Die Anwendung von linearen Gleichungssystemen 1

In diesem Kapitel

- ✔ Erkennen, ob ein lineares Gleichungssystem vorliegt
- ✔ Ein lineares Gleichungssystem aufstellen
- ✔ Lineare Gleichungssysteme äquivalent umformen

Was ist ein lineares Gleichungssystem?

Der Begriff »lineares Gleichungssystem« enthält drei Wortstämme, die darauf hinweisen, welche Art von mathematischen Objekten in diesem Buch behandelt werden. Diese Wortstämme sind »linear«, »Gleichung« und »System«. Was eine Gleichung ist, muss sicher nach 10 Jahren Schule niemandem erklärt werden. Der Begriff »System« drückt aus, dass Sie es im Weiteren nicht nur mit einer Gleichung zu tun haben werden, sondern mit mehreren Gleichungen. Und alle diese Gleichungen sollen gleichzeitig gelöst werden. »Gleichzeitig« bedeutet dabei, dass alle Gleichungen des Systems gelöst werden, wenn für jede Variable des Systems in jeder Gleichung der jeweils gleiche Wert eingesetzt wird.

Gegeben seien die Gleichungen:

1. $y = 2x + 3$
2. $y = 3x + 1$

Dies ist ein System, welches aus zwei Gleichungen besteht. Beide Gleichungen werden gelöst, wenn für die Variablen x und y die Werte $x = 2$ und $y = 7$

gewählt werden. Alle anderen Wertepaare für x und y können maximal eine der beiden Gleichungen lösen, aber nicht beide Gleichungen gleichzeitig. Wenn Sie zum Beispiel $x = 3$ vorgeben, dann müssen Sie $y = 9$ wählen, um die erste Gleichung zu lösen, aber $y = 10$, um die zweite Gleichung zu lösen. Sie sind also bei $x = 3$ gezwungen, für jede Gleichung einen anderen y-Wert zu wählen, um sie zu lösen. Deshalb kann $x = 3$ nicht zu einem Wertepaar gehören, welches das Gleichungssystem löst.

Da die Werte der Variablen gesucht werden müssen, zunächst also unbekannt sind, werde ich sie im Weiteren »Unbekannte« nennen.

Bleibt noch die Frage, wofür der Begriff »linear« steht. Lineare Gleichungen kennen Sie sicher aus der Schule. Es sind Gleichungen der Form $y = a \cdot x + b$. Was eine solche Gleichung zu einer linearen Gleichung macht, ist die Tatsache, dass die beiden Variablen x und y

- ✔ nur in der Potenz 1 vorkommen,
- ✔ nicht noch einmal in einer Funktion stehen, sondern lediglich mit einem von den Variablen der Gleichung unabhängigen Koeffizienten (Vorfaktor) multipliziert werden.

BEISPIEL

$2y = 3x + 4$ ist eine lineare Gleichung
$3x - 4y = 6$ ist eine lineare Gleichung
$x^2 + 2y = 3$ ist keine lineare Gleichung (x ist nicht in der Potenz 1)
$3x + e^y = 7$ ist keine lineare Gleichung (y steht innerhalb der e-Funktion)

$2x + 3y + x \cdot y = 2$ ist keine lineare Gleichung (das Glied $x \cdot y$ bedeutet, dass y mit einer anderen Variable der Gleichung multipliziert wird.)

Wie Sie ein praktisches Problem als lineares Gleichungssystem formulieren

Stellen Sie sich vor, Sie müssen einen Betrag von 1080 Euro nach einer vorgegebenen Vorschrift auf 4 Personen, ich nenne sie A, B, C und D, aufteilen. Die Vorschrift besagt folgendes:

1. A bekommt halb soviel Geld wie B und C zusammen.
2. A und C bekommen zusammen das 1,5-fache von D.
3. B bekommt doppelt soviel wie D.

Ich bezeichne zuerst einmal die Beträge, welche die Personen im Einzelnen bekommen, mit a, b, c, d (A bekommt den Betrag a, B bekommt den Betrag b, und so weiter).

