $x^2 + x + 1$ sehen (wie es in diesem Fall ist), untersuchen Sie sofort die Möglichkeiten, es in das Produkt zweier Binome zu faktorisieren. Sie können einfach aufhören. Die Trinome, die bei der Faktorisierung von Kubikwerten auftreten, sind überhaupt nicht kooperativ.

Denken Sie an meinen Tipp, in Aufgabenstellungen als Erstes nach dem größten gemeinsamen Faktor zu suchen. Betrachten Sie beispielsweise den Ausdruck $48x^3y^2 - 300x^3$. Wenn Sie den Ausdruck faktorisieren, ziehen Sie zuerst den gemeinsamen Faktor heraus, $12x^3$, und erhalten dann $12x^3(4y^2 - 25)$. Anschließend faktorisieren Sie die Differenz perfekter Quadrate innerhalb der Klammern: $48x^3y^2 - 300x^3 = 12x^3(2y-5)(2y+5)$.

Und noch ein Beispiel: Der Ausdruck $z^4 - 81$ ist die Differenz zweier perfekter Quadrate. Wenn Sie ihn faktorisieren, erhalten Sie $z^4 - 81 = (z^2 - 9)(z^2 + 9)$. Beachten Sie, dass der erste Faktor ebenfalls die Differenz zweier Quadrate darstellt – Sie können erneut faktorisieren. Der zweite Term dagegen ist die Summe von Quadraten – Sie können nicht faktorisieren. Bei perfekten Kubiktermen können Sie sowohl Differenzen als auch Summen faktorisieren, bei Quadraten dagegen nicht. Die Faktorisierung von $z^4 - 81$ ist also $(z-3)(z+3)(z^2+9)$.

Und jetzt mit drei Termen

Wenn ein quadratischer Ausdruck drei Terme hat, also *trinomial* ist, haben Sie zwei Möglichkeiten, ihn zu faktorisieren. Eine Methode ist, einen größten gemeinsamen Faktor auszuklammern, die andere ist es, zwei Binome zu finden, deren Produkt identisch mit diesen drei Termen ist:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$ Größter gemeinsamer Faktor

$x^{2n} + (a + b)\,x^n + ab = (x^n + a)(x^n + b)$ Zwei Binome

Häufig ist es ganz einfach, den größten gemeinsamen Faktor zu erkennen. Sie sehen ein Vielfaches irgendeiner Zahl oder Variablen in jedem Term. Bei dem Produkt von zwei Binomen müssen Sie ein bisschen probieren, bis Sie das Produkt finden – oder sich sicher sind, dass es nicht existiert.

Beispielsweise können Sie die Faktorisierung von $6x^3 - 15x^2y + 24xy^2$ durchführen, indem Sie jeden dieser Terme durch den ihnen gemeinsamen Faktor $3x$ dividieren: $6x^3 - 15x^2y + 24xy^2 = 3x(2x^2 - 5xy + 8y^2)$.

Sie sollten immer zuerst nach dem gemeinsamen Faktor suchen; im Allgemeinen ist es einfacher, Ausdrücke zu faktorisieren, wenn die Zahlen kleiner sind. Im obigen Beispiel können Sie nur den gemeinsamen Faktor herausziehen – das Trinom ist *prim* (Sie können es nicht weiter faktorisieren).

Trinome, die in das Produkt aus zwei Binomen faktorisiert werden können, haben verwandte Potenzen für die Variablen in zwei Termen. Die Beziehung zwischen den Potenzen ist, dass die eine das Doppelte der anderen ist. Wenn Sie ein Trinom in das Produkt von zwei Binomen faktorisieren, überprüfen Sie zuerst, ob Sie ein spezielles Produkt haben: ein perfektes quadratisches Trinom. Ist das nicht der Fall, können Sie weitermachen, indem Sie das Verfahren rückgängig machen, wobei jeder Term mit jedem Term multipliziert wurde. Ich führe hier ein Akronym ein, das Ihnen helfen soll, sich die Reihenfolge bei der Multiplikation von Binomen zu merken: E-Ä-I-L (erstes, äußeres, inneres, letztes Produkt). Das Rückgängigmachen von E-Ä-I-L (also der Multiplikation jedes Terms mit jedem Term) hilft Ihnen, das Produkt dieser Binome zu faktorisieren.

