Proportionalität und Antiproportionalität

1

In diesem Kapitel

- ✔ »Je mehr desto mehr« und »je mehr desto weniger«
- ✔ Zuordnungsvorschriften verstehen
- ✔ Darstellungsformen von Proportionalität und Antiproportionalität kennen lernen

Proportionalität – was ist das?

Proportionalitäten begegnen Ihnen im Alltag ständig, ohne dass Sie es merken: beim Tanken, beim Einkaufen oder auch bei der Arbeit. Eine Proportionalität ist nämlich nichts anderes als ein Zusammenhang »je mehr – desto mehr«.

Wenn Sie beispielsweise Nudeln kaufen, heißt dies »je mehr Nudeln Sie kaufen, desto mehr bezahlen Sie« oder »je mehr Liter Benzin Sie beim Tanken in Ihren Tank füllen, desto mehr Euro werden Sie auf den Tisch legen«. Wenn Sie bei der Arbeit an »mehr(eren) Autos die Reifen wechseln müssen«, wird Sie dies »mehr Zeit kosten«.

Wichtig ist dabei, dass beide Größen »gleichmäßig« wachsen, also bei der doppelten bzw. dreifachen Menge Nudeln auch genau die doppelte bzw. dreifache Menge an Geld bezahlt wird. In anderen Worten: jede Nudelpackung kostet das Gleiche. Sollte Ihr Lieblingsgeschäft also Rabattaktionen anbieten, liegt trotz Ihrer berechtigten Freude mathematisch gesehen keine Proportionalität mehr vor.

Zwei variable (veränderliche) Größen x und y sind zueinander *proportional*, wenn sich die zweite Größe y aus der ersten Größe x mithilfe einer *(Proportionalitäts-)Konstanten* berechnen lässt:

$$y = c \cdot x \quad \text{bzw.} \quad \frac{y}{x} = c \text{ (der Quotient ist konstant).}$$

Die Zuordnung (das ist der Zusammenhang zwischen x und y) selbst heißt *Proportionalität* oder *proportionale Zuordnung*.

1. Für eine Tafel Schokolade zahlen Sie 1,29 €. Die Anzahl x der Tafeln und der Preis y sind proportional zueinander, da sich der Preis durch Multiplikation mit der Konstanten 1,29 € berechnen lässt. Für 5 Tafeln (also $x = 5$) zahlt man also $5 \cdot 1{,}29$ € = 6,45 €. Sollte es 5 Tafeln zum Preis von 4 geben (Rabatt), so gilt diese Berechnung nicht mehr.

2. Die Laufzeit für eine bestimmte Strecke ist im allgemeinen nicht proportional zur Kilometerzahl, da man kürzere Strecken schneller laufen kann als längere und so keine Konstante existiert, aus der man die Laufzeit direkt aus der (beliebigen) Streckenlänge berechnen könnte.

3. Im Falle des Reifenwechsels könnte man darüber streiten, ob es sich um eine Proportionalität handelt oder nicht, denn Sie müssten in der Lage sein, den Reifenwechsel immer in genau der gleichen Zeit durchzuführen – eine Maschine schafft das wahrscheinlich… .

Da im ersten Beispiel zwei Größen proportional zueinander sind, bedeutet dies natürlich, dass Sie auch umgekehrt aus dem Gesamtpreis wieder die Anzahl der Schokoladentafeln berechnen können. Sie würden logischerweise den Gesamtpreis durch 1,29 € teilen. Wenn Sie dies nun wieder durch eine Multiplikation mit einer Konstanten beschreiben wollten, müssten Sie den Preis mit $\frac{1}{1{,}29\,€} \approx \frac{0{,}775}{€}$ multiplizieren, um daraus die Anzahl der Tafeln zu erhalten.

Darstellen von Proportionalitäten

Zuordnungsvorschrift

Eine Darstellungsform haben Sie bereits kennengelernt, nämlich die sogenannte Funktionsgleichung oder Zuordnungsvorschrift. Hier wird in algebraischer Form notiert, wie die zweite Größe aus der ersten Größe zu berechnen ist. Zum Beispiel:

$$y = 3 \cdot x$$

Die Zuordnungsvorschrift ist also nichts weiter als eine Rechenvorschrift. Die dargestellte Formel ist die kürzeste und damit die am häufigsten verwendete Art, eine Proportionalität zu notieren.