Aus den obigen Informationen ergeben sich folgende Gleichungen

1. $a + b + c + d = 1080$ Euro
2. $a = 0{,}5 \cdot (b + c)$
3. $a + c = 1{,}5 \cdot d$
4. $b = 2 \cdot d$

Diese Gleichungen können Sie nun so umstellen, dass jeweils auf der linken Seite die Unbekannten a, b, c, d mit ihren Koeffizienten stehen, und rechts die Terme, in denen die Unbekannten nicht vorkommen.

1. $a + b + c + d = 1080$ Euro
2. $a - 0{,}5 \cdot b - 0{,}5 \cdot c = 0$ Euro
3. $a + c - 1{,}5 \cdot d = 0$ Euro
4. $b - 2 \cdot d = 0$ Euro

Diese vier Gleichungen bilden nun ein lineares Gleichungssystem. Die zu bestimmenden Unbekannten a, b, c, d liegen nur in der Potenz 1 vor und stehen auch nicht in irgendwelchen Funktionen. Sie haben lediglich Vorfaktoren. Der Rest des Buches wird sich mit der Suche nach den Lösungen solcher linearer Gleichungssysteme beschäftigen.

Ich möchte Ihnen aber, ohne an dieser Stelle auf den Lösungsweg einzugehen, die Lösung dieser Aufgabe angeben:

$a = 280$ Euro, $b = 480$ Euro, $c = 80$ Euro und $d = 240$ Euro.

Bitte überzeugen Sie sich selbst, dass mit diesen Werten für die einzelnen Unbekannten alle aufgestellten Gleichungen erfüllt sind!

Die möglichen Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

Im vorhergehenden Beispiel ist klar, dass es auf alle Fälle eine Lösung gibt (Diese habe ich Ihnen ja angegeben und es ist nicht schwer, meine Angaben zu überprüfen.). Doch das besagt noch nicht, dass es nicht andere Werte für a, b, c und d geben kann, für die das Gleichungssystem auch gelöst wird. Möglich wäre es, wie Sie gleich sehen werden.

Lineare Gleichungssysteme können drei verschiedene Lösungsverhalten zeigen:

1. Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. Dann können Sie für jede Unbekannte genau einen Wert angeben, so dass das Gleichungssystem gelöst wird.

2. Das Gleichungssystem hat einen Lösungsraum. Dann kann für einige der Unbekannten der Wert frei gewählt werden. Die Werte der anderen Unbekannten sind dann dadurch festgelegt und müssen berechnet werden.

3. Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Das bedeutet, es ist unmöglich, Werte für die einzelnen Unbekannten anzugeben, mit denen alle Gleichungen des Systems gelöst werden.

Dies ist im Augenblick sicher noch etwas verwirrend. Doch es gibt keinen Grund, sich Sorgen zu machen. Sie werden im weiteren Verlauf des Buches lernen, den Lösungstyp zu bestimmen.

Zunächst aber gebe ich Ihnen noch für jedes mögliche Lösungsverhalten ein Beispiel an. Bei dieser Gelegenheit möchte ich gleich die Bezeichnung für die zu bestimmenden Unbekannten so verallgemeinern, wie ich sie im Rest des Buches verwenden werde. Da es ja nicht nur 2 oder 3 Unbekannte geben kann, sondern auch 10, 100 oder noch mehr, ist deren Unterscheidung durch verschiedene Buchstaben unzweckmäßig. Deshalb bezeichne ich die Unbekannten im Weiteren einheitlich mit x und nummeriere sie mit einem tiefgestellten Index durch.

Beispiel 1: Das folgende Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 10$$
$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 11$$
$$8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 = 7$$

Es wird durch $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 4$ gelöst. Eine weitere Lösung gibt es nicht (Was Sie mir im Augenblick einfach glauben müssen.).

Beispiel 2: Das folgende Gleichungssystem hat einen zwei-dimensionalen Lösungsraum:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 10$$
$$9 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = 30$$
$$6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 20$$

Zwei-dimensionaler Lösungsraum bedeutet, dass Sie zwei der Unbekannten frei wählen können, den Wert der dritten Unbekannten müssen Sie daraus bestimmen. Wenn Sie im obigen Gleichungssystem zum Beispiel x_2 und x_3 frei wählen, so muss $x_1 = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} \cdot x_2 + \frac{2}{3} \cdot x_3$ sein, damit alle drei Gleichungen gelöst werden. Überprüfen Sie es ruhig einmal, indem sie für einige selbst gewählte Werte von x_2 und x_3 den jeweiligen Wert für das entsprechende x_1 berechnen und dann überprüfen, ob für diese Werte alle Gleichungen des Gleichungssystems gelöst werden!

