# Der Apfel fällt nicht weit vom Stamm: Die Newton'schen Gesetze

4

## In diesem Kapitel …

- Kräfte und Arbeiten mit Kräften
- Die drei Newton'schen Gesetze
- Träge und schwere Masse
- Das d'Alembert'sche Prinzip

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, wie man die Bewegung von Massenpunkten oder Körpern mithilfe der Größen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung beschreiben kann. Allerdings beschränkte sich die Darstellung auf die reine Beschreibung der Bewegungen. Die Ursachen von Bewegungen und, noch wichtiger, von Bewegungsänderungen wurde außen vor gelassen. Diese Fragen werden im vorliegenden Kapitel behandelt:

- ✓ Warum bewegen sich Körper?
- ✓ Warum ändern Körper ihren Bewegungszustand?

Es wird sich zeigen, dass die drei *Newton'schen Gesetze* alle erforderlichen Antworten auf diese Fragen liefern. Zudem werden mit den Newton'schen Gesetzen zwei weitere Größen eingeführt, die der Mechanik ein zentrale Rolle spielen: die *Kraft* und die *Masse*. Beide sind für die gesamte Physik von außerordentlicher Bedeutung; daher werden sie im Folgenden ausführlich behandelt.

## Die Kräfte sind entscheidend

Kräfte spielen in der Mechanik, aber darüber hinaus auch in der gesamten Physik eine herausragende Rolle. Alle Bewegungen werden von Kräften hervorgerufen und gesteuert. Deshalb ist es natürlich sinnvoll, dieses Kapitel mit einer Definition der Kraft zu beginnen. Es stellt sich allerdings heraus, dass dies gar nicht so einfach ist. Sie erwarten an dieser Stelle wahrscheinlich ein Erinnerungssymbol:

Eine Kraft ist wie folgt definiert »…«:

Eine solche direkte Definition der Kraft existiert trotz der großen Bedeutung dieses Begriffes erstaunlicherweise nicht. Stattdessen muss man Kräfte über die von ihnen ausgehenden Wirkungen definieren:

- Kräfte ändern den Bewegungszustand von Körpern.
- Kräfte können ausgedehnte starre Körper deformieren, d. h. verformen.

Der zweite Aspekt wird ausführlich in Kapitel 10 im Rahmen der Kontinuumsmechanik behandelt, der erste ist Thema des vorliegenden Kapitels.

Der Begriff der Kraft ist sehr eng mit dem Namen *Newton* und den drei Newton'schen Gesetzen verbunden. Wenn Sie diese Gesetze in den folgenden Abschnitten durchgearbeitet haben, wird Ihnen auch klar sein, was eine Kraft ist, selbst wenn Sie auch dann immer noch nicht anders sagen können als: »Eine Kraft ist, wenn …«.

## Grundlagen der Mechanik: Die Newton'schen Gesetze

Isaac Newton (1643–1727) veröffentlichte im Jahr 1687 sein Werk »Philosphiae Naturalis Principia Mathematica«, das die drei nach ihm benannten Gesetze enthält. Angeblich lag er unter einem Apfelbaum und sah einen Apfel vom Baum fallen, als er diese Gesetze entwickelte. Unabhängig vom Wahrheitsgehalt dieser Legende besitzen die *drei Newton'schen Gesetze* auch heute noch ihre Gültigkeit und bilden die Grundlagen der klassischen Mechanik und damit der gesamten klassischen Physik.

Vor allem in der älteren Literatur werden diese drei Gesetze auch Newton'sche *Axiome* genannt. Ein Axiom ist ein Grundsatz einer Theorie, der innerhalb der Theorie nicht begründet oder abgeleitet werden kann. Dies traf in der Tat auf die Newton'schen Gesetze zu. Newton postulierte sie, konnte sie im Rahmen seiner Theorie aber nicht herleiten. Mittlerweile kann man sie allerdings aus Grundsätzen, die über die klassische Mechanik hinausgehen, durchaus ableiten (aber das geht über den Rahmen dieses Buches hinaus), sodass sich der Name Newton'sche Gesetze mehr und mehr durchsetzt. Er wird auch in diesem Buch durchgehend verwendet. Newton selbst hat übrigens beide Ausdrücke benutzt, sogar in einem Satz direkt nebeneinander.

### Sich Änderungen widersetzen: Das erste Newton'sche Gesetz

Zwei der drei Newton'schen Gesetze wirken zumindest auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich, zumindest aber erklärungsbedürftig und scheinen alltäglichen Erfahrungen zu widersprechen. Dies gilt bereits für das *erste Newton'sche Gesetz*. Es lautet:

Ein Körper ändert seinen Bewegungszustand nicht, solange keine äußere Kraft auf ihn wirkt. Dieses Gesetz wird auch *Trägheitsgesetz* genannt.

Drückt man das Trägheitsgesetz mit anderen Worten aus, so besagt es:

- ✓ Ein in Ruhe befindlicher Körper bleibt in Ruhe, solange keine äußere Kraft auf ihn wirkt.
- ✓ Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$, so behält er diese Geschwindigkeit bei, wenn keine äußere Kraft auf ihn wirkt. Dies gilt sowohl für den Betrag als auch für die Richtung dieser Geschwindigkeit.