Tabellenform

Alternativ kann man auch alle zusammen gehörenden Zahlenpaare x und y in einer Tabelle notieren, wie das Beispiel in Tabelle 1.1 zeigt.

x	0	1	2	4	5	10	–5
y	0	3	6	12	15	30	–15

Tabelle 1.1: Proportionalität in Tabellenform

Mit ein bisschen Kopfrechnen können Sie erkennen, dass der jeweilige y-Wert dadurch entsteht, dass der entsprechende x-Wert mit 3 multipliziert wird. In einer solchen Tabelle sind die oberen Werte (meist x) frei wählbar und die unteren Werte (meist y) durch die Proportionalität vorgegeben. Auch negative x- und y-Werte sind mathematisch gesehen erlaubt, auch wenn sie im Alltag häufig wenig Sinn ergeben, es sei denn Sie geben Ihre Nudeln im Laden wieder zurück. In diesem Fall erhalten Sie natürlich auch wieder Geld zurück.

Graphische Darstellung

Aus dem Mathematikunterricht wissen Sie vielleicht noch, dass zu Gleichungen wie $y = 3 \cdot x$ ein Schaubild gehört. Dieses Schaubild ergibt sich, wenn Sie alle möglichen Zahlenpaare x und y in ein Koordinatensystem eintragen. Dabei gibt x die Entfernung vom Ursprung nach rechts und y die Entfernung nach oben an. Jedes mögliche Zahlenpaar (x; y) kreiert damit einen Punkt im Koordinatensystem.

Ich hoffe übrigens, dass Sie mir eine mathematische Feinheit nachsehen: wenn Sie von einem Zahlenpaar, z.B. (2; 6) sprechen, trennt man die beiden Zahlen (Koordinaten) üblicherweise durch ein Semikolon – bezieht man sich auf einen Punkt im Schaubild, z.B. (2|6) werden die gleichen Zahlen durch einen senkrechten Strich getrennt.

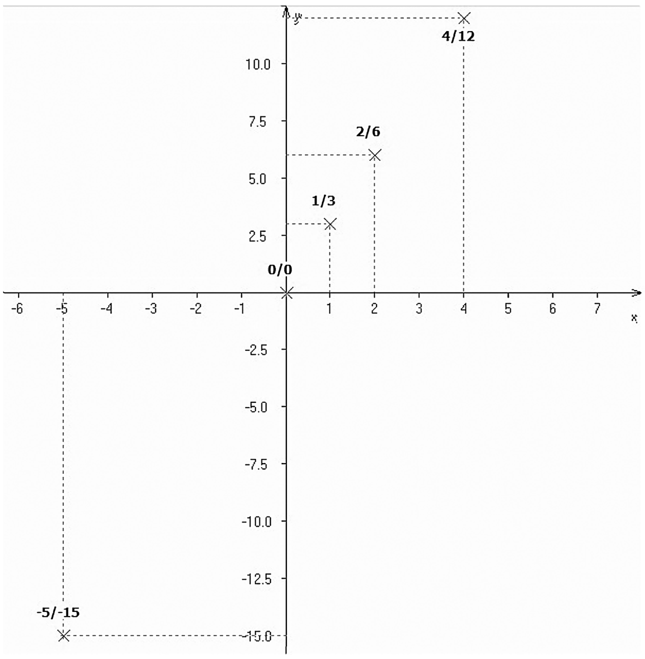

Abbildung 1.1: Zahlenpaare aus Tabelle 1.1

Zum Erstellen des Schaubilds können Sie die oben gezeigte Tabelle (eventuell mit anderen x- und damit auch mit anderen y-Werten) als Grundlage verwenden. Dies ergibt etwa das in Abbildung 1.2 gezeigte Bild.

Wenn Sie sich überlegen, welche weiteren Kombinationen aus x und y noch möglich wären, finden Sie schnell heraus, dass alle Punkte auf einer gemeinsamen Geraden (siehe Abbildung 1.2) liegen.

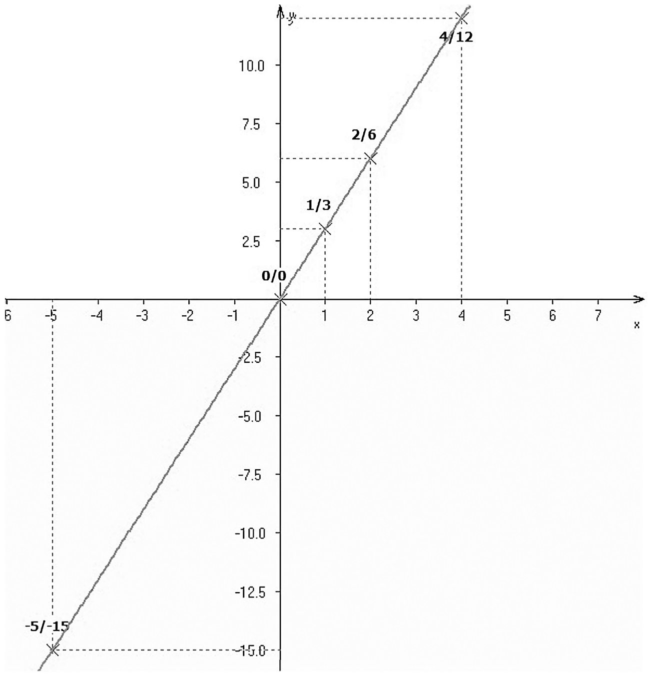

Abbildung 1.2: Schaubild zu y = 3 · x

Es handelt sich dabei um eine sogenannte *Ursprungsgerade*, da die Linie durch den Punkt (0|0) – den Koordinatenursprung – geht.