Perfekte quadratische Trinome finden

Ein *perfektes quadratisches Trinom* ist ein Ausdruck aus drei Termen, die aus der Quadrierung eines Binoms entstehen – wenn es mit sich selbst multipliziert wird. Perfekte quadratische Trinome sind relativ einfach zu erkennen – ihre ersten und letzten Terme sind perfekte Quadrate, und der mittlere Term ist das doppelte Produkt der Wurzeln des ersten und letzten Terms:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Um beispielsweise $x^2 - 20x + 100$ zu faktorisieren, sollten Sie zuerst erkennen, das $20x$ das doppelte Produkt der Wurzel von x^2 und der Wurzel von 100 ist; die Faktorisierung lautet also $(x - 10)^2$. Ein Ausdruck, der nicht ganz so offensichtlich ist, ist $25y^2 + 30y + 9$. Sie sehen, dass der erste und der letzte Term perfekte Quadrate sind. Die Wurzel von $25y^2$ ist $5y$, und die Wurzel von 9 ist 3. Der mittlere Term, $30y$, ist das doppelte Produkt von $5y$ und 3, Sie haben also ein perfektes quadratisches Trinom, das in $(5y + 3)^2$ faktorisiert werden kann.

Der Ausweg – die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term rückgängig machen

Wenn Sie ein Trinom faktorisieren, das aus der Multiplikation zweier Binome entsteht (Reihenfolge E-Ä-I-L, siehe oben), müssen Sie Detektiv spielen und die Teile des Puzzles zusammensetzen. Betrachten Sie das folgende verallgemeinerte Produkt von Binomen und das erkennbare Muster:

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$$

Wo also kommt das E-Ä-I-L (die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term, siehe oben) ins Spiel? Sie müssen ein E-Ä-I-L durchführen, bevor Sie es rückgängig machen können, oder?

Das E in E-Ä-I-L steht für »Erste«. In der obigen Aufgabenstellung sind die ersten Terme ax und cx. Sie multiplizieren diese beiden Terme und erhalten acx^2. Die äußeren Terme sind ax und d. Sie haben das ax zwar schon verwendet, aber jedem der Terme sind zwei verschiedene Namen zugeordnet. Die inneren Terme sind b und cx; die äußeren und inneren Produkte sind adx und bcx. Sie addieren diese beiden Werte. (Keine Sorge: Wenn Sie mit Zahlen rechnen, kann das Ganze wunderbar kombiniert werden.) Die letzten Terme, b und d, ergeben das Produkt bd. Hier ein reales Beispiel, das E-Ä-I-L für die Multiplikation verwendet – wobei Zahlen statt Buchstaben als Koeffizienten eingesetzt werden:

$$(4x + 3)(5x - 2) = 20x^2 - 8x + 15x - 6 = 20x^2 + 7x - 6$$

Jetzt stellen Sie sich vor, dass jedes quadratische Trinom die Form $acx^2 + (ad + bc)\,x + bd$ hat. Der Koeffizient des Terms x^2, ac, ist das Produkt der Koeffizienten der beiden x-Terme in den Klammern. Der letzte Term, bd, ist das Produkt der beiden zweiten Terme in den Klammern. Der Koeffizient des mittleren Terms ist die Summe des inneren und des äußeren Produkts. Um diese Trinome in das Produkt zweier Binome zu faktorisieren, müssen Sie das Gegenteil von E-Ä-I-L (also der Multiplikation jedes Terms mit jedem Term) anwenden.

Hier die grundlegenden Schritte, wie Sie die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term (E-Ä-I-L) für ein Trinom rückgängig machen:

1. **Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei Zahlen multiplizieren können, um *ac* zu erhalten, den Koeffizienten des quadrierten Terms.**
2. **Bestimmen Sie alle Möglichkeiten, wie Sie zwei Zahlen multiplizieren können, um *bd* zu erhalten, den konstanten Term.**
3. **Wenn der letzte Term positiv ist, suchen Sie die Kombination aus Faktoren aus den Schritten 1 und 2, deren *Summe* gleich diesem mittleren Term ist; ist der letzte Term negativ, suchen Sie eine Kombination aus Faktoren, die eine Differenz darstellen.**
4. **Ordnen Sie Ihre Auswahl als Binome so an, dass die Faktoren korrekt aufgelistet sind.**
5. **Fügen Sie die Zeichen + und – ein, um die Faktorisierung zu beenden, und sorgen Sie dafür, dass das Vorzeichen des mittleren Terms korrekt ist.**

Wenn Sie die Faktoren in den Binomen anordnen, gibt es keine Vorgaben für positive oder negative Vorzeichen im Muster für das Rückgängigmachen von E-Ä-I-L – Sie sorgen auf andere Weise für den Vorzeichen-Teil. Die möglichen Anordnungen der Vorzeichen sind in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben. (Eine genauere Erklärung der Multiplikation jedes Terms mit jedem Term (E-Ä-I-L) und wie Sie sie rückgängig machen, finden Sie in *Algebra für Dummies*, Wiley-VCH Verlag.)