Es ist dieser zweite Punkt, der dem Alltagsleben zu widersprechen scheint. Sie kennen in Ihrer Umgebung keine Bewegung, die ohne Antrieb unendlich andauert. Wenn ein Auto auf einer Straße rollt, wird es immer langsamer und kommt zum Stillstand (es sei denn, Sie geben Gas, aber dann üben Sie eine Kraft aus). Ebenso wird ein Spielzeugschiff auf einer absolut glatten Wasseroberfläche immer langsamer werden. Selbst jede Billardkugel kommt irgendwann einmal zur Ruhe.

Wie stimmen diese Beobachtungen mit dem Trägheitsgesetz überein? Ist dies nicht ein Widerspruch? Im Gegenteil, sie lassen sich mit dem Trägheitsgesetz einfach erklären. Das Gesetz besagt: Wenn ein Körper seinen Bewegungszustand ändert, muss eine Kraft auf ihn wirken. Also kann man an dieser Stelle schlussfolgern, dass eine oder mehrere Kräfte in den oben dargestellten Situationen existieren, die die Bewegung der Körper behindern. Dies sind *Reibungskräfte*, etwa der Luftwiderstand oder die Gleitreibung.

Physiker lieben die Reibung nicht, da sie oftmals Zusammenhänge verschleiert, und versuchen von ihr zu abstrahieren. Das hindert sie aber nicht daran, auch die Reibung durchaus präzise mit physikalischen Mitteln zu beschreiben, wie in Kapitel 9 dargestellt wird.

## Je größer die Kraft, desto größer die Wirkung: Das zweite Newton'sche Gesetz

Das *zweite Newton'sche Gesetz* ist dann an dieser Stelle folgerichtig; zudem entspricht es der alltäglichen Erfahrung. Es lautet:

Wenn eine Kraft $\mathbf{F}$ auf einen Körper der Masse $m$ wirkt, dann erfährt diese eine Beschleunigung $\mathbf{a}$, wobei die folgende Beziehung gilt:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Das zweite Newton'sche Gesetz wird auch *Aktionsprinzip* genannt.

Sowohl die Kraft $\mathbf{F}$ als auch die Beschleunigung $\mathbf{a}$ sind Vektoren, die in die gleiche Richtung zeigen, wie in Abbildung 4.1 veranschaulicht ist.

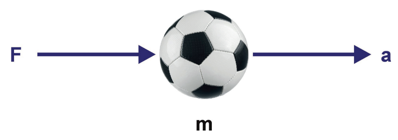



*Abbildung 4.1: Zum zweiten Newton'schen Gesetz*

Aus dem zweiten Newton'schen Gesetz geht auch die Einheit der Kraft hervor:

$$[F] = \mathrm{kgm/s^2} = \mathrm{Newton} = \mathrm{N}$$

Diese Krafteinheit besitzt also einen eigenen Namen, sie wird *Newton* genannt: Selten wurde der Name einer physikalischen Einheit treffender gewählt.

## Zu jeder Kraft gibt es eine Gegenkraft: Das dritte Newton'sche Gesetz

Das *dritte Newton'sche Gesetz* überrascht auf den ersten Blick am meisten. Es besagt:

Wenn ein Körper auf einen anderen Körper eine Kraft $\mathbf{F}_A$ ausübt, so antwortet der zweite Körper mit einer gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Gegenkraft $\mathbf{F}_R$. Es gilt also:

$$\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_R$$

Dieses Gesetz wird auch *Reaktionsprinzip* genannt.

Die Indizes beziehen sich dabei auf Newtons Originalschreibweise, die (natürlich lateinisch) wie folgt lautete:

$$\text{actio} = \text{reactio}$$

Betrachten Sie in diesem Zusammenhang Abbildung 4.2. Sie zeigt zwei gleiche Wägelchen; auf dem ersten steht eine Person der Masse $m$, auf dem anderen befindet sich ein Fass der gleichen Masse. Beide sind durch ein Seil verbunden, an dem die Person auf dem ersten Wagen zieht. Normalerweise sollte es für die Person kein Problem sein, den zweiten Wagen vollständig zu sich herüberzuziehen, wenn da nicht das dritte Newton'sche Gesetz wäre.

Dieses Gesetz besagt »actio = reactio«; mit anderen Worten: So wie die Person durch eine Kraft das Fass zu sich heranzieht, zieht auch das Fass die Person durch eine entsprechende Gegenkraft zu sich herüber. Das Ergebnis ist, dass sich beide Wägelchen in Bewegung setzen und sich in der Mitte treffen.

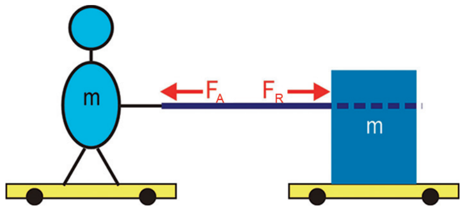



*Abbildung 4.2: Zum dritten Newton'schen Gesetz*

## Die Größen der Newton'schen Gesetze

In den drei Newton'schen Gesetzen tauchen lediglich drei Größen auf: die Kraft, die Masse und die Beschleunigung. Die Beschleunigung wurde ausführlich in Kapitel 3 behandelt; die Kraft wurde zu Beginn dieses Kapitels zwar eingeführt, aber nicht im Detail diskutiert. Die Masse wurde bislang überhaupt noch nicht definiert. Es ist daher an der Zeit, an dieser Stelle innezuhalten und sich etwas ausführlicher mit diesen beiden Größen Kraft und Masse zu beschäftigen.

