

# ***Inhaltsverzeichnis***

<b><i>Einführung</i></b>	<b>21</b>
Über dieses Buch	21
Konventionen in diesem Buch	22
Was Sie nicht unbedingt lesen müssen	23
Törichte Annahmen über den Leser	23
Wie dieses Buch aufgebaut ist	23
Teil I: Ein kurzer Überblick über die Logik	23
Teil II: Formale Aussagenlogik	24
Teil III: Beweise, Syntax und Semantik in der Aussagenlogik	24
Teil IV: Prädikatenlogik	24
Teil V: Moderne Entwicklungen in der Logik	24
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	25
In diesem Buch verwendete Symbole	25
Wie es weitergeht	25
<b><i>Teil I</i></b>	
<b><i>Ein kurzer Überblick über die Logik</i></b>	<b>27</b>
<b><i>Kapitel 1</i></b>	
<b><i>Logik – was ist das eigentlich?</i></b>	<b>29</b>
Wie man die Dinge logisch sieht	29
Wie man von der Frage zur Antwort kommt	30
Was Ursache und Wirkung miteinander zu tun haben	30
Alles und noch mehr	32
Sein oder Nichtsein	32
Wichtige Wörter in der Logik	33
Wie man Argumente konstruiert	33
Wie man Prämissen aufstellt	34
Wie man mit Zwischenschritten zur Antwort gelangt	34
Wie man eine Konklusion formuliert	34
Wie man entscheidet, ob das Argument gültig ist	35
Was sind Enthymeme?	35
Logische Schlüsse: leicht gemacht durch Denkgesetze	35
Der Satz der Identität	36
Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten	36
Das Gesetz der Nichtwidersprüchlichkeit	36
Wie man Logik und Mathematik miteinander kombiniert	37
Die Mathematik hilft, die Logik zu verstehen	37
Die Logik hilft, die Mathematik zu verstehen	37

**Kapitel 2**

**Die Geschichte der Logik von Aristoteles bis zum Computer** **39**

Die klassische Logik – von Aristoteles bis zur Aufklärung	39
Aristoteles erfindet die syllogistische Logik	40
Euklids Axiome und Theoreme	43
Chrysippos und die Stoiker	44
Die Logik macht Urlaub	44
Die moderne Logik – das 17., 18. und 19. Jahrhundert	45
Leibniz und die Frühaufklärung	45
Der Ausbau zur formalen Logik	46
Freges formale Logik	48
Die Logik im 20. und 21. Jahrhundert	49
Die nichtklassische Logik	50
Gödels Beweis	50
Das Computerzeitalter	51
Auf der Suche nach der endgültigen Grenze	51

**Kapitel 3**

**Die Hauptsache: das Argument** **53**

Was ist Logik?	53
Wie man die Argumentstruktur prüft	54
Die Gültigkeitsprüfung	55
Weitere Beispiele für Argumente	56
Eis am Sonntag	57
Fiffis Kummer	57
Flucht aus Berlin	58
Der Fall des schlecht gelaunten Mitarbeiters	58
Was Logik nicht ist	59
Denken kontra Logik	60
Die Wirklichkeit – was für ein Begriff!	61
Die Schlüssigkeit eines Arguments	61
Deduktion und Induktion	63
Rhetorische Fragen	64
Wozu dient eigentlich die Logik?	66
Wähl eine Zahl (Mathematik)	66
Flieg mit mir zum Mond (Wissenschaft)	67
Schalt ein oder aus (Computerwissenschaft)	67
Erzählen Sie das dem Richter (Recht)	67
Finden Sie den Sinn des Lebens (Philosophie)	68