Die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term rückgängig machen: + +

Eine der Vorzeichenkonstellationen, die Ihnen bei der Faktorisierung von Trinomen begegnet, trennt alle Terme durch positive Vorzeichen (+).

Weil der letzte Term im Beispiel-Trinom, *bd*, positiv ist, enthalten die beiden Binome dieselben Operation – das Produkt zweier positiver Terme ist positiv, und das Produkt zweier negativer Terme ist positiv.

Um beispielsweise $x^2 + 9x + 20$ zu faktorisieren, müssen Sie zwei Terme finden, deren Produkt gleich 20 und deren Summe gleich 9 ist. Der Koeffizient des quadrierten Terms ist 1, Sie müssen also keine anderen Faktoren in Betracht ziehen. Sie können die Zahl 20 mit $1 \cdot 20$, $2 \cdot 10$ oder $4 \cdot 5$ erzeugen. Sie wählen das letzte Paar, weil $4 + 5 = 9$. Wenn Sie die Faktoren und die x in zwei Binomen anordnen, erhalten Sie $x^2 + 9x + 20 = (x + 4)(x + 5)$.

Die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term rückgängig machen: – +

Eine zweite Vorzeichenkonstellation in einem Trinom hat eine Subtraktionsoperation oder ein negatives Vorzeichen vor dem mittleren Term und einen positiven letzten Term. Die beiden Binome in der Faktorisierung eines solchen Trinoms haben jeweils eine Subtraktion als Operation.

Der Schlüssel, nach dem Sie suchen, ist die Summe des äußeren und des inneren Produkts, weil die Vorzeichen gleich sein müssen.

Angenommen, Sie wollen das Trinom $3x^2 - 25x + 8$ faktorisieren. Sie suchen zunächst nach den Faktoren von 3; Sie finden nur einen, $1 \cdot 3$. Außerdem suchen Sie nach den Faktoren von 8 und erhalten $1 \cdot 8$ und $2 \cdot 4$. Ihre einzige Auswahlmöglichkeit für die ersten Terme im Binom ist $(1x \quad)(3x \quad)$. Jetzt wählen Sie entweder die 1 und die 8 oder die 2 und die 4 aus, damit das äußere und das innere Produkt die Summe von 25 ergeben, wenn Sie die Zahlen in die jeweils zweite Position der Binome einsetzen. Wenn Sie 1 und 8 verwenden, lassen Sie $3x$ die 8 und $1x$ die 1 multiplizieren – und erhalten Ihre Summe von 25. $3x^2 - 25x + 8 = (x - 8)(3x - 1)$. Sie brauchen den Koeffizienten 1 für das erste x nicht zu schreiben – er wird implizit vorausgesetzt.

Die Multiplikation jedes Terms mit jedem Term rückgängig machen: + – oder – –

Wenn der letzte Term in einem Trinom negativ ist, müssen Sie nach einer Differenz zwischen den Produkten suchen. Wenn Sie beispielsweise $x^2 + 2x - 24$ faktorisieren oder $6x^2 - x - 12$, müssen die Operationen in den beiden Binomen in dem einen positiv und im anderen negativ sein. Umgekehrte Vorzeichen erzeugen mindestens einen negativen Term.

Um $x^2 + 2x - 24$ zu faktorisieren, brauchen Sie zwei Zahlen, deren Produkt gleich 24 und deren Differenz gleich 2 ist. Die Faktoren von 24 sind $1 \cdot 24$, $2 \cdot 12$, $3 \cdot 8$ oder $4 \cdot 6$. Der erste Term hat den Koeffizienten 1, Sie können sich also auf die Faktoren von 24 konzentrieren. Das gesuchte Paar ist $4 \cdot 6$. Schreiben Sie die Binome mit den x und mit 4 und 6; Sie können bis zum Ende dieses Prozesses warten, bis Sie die Vorzeichen einsetzen. Sie stellen fest, dass die richtige Anordnung $(x \quad 4)(x \quad 6)$ ist. Sie wollen, dass die Differenz zwischen dem äußeren und dem inneren Produkt positiv ist, deshalb soll die 6 positiv und die 4 negativ sein. Wenn Sie die Faktorisierung jetzt formulieren, erhalten Sie $x^2 + 2x - 24 = (x - 4)(x + 6)$.