### Arbeiten mit Kräften

Sie wissen jetzt genug über Kräfte, um mit ihnen arbeiten zu können. Aus der obigen Darstellung geht hervor:

- ✓ Kräfte sind Vektoren.
- ✓ Kräfte besitzen die Einheit Newton.
- ✓ Kräfte ändern den Bewegungszustand von Körpern.

An dieser Stelle interessiert vor allem der Vektorcharakter der Kraft. Er hat zur Folge, dass man Kräfte – wie alle Vektoren – sowohl zusammensetzen als auch zerlegen kann.

#### Kräfte addieren sich vektoriell

In der Physik, aber auch im Alltagsleben, tritt häufig der Fall auf, dass auf einen Körper mehr als eine Kraft wirkt. Wenn Sie jemals mit vier Hunden, jeder von ihnen an einer eigenen Leine, durch einen Wald spaziert sind, wissen Sie, wovon die Rede ist. Ein Flugzeug in der Luft erfährt zumindest vier Kräfte gleichzeitig:

- ✓ Die Vortriebskraft der Triebwerke
- ✓ Die nach unten wirkende Gewichtskraft
- ✓ Den Luftwiderstand
- ✓ Eine nach oben wirkende Auftriebskraft, die der Gewichtskraft entgegenwirkt (ohne diese Auftriebskraft würde das Flugzeug niemals abheben)

Um zu berechnen, wohin der Wille Ihrer vier Hunde Sie führt oder wie sich das Flugzeug durch die Lüfte bewegt, ist es erforderlich, die auf den jeweiligen Körper wirkende *Gesamtkraft* zu ermitteln. Diese Gesamtkraft bestimmt dann die Beschleunigung des Körpers.

Kräfte sind *Vektoren*. Infolgedessen kann man mithilfe der Vektorrechnung die resultierende Gesamtkraft berechnen, wenn mehr als eine Kraft auf einen Körper wirkt:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Ges}} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Diese Gesamtkraft bestimmt die Beschleunigung des Körpers:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Ges}} = m\mathbf{a}$$

Abbildung 4.3 zeigt einen Massenpunkt, an dem die folgenden drei Kräfte ziehen:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

Wie groß ist die Gesamtkraft, und in welche Richtung wirkt sie?

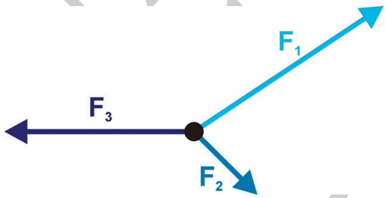



*Abbildung 4.3: Drei Kräfte wirken auf einen Körper.*

Die Frage lässt sich sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch beantworten, wenn man die Regeln der Vektoraddition benutzt, die im mathematischen Anhang in Kapitel 50 aufgeführt sind. Die zeichnerische Lösung ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

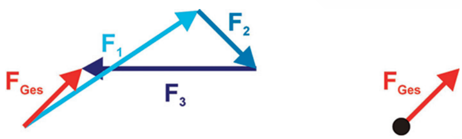



*Abbildung 4.4: Die resultierende Gesamtkraft*

Als rechnerische Lösung erhält man:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{Ges}} &= \mathbf{F_1} + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\text{N} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\text{N} + \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\text{N}\\ &= \begin{pmatrix}3+1-3\\2-1+0\end{pmatrix}\text{N} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{N}\end{aligned}$$

## *Kräfte zerlegen*

In vielen Fällen ist es also sinnvoll, alle Kräfte, die auf einen Massenpunkt wirken, vektoriell zu addieren, um die Gesamtkraft auf diesen Punkt zu ermitteln. Es gibt aber auch Situationen, in denen die gegenteilige Operation weiterhilft, um eine Aufgabenstellung zu lösen: die vektorielle Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten, die vorzugsweise senkrecht aufeinander stehen. Ein typisches Beispiel für eine solche Zerlegung sind die Kräfte, die auf Körper auf einer schiefen Ebene wirken.

Abbildung 4.5 zeigt eine Kraft **F** = 100 N, die in zwei Komponenten in die $x$- und $y$-Richtungen des kartesischen Koordinatensystems zerlegt wird, wobei der Winkel $\alpha = 35^\circ$ beträgt. Für die beiden Komponenten gilt:

$$\begin{aligned}F_x &= F\cos\alpha = 100\ \text{N}\cdot\ \cos\left(35^\circ\right) = 81{,}9\ \text{N}\\ F_y &= F\sin\alpha = 100\ \text{N}\cdot\ \sin\left(35^\circ\right) = 57{,}4\ \text{N}\end{aligned}$$