<b>Teil II</b>	
<b>Formale Aussagenlogik</b>	<b>69</b>
<b>Kapitel 4</b>	
<b>Formales</b>	<b>71</b>
Wichtig: die Formalitäten bei der Aussagenlogik	71
Aussagenkonstanten	72
Aussagenvariablen	72
Wahrheitswerte	73
Die fünf Operatoren der Aussagenlogik	73
Negativ fühlen	74
Nach dem »oder« graben	77
Nun wird es aber heikel	79
Nun wird es sogar noch heikler	81
Warum Aussagenlogik wie einfache Arithmetik ist	83
Die Ein- und Ausgabe von Werten	83
Für einen Stellvertreter gibt es keinen Ersatz	84
Wir setzen Klammern	85
Lost in Translation	85
Der einfache Weg – das Übersetzen aus der Aussagenlogik ins Deutsche	86
Der nicht-so-einfache Weg – das Übersetzen aus dem Deutschen in die Aussagenlogik	87
<b>Kapitel 5</b>	
<b>Der Wert der Bewertung</b>	<b>91</b>
Der Wert ist das Entscheidende	91
Wie man mit der Bewertung von Aussagen vertraut wird	92
Wie man ein weiteres Verfahren ausprobiert	94
Wie man eine Aussage macht	95
Wie man Teilaussagen ermittelt	95
Wie man eine Aussage eingrenzt	96
Der Hauptanziehungspunkt: die Suche nach den Hauptoperatoren	98
Die acht verschiedenen Aussagen in der Aussagenlogik	100
Teile vom Ganzen	100
Kommen wir auf die Bewertung zurück	101
<b>Kapitel 6</b>	
<b>Wie man mit Wahrheitstafeln Aussagen bewertet</b>	<b>103</b>
Kommen Sie mal nach vorne an die Tafel! Von der Freude an der rohen Gewalt	103
Die erste Wahrheitstafel für Abc-Schützen	104
Wie man eine Wahrheitstafel erstellt	104
Wie man eine Wahrheitstafel ausfüllt	107
Wie man eine Wahrheitstafel analysiert	110
Wie man Wahrheitstafeln einsetzt	110

Wie man es mit Tautologien und Kontradiktionen aufnimmt	110
Woran man semantische Äquivalenz erkennt	111
Wie man konsistent bleibt	113
Wie man sich um die Gültigkeit streitet	115
Wie man die Teile zusammensetzt	117
Wie man Tautologie und Kontradiktion miteinander verbindet	118
Wie man semantische Äquivalenz und Tautologie miteinander verbindet	119
Wie man Inkonsistenz und Kontradiktion miteinander verbindet	120
Wie man Gültigkeit und Kontradiktion miteinander verbindet	121

## ***Kapitel 7***

### ***Die einfache Lösung: Wie man Schnelltafeln erstellt*** **123**

Wie man der Wahrheitstafel wegen einer neuen Freundin den Laufpass gibt: die Schnelltafel	124
Eine kurze Zusammenfassung des Schnelltafelverfahrens	125
Wie man eine strategische Annahme aufstellt	125
Wie man eine Schnelltafel ausfüllt	126
Wie man eine Schnelltafel deutet	126
Wie man eine Annahme widerlegt	127
Wie man seine Strategie plant	128
Tautologie	128
Kontradiktion	129
Logisch nicht determinierte Aussagen	129
Semantische Äquivalenz oder Nichtäquivalenz	129
Konsistenz und Inkonsistenz	130
Gültigkeit und Ungültigkeit	130
Wie man mit Schnelltafeln eleganter arbeitet	131
Wie man die sechs einfachsten Typen von Aussagen erkennt und mit ihnen arbeitet	131
Wie man mit den vier nicht-so-einfachen Aussagentypen arbeitet	133
Wie man die sechs schwierigen Aussagentypen bewältigt	135