Das Schöne an Proportionalitäten ist, dass alle Schaubilder ausnahmslos Ursprungsgeraden sind.

- Proportionalitäten tauchen auf als
- *Funktionsgleichung* (algebraische Vorschrift) – diese hat immer die Form $y = c \cdot x$ (c ist die *Proportionalitätskonstante*)
- *Tabellen* – Zahlenpaare stehen übereinander. Wenn $x = 0$ vorkommt, ist $y = 0$ immer der dazugehörige Wert. Der Quotient aus x und y ergibt immer dieselbe Konstante: $\frac{y}{x} = k = \frac{1}{c}$
- *Schaubilder* – das Schaubild einer Proportionalität ist immer eine *Ursprungsgerade*

Erkennen von Proportionalitäten

Sobald die Proportionalität als Funktionsgleichung oder als Schaubild auftaucht, haben Sie keine Probleme, denn Sie wissen ja bereits, wie diese auszusehen haben.

Ein wenig mehr Arbeit müssen Sie leisten, falls Sie eine Tabelle oder einen Text vor sich haben.

Am einfachsten ist es, sich die Definition nochmal vor Augen zu halten – denn Sie müssen nur prüfen

- ob das Zahlenpaar (0; 0) zum Beispiel gehört
- ob zum Doppelten (Dreifachen, Vierfachen usw.) der ersten Größe x auch das Doppelte (Dreifache, Vierfache usw.) der zweiten Größe y gehört.

1. Bei der folgenden Tabelle ist zu prüfen, ob es sich um eine proportionale Zuordnung handeln kann:

x	3	8	15
y	3,6	9,6	16,5

Falls es eine Proportionalitätskonstante c geben sollte, müsste sich y als Produkt $x \cdot c$ ergeben. Daher muss umgekehrt $y : x$ (oder $x : y$) immer die gleiche Zahl ergeben.

Für die Zahlenpaare ergibt sich:

$$\frac{3{,}6}{3} = 1{,}2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{3}{3{,}6} = 0{,}8\overline{3}$$

$$\frac{9{,}6}{8} = 1{,}2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{8}{9{,}6} = 0{,}8\overline{3}$$

$$\frac{16{,}5}{15} = 1{,}1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{15}{16{,}5} = 0{,}9\overline{09}$$

Damit kann die Tabelle nicht zu einer Proportionalität gehören, da das letzte Zahlenpaar nicht zu den beiden anderen passt.

2. Bei einem Telefonanbieter zahlt ein Kunde pro Minute 59 Cent. Betrachten Sie nun den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Minuten und dem dazugehörenden Preis, stellen Sie fest: falls der Anbieter keine Grundgebühr verlangt, handelt es sich um eine Proportionalität, da bei 0 Anrufen auch 0 Euro fällig werden und zur doppelten (achtfachen, zwanzigfachen usw.) Minutenzahl auch der doppelte (achtfache, zwanzigfache usw.) Preis gehört. Falls der Anbieter nun eine Grundgebühr von 5 € verlangen sollte, zahlt der Kunde bereits für 0 Minuten 5 €, für

1 Minute 5,59 € und für das Doppelte, nämlich 2 Minuten 6,18 € – also nicht das Doppelte von 5,59 €.

Antiproportionalitäten – genau umgekehrt

Antiproportionalitäten sind vor allem bei der Arbeit schön, denn es gelten die gleichen Grundgedanken wie bei der Proportionalität, aber wir sehen »je mehr – desto weniger«. »Je mehr Mitarbeiter an einer Sache gleichzeitig arbeiten, umso weniger Zeit werden wir für den Auftrag brauchen«. »Je mehr Stapel Sie aus Ihren noch zu erledigenden Akten legen, desto kleiner sehen die Stapel aus«. Die Gesamtmenge reduziert sich auf diese Art leider nicht…

Auch hier müssen beide Größen gleichmäßig wachsen bzw. schrumpfen, d.h. es muss zur doppelten bzw. dreifachen Menge x genau die halbe bzw. ein Drittel der Menge an y gehören. Dies passiert natürlich auch nur, wenn alle Ihre Mitarbeiter gleich schnell arbeiten – ein Traum für jeden Chef.