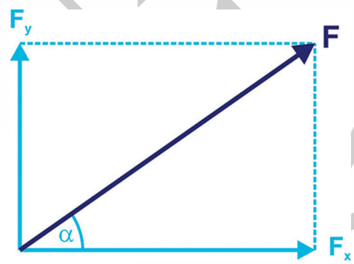



*Abbildung 4.5: Zerlegung einer Kraft in zwei zueinander senkrechte Komponenten*

Prüft man dies mithilfe des Satzes von Pythagoras, so ergibt sich:

$$F = \sqrt{81,9^2 + 57,4^2}\ \text{N} = 100\ \text{N}$$

Besonders hilfreich ist eine derartige Zerlegung zum Beispiel bei einem Körper auf einer schiefen Ebene. Hier ist es sinnvoll, die Gewichtskraft $F_{\text{G}}$ in eine Kraft $F_{\text{GII}} = F_{\text{G}} \sin\alpha$, die den Körper parallel zur Oberfläche beschleunigt, und eine Komponente $F_{\text{G}} = F_{\text{G}\perp} \cos\alpha$ senkrecht dazu und damit senkrecht zur Grenzfläche zu zerlegen (Abbildung 4.6).

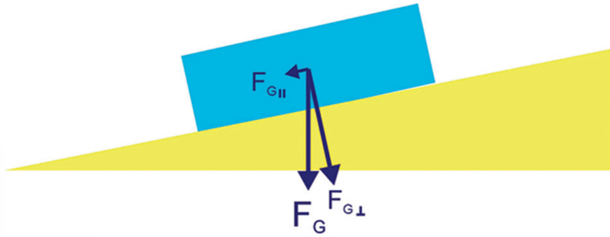



*Abbildung 4.6: Zerlegung einer Gewichtskraft*

## Jede Masse besitzt zwei Eigenschaften

Bislang wurde in der obigen Diskussion der Begriff der *Masse* mehrfach verwendet, ohne dass er definiert wurde. Dies soll nun nachgeholt werden. Oben wurde bereits dargestellt, dass die Masse $m$ der Proportionalitätsfaktor im Trägheitsgesetz ist:

$$F = ma$$

Die Einheit der Masse ist das *Kilogramm* (kg). Die Definition des Kilogramms finden Sie in dem Kasten über das Urkilogramm.

Das Kilogramm ist die einzige Basiseinheit der Physik, deren Name bereits eine Vorsilbe enthält. Infolgedessen beziehen sich Teile beziehungsweise Vielfache der Masse, die durch Vorsilben ausgedrückt werden sollen, nicht auf die eigentliche Einheit Kilogramm, sondern auf das Gramm.

Damit kennen Sie eine der beiden Eigenschaften jeder Masse: Jede Masse ist *träge*; sie widersetzt sich dem Trägheitsgesetz zufolge einer Beschleunigung durch eine Kraft. Aus ihrem alltäglichen Leben wissen Sie aber auch, dass Massen *schwer* sind. Sie fallen zu Boden, wenn sie die Möglichkeit dazu haben.

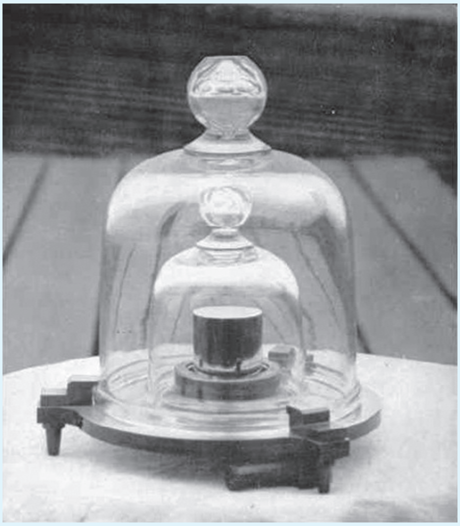
Massen besitzen also zwei Eigenschaften:

- ✓ Jede Masse ist träge.
- ✓ Jede Masse ist schwer.

Diese beiden Eigenschaften einer jeden Masse werden in den folgenden Abschnitten diskutiert. Dabei wird sich herausstellen, dass beide zunächst einmal nichts miteinander zu tun haben. Um so erstaunlicher ist es, dass in Bezug auf die Zahlenwerte keine Unterschiede zwischen träger und schwerer Masse zu existieren scheinen.

## Ein Klotz in Paris: Das Urkilogramm

In Kapitel 3 wurden die Basisgrößen Meter und Sekunde definiert, und es wird Sie sicherlich überrascht haben, wie komplex die Definitionen dieser beiden Größen sind, die jedem Menschen aus dem alltäglichen Leben sehr vertraut sind. Insbesondere die Anzahl der Stellen der verwendeten Zahlen ist erstaunlich. Genauso wird es Sie an dieser Stelle überraschen, das die Definition des Kilogramms dagegen ziemlich einfach ist: In Sèvres bei Paris steht ein Platin-Iridium-Zylinder (das *Urkilogramm*), dessen Masse genau ein Kilogramm beträgt (Abbildung 4.7). Das klingt erstaunlich banal und erinnert an die frühere Definition des Meters über das Urmeter, die in Kapitel 3 vorgestellt wurde.



mit freundlicher Genehmigung des National Institute of Standards and Technology (NIST)

*Abbildung 4.7: Das Urkilogramm in Sèvres bei Paris. Achten Sie auf den zweifachen Exsikkator, wodurch absolute Trockenheit gewährleistet werden soll.*

Im Zusammenhang mit dem Urkilogramm sollten die folgenden Fakten erwähnt werden:

- ✓ Das Material des Urkilogramms ist eine Legierung aus 90 % Platin und 10 % Iridium, die chemisch extrem widerstandsfähig ist.
- ✓ Seine Abmessungen sind 39 mm Höhe und 39 mm Durchmesser.
- ✓ Das Urkilogramm wird im *Internationalen Büro für Maße und Gewichte* (BIPM, Bureau International des Poids et Mesures) in Sèvres bei Paris aufbewahrt.
- ✓ Kopien befinden sich in verschiedenen Instituten unter anderem in der *Physikalisch-Technischen Bundesanstalt* (PTB) in Braunschweig.