Beispiel 3: Das folgende Gleichungssystem hat keine Lösung:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 &= 10 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 &= 9 \\ 8 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Auch hier müssen Sie mir diese Behauptung zunächst einmal glauben.

Äquivalente Umformungen eines linearen Gleichungssystems

Eine äquivalente Umformung bezeichnet in der Mathematik die Umformung eines Ausdrucks, bei der die Lösungsmenge gleich bleibt. Ein Großteil dessen, was Sie in der Schule in Mathematik gelernt haben, ist nichts anderes als das Ausführen äquivalenter Umformungen.

Die sehr einfache Gleichung $5 \cdot x - 3 = 3 \cdot x + 1$ lösen Sie folgendermaßen:

$5 \cdot x - 3 = 3 \cdot x + 1$
Subtraktion von $3 \cdot x$ auf beiden Seiten ergibt:
$2 \cdot x - 3 = 1$
Addition von 3 auf beiden Seiten ergibt:
$2 \cdot x = 4$
Division durch 2 auf beiden Seiten ergibt:
$x = 2$

Das bedeutet, dass die ursprüngliche Gleichung $5 \cdot x - 3 = 3 \cdot x + 1$ gelöst wird, wenn x den Wert 2 hat. Sie können leicht überprüfen, dass alle Gleichungen auf dem Weg zur endgültigen Lösung auch jeweils durch x = 2 gelöst werden. Und das ist genau deshalb der Fall, weil in jedem Schritt eine äquivalente Umformung durchgeführt wurde.

Wenn Sie nun ein lineares Gleichungssystem vorliegen haben, können Sie auch verschiedenen äquivalente Umformungen durchführen, bei denen jeweils ein neues Gleichungssystem entsteht, welches jedoch dieselbe Lösungsmenge hat wie das Gleichungssystem vor der Umformung.

Die äquivalenten Umformungen eines linearen Gleichungssystems sind:

1. **Änderung der Reihenfolge der einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems**
   Sie können zum Beispiel statt
   $$\begin{matrix} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 2 \end{matrix} \quad \text{auch} \quad \begin{matrix} 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 2 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \end{matrix}$$
   setzen, ohne die Lösungsmenge zu ändern.

2. **Änderung der Reihenfolge der Summanden innerhalb einer Gleichung des Gleichungssystems**
   Sie können zum Beispiel statt
   $$\begin{matrix} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 2 \end{matrix} \quad \text{auch} \quad \begin{matrix} 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 = 6 \\ 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 = 2 \end{matrix},$$
   setzen, ohne die Lösungsmenge zu ändern (Die Reihenfolge der Unbekannten und der dazugehörigen Koeffizienten wurde vertauscht).

3. **Multiplikation einer Gleichung des Systems mit einem von Null verschiedenen Faktor**
   Sie können zum Beispiel statt

$$\begin{array}{l} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 2 \end{array} \quad \text{auch} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 = 4 \end{array}$$

setzen, ohne die Lösungsmenge zu ändern (Die zweite Gleichung wurde mit zwei multipliziert.).

4. **Ersetzen einer Gleichung des Systems durch die Summe beziehungsweise Differenz aus ihr und dem Vielfachen einer anderen Gleichung des Systems**
   Sie können zum Beispiel statt

$$\begin{array}{l} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 6 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 10 \end{array} \quad \text{auch} \quad \begin{array}{r} 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 6 \\ 1 \cdot x_2 = -2 \end{array}$$

   setzen, ohne die Lösungsmenge zu ändern (Die zweite Gleichung wurde durch die Differenz aus ihr und dem Doppelten der ersten Gleichung ersetzt.).

Auf diesen Umformungen basieren letzten Endes die im nächsten Teil dieses Buches beschriebenen Lösungsverfahren, nämlich das Gauß-Verfahren und das Gauß-Jordan-Verfahren.