## ***Kapitel 8***

### ***Die Wahrheit wächst auf Bäumen*** **139**

Wie Wahrheitsbäume funktionieren	139
Wie man Aussagen zerlegt	140
Wie man mit Bäumen Aufgaben löst	142
Wie man Konsistenz oder Inkonsistenz aufzeigt	142
Wie man auf Gültigkeit oder Ungültigkeit testet	145
Wie man Tautologien, Kontradiktionen und logisch nicht determinierte Aussagen voneinander trennt	147
Tautologien	147
Kontradiktionen	150
Logisch nicht determinierte Aussagen	153
Wie man auf semantische Äquivalenz testet	153

<b>Teil III</b>	
<b><i>Beweise, Syntax und Semantik in der Aussagenlogik</i></b>	<b>157</b>
<b>Kapitel 9</b>	
<b><i>Was müssen Sie beweisen?</i></b>	<b>159</b>
Wie man von der Prämisse zur Konklusion gelangt	159
Wie man in der Aussagenlogik die Implikationsregeln anwendet	161
Die $\rightarrow$ -Regeln: Modus ponens und Modus tollens	161
Die $\&$ -Regeln: Konjunktion und Simplifikation	164
Die $\vee$ -Regeln: Addition und disjunktiver Syllogismus	167
Die beiden $\rightarrow$ -Regeln: hypothetischer Syllogismus und konstruktives Dilemma	169
<b>Kapitel 10</b>	
<b><i>Chancengleichheit: wie man den Äquivalenzregeln Arbeit verschafft</i></b>	<b>173</b>
Wie man Implikationen und Äquivalenzen voneinander unterscheidet	173
Warum Äquivalenzen wahre Tausendsassa sind	174
Wie man Äquivalenzen von einem Teil auf das Ganze anwendet	174
Woran man die zehn gültigen Äquivalenzen erkennt	174
Doppelte Negation (DN)	175
Kontraposition (Kontra)	175
Implikation (Impl)	176
Exportation (Exp)	178
Kommutation (Kom)	179
Assoziation (Ass)	179
Distribution (Dist)	180
DeMorgan-Theorem (DeM)	182
Tautologie (Taut)	183
Äquivalenz (Äquiv)	183
<b>Kapitel 11</b>	
<b><i>Konditionalbeweise und indirekte Beweise</i></b>	<b>187</b>
Wie man die Prämissen mit dem Konditionalbeweis aufarbeitet	187
Wir lernen den Konditionalbeweis kennen	188
Wie man Änderungen an der Konklusion vornimmt	190
Wie man Annahmen aussondert	192
Indirekt denken: Wie man Argumente mit indirekten Beweisen beweist	193
Was ist ein indirekter Beweis?	194
Wie man kurze Konklusionen beweist	195
Wie man Konditionalbeweise und indirekte Beweise miteinander kombiniert	196

## Kapitel 12

### Wie man alles zusammenpackt:

<b>strategisch vorgehen, um jeden Beweis blitzschnell zu knacken</b>	<b>199</b>
Leichte Beweise: den richtigen Ansatz wählen	200
Schauen Sie sich die Aufgabe an	200
Schreiben Sie den leichten Kram auf	201
Wie geht es weiter?	203
Moderate Beweise: Wann wendet man den Konditionalbeweis an?	203
Die drei freundlichen Formen: $x \rightarrow y$ , $x \vee y$ und $(x \wedge y)$	204
Die beiden weniger freundlichen Formen: $x \leftrightarrow y$ und $\sim(x \leftrightarrow y)$	205
Die drei unfreundlichen Formen: $x \wedge y$ , $\sim(x \vee y)$ und $\sim(x \rightarrow y)$	207
Schwierige Beweise: Was macht man, wenn es immer komplizierter wird?	207
Treffen Sie überlegt eine Wahl zwischen einem direkten und einem indirekten Beweis	207
Arbeiten Sie sich rückwärts von der Konklusion ab vor	209
Vertiefen Sie sich in die Aussagen der Aussagenlogik	211
Zerlegen Sie lange Prämissen	214
Stellen Sie eine scharfsinnige Vermutung an	216