- Vor jeder Messung muss das Urkilogramm gereinigt werden, um Verschmutzungen der Oberfläche auszuschließen. Dafür gibt es genau spezifizierte Reinigungsvorschriften.

Derzeit laufen Projekte, das Kilogramm mit besserer Genauigkeit etwa über die Masse bestimmter Atomisotope zu definieren, wobei sich die Schwierigkeit ergibt, die Avogadrozahl (Kapitel 32) so genau wie möglich kennen zu müssen.

## Träge Masse

Die träge Masse eines Körpers widersetzt sich dem zweiten Newton'schen Gesetz zufolge jeder Bewegungs*änderung* (nicht jeder Bewegung). Das Trägheitsgesetz besagt, dass eine Kraft erforderlich ist, um einen Körper zu beschleunigen. Um eine bestimmte Beschleunigung zu erzielen, muss die Kraft dem zweiten Newton'schen Gesetz zufolge umso größer sein, je größer die Masse des Körpers ist:

$$a = \frac{F}{m}$$

## Massen sind nicht nur träge, sie sind auch schwer

Sie wissen natürlich, dass Massen zu Boden fallen, wenn man sie hochhält und dann loslässt. Wenn es sich um eine kostbare Vase handelt, haben Sie natürlich Pech gehabt. Aus der vorangegangenen Diskussion geht hervor, dass Massen nur dann ihren Bewegungszustand ändern, wenn eine Kraft auf sie einwirkt. Diese Kraft muss beim Fall der Vase nach unten wirken. Die Ursache dieser Kraft, die gerade Ihre kostbare Vase ruiniert hat, ist die Gravitationskraft, in diesem Fall die Gravitationskraft zwischen Ihrer geliebten Vase und der Erde. Die Gravitationskraft beruht auf der Tatsache, dass sich zwei beliebige Massen gegenseitig anziehen. Dies geht aus dem Gravitationsgesetz hervor, das im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

## Massen ziehen sich an: Das Gravitationsgesetz

Das *Gravitationsgesetz*, das im Übrigen auch von Newton aufgestellt wurde, besagt: Zwei beliebige Massen $m_1$ und $m_2$ im Abstand $r$ ziehen sich gegenseitig an (Abbildung 4.8). Die zwischen ihnen wirkende anziehende Kraft ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$F_{\text{Gravi}} = -\gamma \, \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Die Konstante $\gamma$ wird *Gravitationskonstante* genannt. Sie ist relativ klein und beträgt:

$$\gamma = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kgs}^2$$

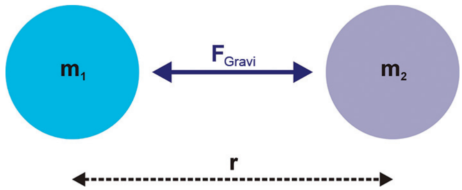



*Abbildung 4.8: Zum Gravitationsgesetz*

Diese Gravitationskraft wirkt entlang der Verbindungslinie der beiden Körper. Um dies in vektorieller Schreibweise auszudrücken, kann man das Gravitationsgesetz auch wie folgt schreiben:

$$\mathbf{F}_{\text{Gravi}} = -\gamma \, \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|r|}$$

Der Ausdruck $\mathbf{r}/|r|$ hat den Betrag eins. Man bezeichnet ihn daher auch als *Einheitsvektor*. Er dient ausschließlich dazu, die Richtung der Kraft anzugeben.

Da die Gravitationskonstante sehr klein ist, ist es unmöglich, die Gravitationskraft im alltäglichen Leben zu beobachten – wenn nicht einer der beiden Körper ein Himmelskörper wie Erde, Mond oder Sonne ist. Wenn Sie eine Zigarettenschachtel und ein Feuerzeug auf einen Tisch legen, ziehen sich beide natürlich an. Dennoch bewegen sie sich nicht aufeinander zu. Die Gravitationskraft ist in diesem Fall zu klein, um die auftretenden Reibungskräfte zu überwinden. Es gibt jedoch eine ausgefuchste Versuchsanordnung, mit der man auch auf der Erde die Gravitation zwischen zwei relativ leichten Massen nachweisen kann. Nähere Einzelheiten finden Sie in dem Kasten über die Gravitationswaage.