Zwei variable Größen x und y sind zueinander *antiproportional* oder auch *umgekehrt proportional*, wenn die zweite Größe y zum Kehrwert der ersten Größe x proportional ist: $y = c \cdot \frac{1}{x}$ bzw. wenn das Produkt aus x und y eine Konstante ergibt: $x \cdot y = c$.

Die Zuordnung selbst heißt *Antiproportionalität* oder *antiproportionale Zuordnung*.

1. Wenn ein Handwerker ein Haus an einem Tag (8 Arbeitsstunden) streichen kann, so schaffen 5 Handwerker (mit gleichem Arbeitstempo) dies in $\frac{1}{5}$ der Zeit (der schnelle Kopfrechner hat hier bereits 1 h und 36 min berechnet).

2. Betrachten Sie den Inhalt eines 50-l-Autotanks im Vergleich zu den gefahrenen Kilometern, sehen Sie »je mehr Kilometer das Auto gefahren ist, desto weniger Benzin findet sich noch im Tank«. Es handelt sich allerdings nicht um eine Antiproportionalität, denn nach 100 km Fahrt sind beispielsweise noch 40 l im Tank ($100 \cdot 40 = 4\,000$). Dann müssten nach 200 km noch 20 l im Tank sein ($200 \cdot 20 = 4\,000$), Sie rechnen bei einigermaßen konstantem Verbrauch jedoch mit 300 km (falls Sie 10 l pro 100 km annehmen).

Darstellen von Antiproportionalitäten

Auch bei Antiproportionalitäten verwendet man die von oben bekannten Darstellungsformen.

Eine Funktionsgleichung hat ebenfalls eine Konstante, die sich aus dem Beispiel ergibt. Zum Handwerkerbeispiel erhalten Sie etwa $y = \frac{8}{x}$ (y ist hierbei die benötigte Zeit in Stunden und x die Anzahl der Handwerker). Sollte ein einzelner Handwerker bereits 3 Arbeitstage (also 24 Stunden) benötigen, erhalten Sie stattdessen $y = \frac{24}{x}$.

Tabelle 1.2 zeigt, wie sich die Anzahl der Arbeitsstunden mit zunehmender Anzahl an Handwerkern reduziert.

x	1	3	5	10	–15
y	24	8	4,8	2,4	–1,6

Tabelle 1.2: Tabelle zu $y = \frac{24}{x}$ bzw. $x \cdot y = 24$.

Auch hier sind (mathematisch) negative Werte erlaubt, auch wenn sie in diesem speziellen Beispiel wirklich keinen Sinn ergeben.

Etwas interessanter sieht das Schaubild dazu aus (siehe Abbildung 1.3). Es handelt sich nicht mehr um eine Gerade, sondern um eine sogenannte *Hyperbel*, eine Kurve, die aus zwei Ästen besteht (der Ast im negativen Teil des Koordinatensystems findet im Prinzip nie Anwendung und wird daher häufig auch nicht gezeichnet). Offensichtlich beinhaltet dieses Schaubild den Ursprung nie, aber 0 Handwerker würden das Haus ja auch nicht streichen können ….

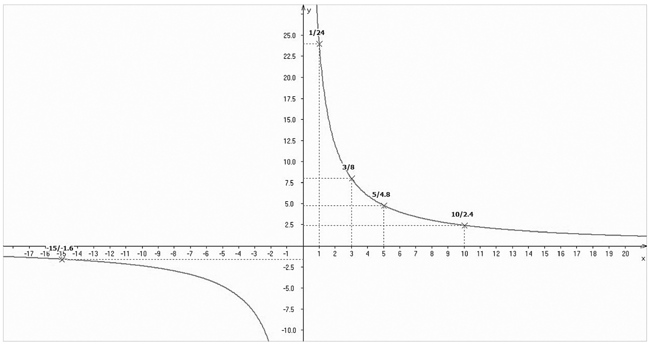

Abbildung 1.3: Schaubild zu $y = \frac{24}{x}$

Antiproportionalitäten tauchen auf als

- *Funktionsgleichung* (algebraische Vorschrift) – diese hat immer die Form $y = c \cdot \frac{1}{x}$ bzw. $x \cdot y = c$.
- *Tabellen* – Zahlenpaare stehen übereinander. Das Zahlenpaar (0; 0) darf nicht vorkommen.
- *Schaubilder* – das Schaubild einer Antiproportionalität ist immer eine *Hyperbel*.

Erkennen von Antiproportionalitäten

Um einen Zusammenhang oder eine Tabelle auf Antiproportionalität zu überprüfen, gehen Sie genauso vor wie bei den Proportionalitäten. Sie stellen sicher, dass

1. das Zahlenpaar (0; 0) nicht zum Beispiel gehört.
2. zum Doppelten (Vierfachen, Halben usw.) der ersten Größe x auch die Hälfte (das Vierfache, das Doppelte usw.) der zweiten Größe y gehört.