## Kapitel 13

### Einer für alle und alle für einen

<b>Einer für alle und alle für einen</b>	<b>219</b>
Wie man sich mit den fünf Operatoren der Aussagenlogik behelfen kann	219
Stellenabbau – eine wahre Geschichte	221
Die Tyrannei der Macht	222
Es kommt zum Aufstand	222
Die Zwickmühle	223
Der geniale Shefferstrich	224
Die Moral von der Geschichte	225

## Kapitel 14

### Syntaktische Manöver und semantische Betrachtungen

<b>Syntaktische Manöver und semantische Betrachtungen</b>	<b>227</b>
Wohlgeformte Formeln (WFF) und nichtwohlgeformte	227
Was sind WFFs?	228
Die Regeln werden gelockert	229
WFFs werden von den Nicht-WFFs getrennt	230
Der Vergleich zwischen Aussagenlogik und boolescher Algebra	231
Die Zeichen lesen	231
Mathematik betreiben	233
Syntax und Semantik der booleschen Algebra erforschen	234

<b>Teil IV</b>	
<b>Prädikatenlogik</b>	<b>235</b>
<b>Kapitel 15</b>	
<b>Wie man Quantität mit Qualität ausdrückt:</b>	
<b>Die Prädikatenlogik stellt sich vor</b>	<b>237</b>
Werfen wir einen kurzen Blick auf die Prädikatenlogik	238
Wie man Individuenkonstanten und Eigenschaftskonstanten einsetzt	238
Die Operatoren der Aussagenlogik kommen ins Spiel	240
Wofür die Individuenvariablen stehen	241
Wie sich Quantität mit zwei neuen Operatoren ausdrücken lässt	242
Was ist ein Allquantor?	242
Wie man »Es gibt-Aussagen« einfängt	243
Der jeweilige Individuenbereich	244
Wie man Aussagen und Aussageformen auseinanderhält	246
Wie man den Skopus eines Quantors bestimmt	246
Wir entdecken gebundene Variablen und freie Variablen	247
Welcher Unterschied besteht zwischen Aussagen und Aussageformen?	247
<b>Kapitel 16</b>	
<b>Übersetzungen in die Prädikatenlogik</b>	<b>249</b>
Wie man die vier Grundformen kategorischer Aussagen übersetzt	249
»Alle« und »einige«	249
»Nicht alle« und »kein«	252
Alternative Übersetzungen der Grundformen	253
Wie man »alle« mit $\exists$ und $\sim$ übersetzt	253
Wie man »einige« mit $\forall$ und $\sim$ übersetzt	254
Wie man »nicht alle« mit $\exists$ übersetzt	254
Wie man »kein« mit $\forall$ übersetzt	255
Wie man maskierte Aussagen identifiziert	255
»Alle«-Aussagen erkennen	256
»Einige«-Aussagen erkennen	256
»Nicht alle«-Aussagen erkennen	256
»Kein«-Aussagen erkennen	257
<b>Kapitel 17</b>	
<b>Mit der Prädikatenlogik die Gültigkeit von Argumenten beweisen</b>	<b>259</b>
Wie man Regeln aus der Aussagenlogik in der Prädikatenlogik einsetzt	259
Der Vergleich von Aussagen der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik	260
Wie man die acht Implikationsregeln der Aussagenlogik	
in die Prädikatenlogik überträgt	260
Wie man in der Prädikatenlogik die zehn Äquivalenzregeln einsetzt	263