## Überall auf der Eroberfläche gleich: Die Erdbeschleunigung

Angeblich hat Newton die Gravitation entdeckt, als er unter einem Apfelbaum lag und einen Apfel vom Baum fallen sah. Die logische Frage an dieser Stelle ist: Wenn die Erde den Apfel anzieht, müsste dann dem Gravitationsgesetz zufolge nicht auch der Apfel die Erde anziehen? Die Antwort ist einfach: Natürlich zieht der Apfel die Erde an! Allerdings ist die Masse der Erde so gewaltig groß, dass man die Auswirkung dieser Anziehung nicht beobachten kann.

Dies gilt für die meisten Vorgänge, die direkt auf der Oberfläche der Erde stattfinden (und dort findet das Leben der Menschen überwiegend statt), und an denen Gegenstände beteiligt sind, deren Masse sehr viel kleiner ist als die der Erde: Man beobachtet die Gravitationskraft anhand der Wirkung auf den Körper. Die Wirkung auf die Erde ist nicht feststellbar. Man kann daher das Gravitationsgesetz etwas umschreiben und daraus eine neue wichtige Größe gewinnen. Betrachten Sie einen Gegenstand nahe der Erdoberfläche, etwa einen Ball von

0,5 kg, den Sie in einer Höhe von 1 m über dem Boden halten. Zwischen Ball und Erde herrscht die folgende Gravitationskraft:

$$F_G = -\gamma \frac{m_{\text{Ball}} m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2}$$

Der Erdradius beträgt 6370 km, also kann man die Höhe von 1 m, in der sich der Ball befindet, getrost vernachlässigen und den Erdradius für $r$ einsetzen. Zieht man die Masse des Balls $m_{\text{Ball}}$ aus dem Bruch, ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$F_G = -\gamma \frac{m_{\text{Erde}}}{r_{\text{Erde}}^2} \cdot m_{\text{Ball}}$$

Die Masse der Erde beträgt $5{,}974 \times 10^{24}$ kg. Setzt man alle Zahlen ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_G &= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kgs}^2 \cdot \frac{5{,}97 \times 10^{24}\ \text{kg}}{(6{,}37 \times 10^6\ \text{m})^2} \cdot m_{\text{Ball}} \\ &= 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot m_{\text{Ball}} = g \cdot m_{\text{Ball}} \end{aligned}$$

Die Größe $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ wird *Erdbeschleunigung* (oder Fallbeschleunigung) genannt. Sie wirkt auf jeden Körper auf der Erdoberfläche in Richtung Erdmittelpunkt.

## Massen ziehen sich an: Die Gravitationswaage

Das Gravitationsgesetz besagt, dass sich zwei beliebige Massen gegenseitig anziehen:

$$F_{\text{Gravi}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Die Gravitationskonstante $\gamma$ ist ziemlich klein, deshalb ist es schwierig, die Anziehung zweier leichter Körper nachzuweisen. Um ein Beispiel zu geben: Die Kraft zwischen zwei Massen von je 1 kg im Abstand von 10 cm beträgt:

$$F_{\text{Gravi}} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/\text{kgs}^2 \frac{1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}}{(0{,}1\ \text{m})^2} = 6{,}67 \times 10^{-9}\ \text{N}$$

Zum Vergleich: Die Gewichtskraft einer Tafel Schokolade beträgt etwa 1 N.

Dennoch ist es möglich, die gegenseitige Anziehung zweier relativ kleiner Massen auch auf der Erdoberfläche nachzuweisen. Dieses Experiment wurde erstmals 1798 von Henry Cavendish (1731–1810) durchgeführt und wird daher *Cavendish-Experiment* genannt, seine in Abbildung 4.9 dargestellte Versuchsanordnung heißt auch *Gravitationswaage*.

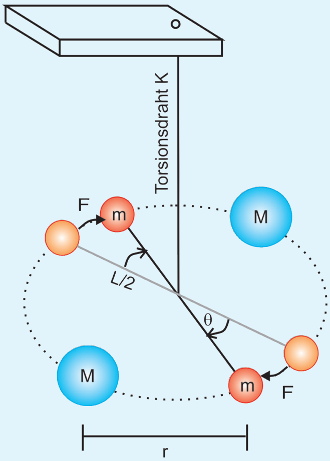



*Abbildung 4.9: Eine Gravitationswaage*

An einem Metalldraht sind zwei Massen $m$ aufgehängt, die durch eine Stange miteinander verbunden sind. Diese Anordnung bildet ein *Torsionspendel*, das ausführlich in Kapitel 13 erörtert wird. Bringt man nun zwei schwerere Massen $M$ symmetrisch neben die beiden Testmassen $m$, wirkt eine Kraft $F$ zwischen $m$ und $M$, wodurch sich die Testmassen $m$ bewegen. Als Folge verdrillt sich der Draht des Pendels. Diese Verdrillung lässt sich nachweisen; heute bestimmt man sie, indem man etwa einen kleinen Spiegel an dem Draht befestigt und die Auslenkung eines auf den Spiegel gerichteten Laserstrahls misst. Auf diese Weise ist es möglich, die Gravitationskonstante zu bestimmen.

## Gleich und doch nicht gleich

Im folgenden Beispiel wird der Unterschied zwischen träger und schwerer Masse besonders deutlich. Deshalb werden im Folgenden die Indizes t und s verwendet, um beide zu unterscheiden, was sonst nicht üblich ist.


