

Inhaltsverzeichnis

<i>Einleitung</i>	19
Über dieses Buch	19
Konventionen in diesem Buch	20
Törichte Annahmen über den Leser	20
Wie dieses Buch strukturiert ist	21
Teil I: Grundlegende Lösungsansätze	21
Teil II: Die ganze Wahrheit über Funktionen	22
Teil III: Der ewige Kampf mit Kegelschnitten und Gleichungssystemen	22
Teil IV: Fortgeschrittene Konzepte – die Turbozuschaltung	22
Teil V: Der Top-Ten-Teil	22
Die Symbole in diesem Buch	23
Wie es weitergeht	24
<i>Teil I</i>	
<i>Grundlegende Lösungsansätze</i>	25
<i>Kapitel 1</i>	
<i>Am Anfang stand ... die Algebra</i>	27
Algebraische Eigenschaften – eine Skizze	28
Bewahren Sie Ordnung – mit dem Kommutativgesetz	28
Harmonie in der Gruppe – mit dem Assoziativgesetz	28
Das Distributivgesetz – Werte verteilen	29
Eine algebraische Identität	30
Die Sache mit den Inversen	31
Bringen Sie Ihre Operationen in die richtige Reihenfolge!	31
Rüsten Sie sich – mit der Multiplikationseigenschaft der Null	32
Weiter zu den Exponentialregeln	33
Exponenten multiplizieren und dividieren	33
Hinunter zu den Wurzeln der Exponenten	33
Wurzeln ziehen, um die Potenz zu verändern	34
Der freundliche Umgang mit negativen Exponenten	35
Faktorisierungstechniken implementieren	35
Zwei Terme faktorisieren	35
Und jetzt mit drei Termen	36
Vier oder mehr Terme durch Gruppierung faktorisieren	40

Kapitel 2	
Der gerade Weg: Lineare Gleichungen	43
Lineare Gleichungen: Der erste Grad	43
Der Umgang mit grundlegenden linearen Gleichungen	44
Brüche entfernen	45
Unterschiedliche Unbekannte isolieren	45
Lineare Ungleichungen: Beziehungstherapie in der Algebra	47
Grundlegende Ungleichungen lösen	48
Einführung der Intervallnotation	49
Zusammengesetzte Ungleichungen	50
Absolutwerte – Absolut!	51
Absolutwertgleichungen lösen	52
Weiter mit den Absolutwertungleichungen	53
Kapitel 3	
Quadratische Gleichungen knacken	57
Einfache quadratische Gleichungen mit der Quadratwurzelregel lösen	58
Einfache Quadratwurzellösungen finden	58
Quadratwurzellösungen erzwingen	58
Quadratische Gleichungen in Faktoren zerlegen	59
Binome faktorisieren	59
Trinome faktorisieren	61
Faktorisieren durch Gruppieren	62
Der Ausweg über die Quadratformel	63
Irrationale Lösungen ausbügeln	64
Große quadratische Ergebnisse formulieren	65
Vervollständigen wir das Quadrat: Die Vorbereitung auf Kegelschnitte	66
Quadrieren, um eine quadratische Gleichung zu lösen	67
Das Quadrat zweimal vervollständigen	68
Und jetzt zu höher potenzierten Quadraten	69
Summen oder Differenzen von Kubikausdrücken	70
Quadratartige Trinome	71
Quadratische Ungleichungen lösen	72
Bleiben wir beim Quadratischen!	73
Und jetzt zu den Brüchen	74
Wir steigern die Anzahl der Faktoren	75
Kapitel 4	
Weg mit Wurzeln, Brüchen und allem Negativem!	77
Bleiben Sie bei Gleichungen mit Brüchen rational!	77
Der kgN gegen rationale Gleichungen	78
Rationale Gleichungen mit Proportionen lösen	82
Machen Sie sich frei von Wurzeln!	85
Beide Seiten einer Wurzelgleichung quadrieren	86
Zwei Wurzeln ausgleichen	87