Die Faktorisierung von $6x^2 - x - 12$ ist etwas schwieriger, weil Sie sowohl die Faktoren von 6 als auch die Faktoren von 12 berücksichtigen müssen. Die Faktoren von 6 sind $1 \cdot 6$ oder $2 \cdot 3$, und die Faktoren von 12 sind $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$ und $3 \cdot 4$. Ich kann Ihnen beim besten Willen keine magische Methode verraten, die beste Kombination zu wählen. Sie brauchen Erfahrung und ein wenig Glück. Aber wenn Sie alle möglichen Kombinationen aufschreiben, können Sie schon diejenigen streichen, die nicht funktionieren. Sie könnten mit dem Faktor 2 und 3 für die 6 anfangen. Die Binome sind $(2x \quad)(3x \quad)$. Setzen Sie noch keine Vorzeichen ein, bis der Prozess abgeschlossen ist. Jetzt suchen Sie unter Verwendung der Faktoren von 12 nach einer Paarung, die eine Differenz von 1 zwischen dem äußeren und dem inneren Produkt ergibt. Probieren Sie das Produkt von $3 \cdot 4$, und kombinieren Sie die 3 mit $3x$ und die 4 mit $2x$. Bingo! Sie haben es! Sie brauchen $(2x \quad 3)(3x \quad 4)$. Sie multiplizieren die 3 mit $3x$, weil sie sich in unterschiedlichen Klammern befinden – nicht innerhalb derselben. Die Differenz muss außerdem negativ sein, deshalb können Sie das negative Vorzeichen vor die 3 im ersten Binom schreiben: $6x^2 - x - 12 = (2x - 3)(3x + 4)$.

Vier oder mehr Terme durch Gruppierung faktorisieren

Wenn Sie vier oder mehr Terme haben, die einen Ausdruck bilden, stehen Sie bei der Faktorisierung größeren Problemen gegenüber. Wie bei einem Ausdruck mit weniger Termen suchen Sie als Erstes immer nach einem größten gemeinsamen Faktor. Wenn Sie keinen Faktor finden, den alle Terme gemeinsam haben, können Sie eine *Gruppierung* vornehmen. Für die Gruppierung betrachten Sie jeweils zwei Terme und suchen für jedes der Paare einzeln nach gemeinsamen Faktoren. Nach der Faktorisierung erkennen Sie, ob die neuen Gruppierungen einen gemeinsamen Faktor haben. Die beste Erklärung ist die Faktorisierung anhand eines Beispiels, nämlich zuerst für $x^3 - 4x^2 + 3x - 12$ und dann für $xy^2 - 2y^2 - 5xy + 10y - 6x + 12$.

Die vier Terme $x^3 - 4x^2 + 3x - 12$ haben keinen gemeinsamen Faktor. Die beiden ersten Terme haben jedoch den gemeinsamen Faktor x^2, und die beiden letzten Terme haben den gemeinsamen Faktor 3:

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = x^2(x - 4) + 3(x - 4)$$

Beachten Sie, dass Sie jetzt zwei Terme haben, nicht vier, und dass beide den Faktor $(x - 4)$ haben. Wenn Sie jetzt $(x - 4)$ aus jedem Term ausklammern, erhalten Sie $(x - 4)(x^2 + 3)$.

Die Faktorisierung durch Gruppierung funktioniert nur dann, wenn ein neuer gemeinsamer Faktor auftaucht – und zwar in jedem Term derselbe.

Die sechs Terme $xy^2 - 2y^2 - 5xy + 10y - 6x + 12$ haben keinen gemeinsamen Faktor, aber wenn Sie jeweils zwei gleichzeitig betrachten, können Sie die Faktoren y^2, $-5y$ und -6 herausziehen. Mit Faktorisierung durch Gruppierung erhalten Sie:

$$xy^2 - 2y^2 - 5xy + 10y - 6x + 12 = y^2(x - 2) - 5y(x - 2) - 6(x - 2)$$

Die drei neuen Terme haben den gemeinsamen Faktor $(x - 2)$, die Faktorisierung wird also zu $(x - 2)(y^2 - 5y - 6)$. Das Trinom, das Sie erzeugen, eignet sich wie von selbst für die Faktorisierung, bei der die Multiplikation von jedem Term mit jedem Term (E-Ä-I-L) rückgängig gemacht wird (siehe obiger Abschnitt):

$$(x - 2)(y^2 - 5y - 6) = (x - 2)(y - 6)(y + 1)$$

Faktorisiert und fertig!