Betrachten Sie einen Körper der Masse $m$, der zu Boden fällt. Wie kann man diesen Vorgang beschreiben? Welche der beiden Massen spielt wo eine Rolle?

Der Körper erfährt eine nach unten gerichtete Gewichtskraft $F_G$, die auf der schweren Masse beruht, und für die gilt:

$$F_G = m_s g$$

Diese Gewichtskraft bewirkt eine Beschleunigung $a$, die zur trägen Masse proportional ist:

$$F_G = m_t a$$

Daraus ergibt sich:

$$m_s g = m_t a$$

Bislang konnten zwischen der trägen und der schweren Masse eines Körpers keine Unterschiede festgestellt werden, obwohl im Laufe der Zeit sehr viel Aufwand darauf verwendet wurde. Es gilt also:

$$m_s = m_t$$

Aus dieser Diskussion kann man zwei wichtige Schlussfolgerungen ziehen:

- ✓ Auf der Erdoberfläche erfährt jeder Körper die folgende Beschleunigung in Richtung Erdmittelpunkt:

  $$a = g$$

- ✓ Die Beschleunigung, die ein Körper auf der Erdoberfläche erfährt, ist unabhängig von seiner Masse.

### Dichte

Im Zusammenhang mit der Masse von Körpern gibt es noch eine weitere wichtige Größe, die allerdings irrelevant ist, solange man es nur mit Massenpunkten zu tun hat, die aber bei realen Körpern eine wichtige Rolle spielt.

Die Dichte eine Körpers ist das Verhältnis seiner Masse zu seinem Volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Die Einheit der Dichte ist $kg/m^3$, aber in vielen Tabellen findet man die Angaben in $g/cm^3$. Es gilt: $1000\ kg/m^3 = 1\ g/cm^3$.

Die Dichte von Körpern oder Materialien wird in diesem Buch an vielen Stellen auftauchen.

## Auch Kräfte können träge sein: Das d'Alembertsche Prinzip

Sie kennen sicherlich Situationen wie die folgenden: Sie sitzen in einem Zug, der plötzlich bremst. Bei dieser Bremsung werden Sie nach vorne geworfen. Sitzen Sie in einem Auto, das durch eine enge Kurve fährt, werden Sie nach außen gedrückt. Wenn man als außenstehender Beobachter diese Situationen betrachtet, wundert man sich. Ein Zug bremst, und auf die

Passagiere wirkt offensichtlich eine Kraft, die man selbst nicht verspürt. Ein Auto fährt durch eine Kurve, und die Insassen erfahren eine Kraft, die außenstehende Beobachter nicht wahrnehmen und auch nicht einfach klären können. Beide Kräfte sind sogenannte Trägheitskräfte.

## Schein oder nicht Schein: Trägheitskräfte

*Trägheitskräfte* treten in beschleunigten Systemen auf. Die Körper in derartigen Systemen möchten aufgrund des Trägheitsgesetzes ihre Geschwindigkeit beibehalten. Sie verspüren daher eine Kraft, die der Beschleunigung entgegengesetzt ist. Ein Beobachter außerhalb des Systems spürt diese Kraft nicht. Trägheitskräfte werden daher auch *Scheinkräfte* genannt.

Trägheitskräfte sind aber durchaus real. Das wird jeder Autofahrer bestätigen, der schon einmal aus der Kurve geflogen ist. Abbildung 4.10 zeigt ein weiteres Beispiel.

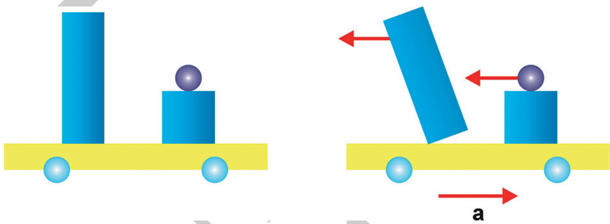



*Abbildung 4.10: Das Auftreten von Trägheitskräften*

Auf einem ruhenden Wagen befinden sich ein aufrecht stehender Zylinder und ein Würfel, auf dem wiederum eine Kugel liegt. Beschleunigt man den Wagen nach rechts, so erfahren alle drei Körper eine Trägheitskraft nach links, für die gilt:

$$F_{\mathrm{T}} = -m_{\text{Körper}} a$$

Allerdings reagieren die drei Körper aufgrund der Situation unterschiedlich auf diese Trägheitskraft:

- ✓ Der Würfel verbleibt an seinem Ort auf dem Wagen, da die Trägheitskraft nicht ausreicht, die Reibungskraft (Kapitel 9) zu überwinden.
- ✓ Auch der Zylinder verspürt sowohl Trägheitskraft als auch Reibungskraft. Da er nicht in der Lage ist zu rutschen, kippt er nach links.
- ✓ Die Kugel rollt aufgrund der Trägheitskraft nach links und fällt dann aufgrund der Gewichtskraft nach unten, wo sie dann nach links weiterrollt.