Keine Vorurteile gegenüber Exponenten!	89
Negative Exponenten werden rausgeschubst!	89
Negative faktorisieren, um Gleichungen zu lösen	90
Die Fummelei mit Bruchexponenten	93
Terme mit Bruchexponenten zusammenfassen	93
Bruchexponenten faktorisieren	93
Gleichungen durch Anwendung von Bruchexponenten lösen	94
Kapitel 5	
Mit Graphen ins Glück	97
Koordinierte Arbeit mit Graphen!	97
Die Bestandteile der Koordinatenebene	98
Von Punkt zu Punkt	99
Mit Schnittpunkten und Symmetrien einfache Graphen zeichnen	100
x - und y -Schnittpunkte finden	100
Über die Symmetrie eines Graphen ...	101
Geraden zeichnen	104
Die Steigung einer Geraden ermitteln	104
Zwei Arten von Geradengleichungen	105
Parallele und senkrecht aufeinanderstehende Geraden identifizieren	108
Die zehn grundlegenden Formen	109
Geraden und quadratische Ausdrücke	109
Kubik- und biquadratische Ausdrücke	110
Wurzeln und rationale Ausdrücke	111
Exponential- und logarithmische Kurven	112
Absolutwerte und Kreise	112
Aufgaben mit einem grafischen Taschenrechner lösen	113
Gleichungen korrekt in grafische Taschenrechner eingeben	113
Das Zeichenfenster	115
Teil II	
Die ganze Wahrheit über Funktionen	117
Kapitel 6	
Funktionen – die Fakten	119
Funktionen definieren	119
Die Funktionsnotation	120
Funktionen auswerten	120
Was es mit Definitions- und Wertebereich auf sich hat	121
Den Definitionsbereich einer Funktion bestimmen	121
Den Wertebereich einer Funktion beschreiben	122
Gerade und ungerade Funktionen	123
Gerade und ungerade Funktionen erkennen	124
Die Graphen gerader und ungerader Funktionen	125

1:1-Gegenüberstellungen	125
1:1-Funktionen – eine Definition	126
1:1-Verletzungen eliminieren	126
Stückweise mit stückweisen Funktionen arbeiten	128
Stückwerk	128
Stückweise Funktionen anwenden	129
Sammeln Sie sich – und setzen Sie die Funktionen zusammen	131
Verknüpfungen	131
Den Differenzquotienten vereinfachen	132
Viel Spaß mit inversen Funktionen	133
Feststellen, ob Funktionen Inverse sind	133
Nach den Inversen einer Funktion auflösen	134

Kapitel 7

Quadratische Funktionen skizzieren und interpretieren **137**

Die Standardform quadratischer Gleichungen interpretieren	137
Wir beginnen mit dem »a« der Standardform	138
Weiter geht's mit »b« und »c«	139
Schnittpunkte in quadratischen Gleichungen untersuchen	139
Den einzigen y -Schnittpunkt finden	140
Die x -Schnittpunkte finden	141
Zu den Extremen: Den Scheitelpunkt finden	144
Immer der Symmetrieachse nach	145
Aus der verfügbaren Information einen Graphen skizzieren	146
Quadratische Funktionen im wirklichen Leben	148
Kerzen verkaufen	148
Körbe werfen	149
Wasserbomben werfen	151

Kapitel 8

Wir bleiben bei den Kurven: Polynome **153**

Die Standard-Polynomform	153
Die Schnittpunkte und Wendepunkte von Polynomen	154
Relative Werte und absolute Werte interpretieren	154
Schnittpunkte und Wendepunkte zählen	155
Nach Polynom-Schnittpunkten auflösen	157
Positive und negative Intervalle bestimmen	158
Eine Vorzeichenzeile verwenden	158
Die Vorschrift interpretieren	160
Die Lösungen eines Polynoms finden	161
Nach Polynom-Lösungen faktorisieren	161
Bleiben Sie ruhig: Der Satz zur Bestimmung rationaler Nullstellen	164
Lassen Sie sich von Descartes mit den Vorzeichen helfen	167