Wie man Aussagen mithilfe der Quantorennegation (QN) transformiert	263
Die Quantorennegation stellt sich vor	264
Wie man QN bei Beweisen einsetzt	265
Die vier Quantorenregeln	266
Leichte Regel Nr. 1: die universelle Instanziierung (UI)	267
Leichte Regel Nr. 2: die existenzielle Generalisierung	270
Die nicht-so-einfache Regel Nr. 1: die existenzielle Instanziierung (EI)	272
Die nicht-so-einfache Regel Nr. 2: die universelle Generalisierung (UG)	276
<b>Kapitel 18</b>	
<b><i>Gute Beziehungen und positive Identitäten</i></b>	<b>281</b>
Was sind Relationen?	281
Wie man Relationen definiert und nutzt	282
Wie man relationale Ausdrücke miteinander verknüpft	283
Wie man Quantoren bei Relationen verwendet	283
Wie man mit mehreren Quantoren arbeitet	284
Wie man Beweise mit Relationen erstellt	286
Wie man Identitäten identifiziert	288
Was sind Identitäten?	289
Wie man Beweise mit der Identität erstellt	289
<b>Kapitel 19</b>	
<b><i>Wir pflanzen viele Bäumchen</i></b>	<b>293</b>
Wie Sie Ihr Wissen über Wahrheitsbäume in der Prädikatenlogik anwenden können	293
Der Einsatz der Zerlegungsregeln aus der Aussagenlogik	293
UI, EI und QN gesellen sich dazu	295
Der wiederholte Einsatz von UI	297
Nicht-endende Bäume	300
<b>Teil V</b>	
<b><i>Moderne Entwicklungen in der Logik</i></b>	<b>303</b>
<b>Kapitel 20</b>	
<b><i>Computerlogik</i></b>	<b>305</b>
Frühe Computer	305
Babbage entwirft die ersten Computer	305
Turing und seine Turing-Maschine	306
Das moderne Computerzeitalter	308
Hardware und logische Gatter	308
Software und Computersprachen	310

<b>Kapitel 21</b>	
<b>Die nichtklassische Logik</b>	<b>313</b>
Die Tür zum Möglichen wird aufgestoßen	313
Die dreiwertige Logik	314
Die mehrwertige Logik	315
Die Fuzzy-Logik	316
Klären wir die Modalitäten!	318
Wie man mit Aussagen in indirekter Rede umgeht	320
Die Logik einer höheren Ordnung	320
Über die Konsistenz hinaus	321
Wir setzen zum Quantensprung an	322
Ein Quäntchen Quantenlogik	323
Wir spielen das Hütchenspiel	323
<b>Kapitel 22</b>	
<b>Paradoxe und axiomatische Systeme</b>	<b>325</b>
Die Fundierung der Logik durch die Mengenlehre	325
Die Anordnung der Dinge	326
Der Ärger mit dem Paradox: wie man dieses Problem mit der Mengenlehre angeht	327
Die Lösung des Problems in den Principia Mathematica	328
Die Aussagenlogik als axiomatisches System	329
Wie man Korrektheit und Vollständigkeit beweist	330
Korrektheit und Vollständigkeit von Aussagenlogik und Prädikatenlogik	331
Wie das Hilbert-Programm Logik und Mathematik formalisiert	331
Gödels Unvollständigkeitssatz	332
Die Bedeutung des gödelschen Unvollständigkeitssatzes	332
Wie er es anstellte	332
Was hat das alles zu bedeuten?	333
<b>Teil VI</b>	
<b>Der Top-Ten-Teil</b>	<b>335</b>
<b>Kapitel 23</b>	
<b>Zehn Zitate zur Logik</b>	<b>337</b>
<b>Kapitel 24</b>	
<b>Zehn große Persönlichkeiten der Logik</b>	<b>339</b>
Aristoteles (384–322 v. Chr.)	339
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)	339
George Boole (1815–1864)	339
Lewis Carroll (1832–1898)	340

Georg Cantor (1845–1918)	340
Gottlob Frege (1848–1925)	340
Bertrand Russell (1872–1970)	341
David Hilbert (1862–1943)	341
Kurt Gödel (1906–1978)	341
Alan Turing (1912–1954)	342

<b><i>Stichwortverzeichnis</i></b>	<b>343</b>
------------------------------------	------------