Trägheitskräfte werden immer dann beobachtet, wenn ein System beschleunigt wird und sich in ihm Körper befinden, die mitbeschleunigt werden, aber in der Lage sind, sich innerhalb des Systems frei zu bewegen (wenn die Kugel in Abbildung 4.10 auf dem Würfel festgeklebt ist, wird sie natürlich dort liegen bleiben). Zu den wichtigsten Trägheitskräften gehören:

- ✓ Die oben diskutierten Trägheitskräfte bei linear beschleunigten Systemen (Abbildung 4.10).
- ✓ Die *Zentrifugalkraft*. Sie tritt bei Kreisbewegungen auf und wird ausführlich in Kapitel 7 diskutiert.
- ✓ Die *Corioliskraft* tritt bei der Rotation von Körpern auf und wird in Kapitel 8 näher behandelt.

## Die Summe von Kräften und Trägheitskräften ist null

Aus der obigen Darstellung geht hervor, dass auf einen Körper, der sich in einem beschleunigten System befindet, nicht nur die Kraft $\mathbf{F}$ wirkt, die diese Beschleunigung hervorruft, sondern auch noch eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Trägheitskraft $\mathbf{F}_\mathrm{T}$. Erstere bewirkt die Beschleunigung des Körpers:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Die Trägheitskraft wirkt dem entgegen, sodass gilt;

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m\mathbf{a}$$

Das Prinzip von d'Alembert besagt: Für einen mitbeschleunigten Beobachter ist die Summe aller äußeren Kräfte und aller Trägheitskräfte gleich null:

$$\sum_i F_i + \sum_i F_{\mathrm{Ti}} = 0$$

Wenn man in die Literatur schaut oder auch nur bei Wikipedia nachsieht, findet man ellenlange Diskussionen über die Verwendung des d'Alembert'schen Prinzips. In der Physik spielt es keine wesentliche Rolle, wohl aber in den Ingenieurwissenschaften, vor allem in der technischen Mechanik. Lassen Sie sich davon nicht beeindrucken. Wenn Ihnen das d'Alembert'sche Prinzip bei einer Problemstellung weiterhilft, sollten Sie es unbedingt verwenden.

Betrachten Sie als Beispiel Abbildung 4.11. Sie zeigt einen fallenden Körper, auf den zwei Kräfte wirken: die Gewichtskraft $F_\mathrm{G}$ nach unten und der Luftwiderstand $F_\mathrm{LW}$ (Kapitel 9) nach oben. Wenn Sie sich auf dem fallenden Körper befinden, verspüren Sie überhaupt keine Kraft. Also existiert eine Trägheitskraft $F_\mathrm{T}$, für die gilt (Abbildung 4.11b):

$$F_\mathrm{T} = -(F_\mathrm{G} - F_\mathrm{LW})$$

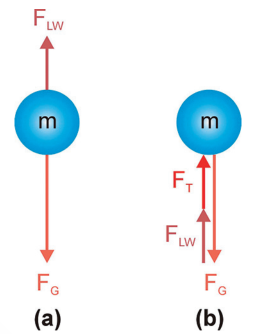



*Abbildung 4.11: Zum Prinzip von d'Alembert*

Bei einem beschleunigten System bilden alle auf einen Körper wirkenden Kräfte und Trägheitskräfte einen geschlossenen *Kräftezug*.

Das Arbeiten mit Trägheitskräften verwandelt *dynamische* Aufgabenstellungen in *statische* Probleme, für die gilt, dass die Resultierende aller Kräfte gleich null ist:

$$\sum F = 0$$

In vielen Fällen hilft dies, bei einer Aufgabenstellung unbekannte Kräfte zu bestimmen.

## Übungsaufgaben zu diesem Kapitel

**Aufgabe 4.1**

Ein Körper mit einer Masse von 35 kg ruht auf einer schiefen Ebene mit einer Neigung von $\alpha = 22°$. Wie groß ist seine Gewichtskraft? In welche Richtung zeigt sie? Zerlegen Sie diese Kraft in zwei zueinander senkrechte Teilkräfte, sodass eine von ihnen die Kraft ergibt, die den Körper entlang der Ebene beschleunigt.

**Aufgabe 4.2**

Auf einen Massenpunkt wirken drei Kräfte:

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{N} \qquad \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

Wie groß ist die resultierende Kraft, die auf den Punkt wirkt? Bestimmen Sie diese Kraft sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch.

**Aufgabe 4.3**

Ein Koffer von 80 kg steht auf einer schiefen Ebene mit einem Neigungswinkel von 23,5°. Wie groß ist die Beschleunigung, die der Koffer erfährt?

**Aufgabe 4.4**

Welche Kraft ist erforderlich, um ein Auto mit einer Masse von 1100 kg in 8,1 s von 0 auf 100 km/h zu beschleunigen?

**Aufgabe 4.5**

Wie groß ist die »Mondbeschleunigung«, also die Beschleunigung, die ein Körper an der Mondoberfläche in Richtung Mondmittelpunkt erfährt? Die Masse des Mondes beträgt $7{,}35 \times 10^{22}$ kg, sein Radius 1738 km.

**Aufgabe 4.6**

Körper in der Nähe der Erde werden von ihr angezogen, Körper in der Nähe des Mondes vom Mond. Irgendwo auf der Verbindungslinie Erde–Mond müssen diese beiden Kräfte gleich groß sein. Wo liegt dieser Punkt $r_g$? ($M_{\text{Erde}} = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M_{\text{Mond}} = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg, mittlerer Abstand Erde–Mond = 384.000 km)