Der synthetische Lösungsansatz	169
Mit Hilfe der synthetischen Division Lösungen suchen	169
Synthetisch durch ein Binom dividieren	172
Der Restsatz	172
Kapitel 9	
<i>Vom Verstand geleitet: Rationale Funktionen</i>	175
Rationale Funktionen erkunden	175
Definitionsbereiche erweitern	176
Schnittpunkte einführen	176
Asymptoten für das Rationale	177
Die Gleichungen vertikaler Asymptoten bestimmen	178
Die Gleichungen horizontaler Asymptoten bestimmen	178
Vertikale und horizontale Asymptoten in Graphen eintragen	179
Zahlen knacken und schräge Asymptoten zeichnen	180
Entfernbarke Unstetigkeiten	181
Entfernen durch Faktorisieren	182
Die Einschränkungen für das Entfernen	182
Entfernbarke Unstetigkeiten in einem Graphen zeigen	182
Die Grenzen rationaler Funktionen verschieben	184
Grenzwerte und Unstetigkeiten auswerten	185
Hin zur Unendlichkeit	187
Rationale Grenzwerte im Unendlichen erwischen	189
Und jetzt alles zusammen: Rationale Graphen nach den gesammelten Hinweisen skizzieren	190
Kapitel 10	
<i>Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen</i>	193
Exponentialausdrücke auswerten	193
Exponentialfunktionen: Auf die Basis kommt es an!	194
Die Trends der Basis beobachten	194
Die häufigsten Basen: 10 und e	196
Exponentialgleichungen lösen	197
Die Basis muss stimmen	198
Quadratische Muster erkennen und nutzen	200
Exponentialfunktionen und der Zins	201
Die Zinseszinsformel anwenden	201
Stetiger Zinseszins	204
Logarithmische Funktionen	204
Die Eigenschaften von Logarithmen	205
Logarithmen in der Praxis	206
Logarithmische Gleichungen lösen	208
Log gleich Log setzen	209
Logarithmische Gleichungen in Exponentialgleichungen umformen	210

Exponentialfunktionen und logarithmische Funktionen grafisch darstellen	211
Die Exponentialfunktion und ihr Graph	211
Steigen oder Fallen erkennen	211
Die Logarithmen vor lauter Bäumen nicht sehen	213

Teil III

Der ewige Kampf mit Kegelschnitten und Gleichungssystemen

217

Kapitel 11

Kegelschnitte aufschneiden

219

Einen Kegel aufschneiden	219
Alles ist offen – mit Parabeln	220
Parabeln mit dem Scheitelpunkt im Ursprung	221
Die allgemeine Form von Parabelgleichungen	224
Die Graphen von Parabeln skizzieren	225
Parabolische Gleichungen in die Standardform bringen	227
Der Kreis im Kegelschnitt	228
Den Kreis standardisieren	229
Spezielle Kreise	230
Ellipsen und ihre Besonderheiten	231
Standards einer Ellipse	231
Eine elliptische Bahn skizzieren	234
Der ganze Hype mit den Hyperbeln	235
Die Asymptoten sind auch noch da!	236
Hyperbeln zeichnen	237
An ihren Gleichungen sollt ihr sie erkennen – Kegelschnitte, die dem Standard entsprechen (oder nicht)	239

Kapitel 12

Lineare Gleichungssysteme lösen

241

Die Standardform linearer Systeme und ihre möglichen Lösungen	241
Grafische Lösung von linearen Systemen	242
Den Schnittpunkt bestimmen	242
Zweimal dieselbe Gerade	243
Parallele Geraden	244
Systeme zweier linearer Gleichungen durch Addition eliminieren	245
Einen Eliminationspunkt finden	245
Lösungen für parallele und identische Geraden	247
Systeme mit zwei linearen Gleichungen durch Einsetzen lösen	247
Variablen einsetzen – leicht gemacht	248
Parallele und identische Geraden erkennen	249

Mit der Cramer'schen Regel unhandliche Brüche bekämpfen	250
Das lineare Gleichungssystem für Cramer vorbereiten	251
Anwendung der Cramer'schen Regel auf ein lineares System	252
Lineare Systeme auf drei lineare Gleichungen steigern	253
Systeme mit drei Gleichungen mit Hilfe der Algebra lösen	253
Eine verallgemeinerte Lösung für Linearkombinationen einrichten	255
Wir steigern die Gleichungen noch weiter	256
Lineare Systeme in der Praxis	258
Mit Hilfe von Systemen Brüche zerlegen	259
Kapitel 13	
Systeme nicht linearer Gleichungen und Ungleichungen lösen	263
Parabeln mit Geraden kreuzen	263
Die Punkte bestimmen, an denen sich Gerade und Parabel kreuzen	264
Eine Lösung, die keine Lösung ist	266
Sich schneidende Parabeln und Kreise	267
Mehrere Schnittpunkte	268
Die Lösungen aussortieren	270
Ein Angriff auf andere Gleichungssysteme	271
Polynome und Geraden kombinieren	272
Polynome kreuzen	273
Exponentielle Schnittpunkte finden	274
Und jetzt zu den rationalen Funktionen	276
Faires Spiel mit Ungleichungen	279
Ungleichungen zeichnen und zuordnen	280
Bereiche aus Kurven und Geraden zeichnen	280
Teil IV	
Fortgeschrittene Konzepte – die Turbozuschaltung	283
Kapitel 14	
Komplexe Zahlen in einer komplexen Welt vereinfachen	285
Mit Imagination Potenzen von i vereinfachen	286
Die Komplexität komplexer Zahlen	287
Operationen mit komplexen Zahlen	287
Komplexe Zahlen addieren	288
Komplexe Zahlen subtrahieren	288
Komplexe Zahlen multiplizieren	288
Mit der konjugierten Form multiplizieren, um zu dividieren	289
Wurzeln vereinfachen	291
Quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen	291
Polynome mit komplexen Lösungen	293
Konjugierte Paare erkennen	294
Komplexe Lösungen interpretieren	294

Kapitel 15	
Matrizen machen Spaß	297
Die verschiedenen Matrizenarten	297
Zeilen- und Spaltenmatrizen	298
Quadratische Matrizen	298
Null-Matrizen	299
Identitätsmatrizen	299
Operationen für Matrizen durchführen	299
Matrizen addieren und subtrahieren	300
Matrizen mit Skalaren multiplizieren	301
Zwei Matrizen multiplizieren	301
Matrizen und Operationen anwenden	303
Zeilenoperationen definieren	306
Inverse Matrizen finden	308
Additive Inverse bestimmen	308
Multiplikative Inverse bestimmen	309
Matrizen mit Hilfe von Inversen dividieren	314
Mit Matrizen Gleichungssysteme lösen	314
Kapitel 16	
Ein Leben mit Listen: Folgen und Reihen	317
Die Terminologie der Folgen	317
Die Notation der Folge	318
Die Fakultät in Folgen	318
Alternierende Folgenmuster	319
Muster in Folgen	320
Arithmetische und geometrische Folgen	322
Gemeinsame Grundlagen: Arithmetische Folgen	322
Der multiplikative Ansatz: Geometrische Folgen	324
Rekursiv definierte Funktionen	326
Und jetzt zu den Reihen	327
Die Notation für die Summenbildung	327
Arithmetische Summenbildung	328
Geometrische Summenbildung	329
Summen von Folgen in der realen Welt	331
Klar Schiff im Amphitheater	331
Taschengeldverhandlungen	332
Ein Ballwurf	333
Spezielle Formeln	334
Kapitel 17	
Was Sie schon immer über Mengen wissen wollten	337
Die Mengennotation	337
Elemente in einer Liste aufführen	337
Mengen von Grund auf erstellen	338

Alles (Universalmenge) oder nichts (leere Menge)	338
Und jetzt die Untermengen	339
Mengenoperationen	341
Zwei Mengen vereinigen	341
Schnittmengen	342
Komplementärmenge	342
Elemente in Mengen zählen	343
Venn-Diagramme	343
Das Venn-Diagramm anwenden	344
Venn-Diagramme für Mengenoperationen nutzen	345
Einem Venn-Diagramm eine Menge hinzufügen	347
Fakultäten	349
Fakultäten im Griff!	349
Fakultäten vereinfachen	350
Wie ich dich liebe? Lass mich zählen, wie ...	351
Den Multiplikationssatz auf Mengen anwenden	351
Permutationen von Mengen	352
Mengen durch Kombinationen kombinieren	356
Baumdiagramme wachsen lassen	357
Ein Baumdiagramm für eine Permutation malen	357
Ein Baumdiagramm für eine Kombination zeichnen	358

Teil V

Der Top-Ten-Teil 361

Kapitel 18

Zehn Tricks für die Multiplikation 363

Zahlen quadrieren, die mit 5 enden	363
Das nächste perfekte Quadrat finden	364
Das Muster in Vielfachen von 9 erkennen	364
9er raus!	364
9en raus: Jetzt bei der Multiplikation	365
Mit 11 multiplizieren	366
Mit 5 multiplizieren	367
Gemeinsame Nenner finden	367
Teiler bestimmen	367
Zweistellige Zahlen multiplizieren	368

Kapitel 19

Zehn spezielle Zahlentypen 369

Dreieckszahlen	369
Quadratzahlen	369
Sechseckzahlen	370
Perfekte Zahlen	370

Befreundete Zahlen	370
Glückliche Zahlen	371
Abundante Zahlen	371
Defiziente Zahlen	371
Narzisstische Zahlen	371
Primzahlen	372
<i>Stichwortverzeichnis</i>	373