Wissenschaftlich mit Zahlen umgehen

1

In diesem Kapitel ...

- Zahlen in wissenschaftlicher und exponentieller Schreibweise darstellen
- Den Unterschied zwischen Genauigkeit und Präzision aufdecken
- Mit signifikanten Stellen rechnen

Die Chemie ist eine Wissenschaft. Das bedeutet, dass ein Chemiker, so wie viele andere Wissenschaftler auch, Hypothesen durch Experimente überprüft. Je besser das Experiment sein soll, desto verlässlicher müssen die Messungen sein, und gute Messungen sind durch hohe Genauigkeit und Präzision gekennzeichnet. Dies erklärt, weshalb Chemiker sich alle Finger nach High-Tech-Instrumenten lecken; solche Instrumente machen einfach die besseren Messungen. Wie interpretieren Chemiker ihre wertvollen Messungen? Und was ist bei diesen Messungen der Unterschied zwischen Genauigkeit und Präzision? Wie rechnen Chemiker mit den einmal gewonnenen Messwerten? Diese Fragen werden Sie wahrscheinlich nicht die ganze Nacht wachhalten, aber wenn Sie die Antworten darauf kennen, werden Sie deutlich weniger peinliche oder frustrierende Fehler in chemischen Fragestellungen machen. Deshalb widmen wir uns hier diesen Dingen.

Exponentielle und wissenschaftliche Schreibweise zur Interpretation chemischer Messungen anwenden

Da sich die Chemie mit so absurd winzigen Dingen wie Atomen und Molekülen beschäftigt, befinden sich Chemiker oft in der Situation, mit enorm kleinen oder sehr großen Zahlen arbeiten zu müssen. Die Entfernung zwischen zwei Atomen beträgt zum Beispiel gerade einmal einen Zehnmilliardstel Meter. Wenn man hingegen zählen möchte, wie viele Moleküle sich in einem einzigen Wassertropfen befinden, kommt man leicht in den Bereich von Trillionen.

Um mit solch extremen Zahlen besser zurechtzukommen, nutzen Chemiker die wissenschaftliche Schreibweise, die eine besondere Art der exponentiellen Schreibweise darstellt. Bei der *exponentiellen Schreibweise* werden Zahlen mithilfe von Exponenten beschrieben. Jede Zahl wird dabei als Produkt aus einem Koeffizienten und einer Zehnerpotenz angegeben. In der guten alten exponentiellen Schreibweise kann der Koeffizient jede Zahl sein, die mit einer Potenz der Basis 10 multipliziert wird (so wie 10^4). Wissenschaftler haben jedoch eigene Regeln für ihre wissenschaftliche Schreibweise erstellt. Dabei ist ein Koeffizient immer mindestens 1 und kleiner als 10 (also zum Beispiel 7 oder 3,48 oder auch 6,0001).

Um eine sehr große oder sehr kleine Zahl in wissenschaftlicher Schreibweise darzustellen, wird ein Komma zwischen der ersten und zweiten Ziffernstelle eingefügt. Zählen Sie dann, wie viele Stellen Sie von rechts oder links bis zum Komma wandern können: Dieser Wert entspricht der jeweiligen Zehnerpotenz. Wenn Sie nach links gewandert sind, ist die Potenz positiv, wenn Sie nach rechts gezählt haben, ist die Potenz negativ. (Sie wenden die gleiche Prozedur übrigens auch bei der exponentiellen Schreibweise an, der Unterschied besteht hier jedoch darin, dass Sie das Komma an jeder beliebigen Stelle platzieren können und nicht nur zwischen den ersten beiden Ziffern.)

In der wissenschaftlichen Schreibweise sollten die Koeffizienten größer als 1 und kleiner als 10 sein; halten Sie also nach der ersten Ziffer Ausschau, die größer als 0 ist.

Um eine Zahl von der wissenschaftlichen Schreibweise wieder in ihre Dezimalform umzurechnen, multiplizieren Sie einfach den Koeffizienten mit seiner dazugehörigen Zehnerpotenz.

Beispiel

1. Stellen Sie 47 000 in wissenschaftlicher Schreibweise dar.
2. Stellen Sie 0,007345 in wissenschaftlicher Schreibweise dar.

Lösung

1. 47 000 = $4{,}7 \times 10^4$.

Stellen Sie sich zunächst die Zahl als Dezimalzahl vor:

47 000,00

Als Nächstes rücken Sie das Komma zwischen die ersten beiden Ziffern:

4,7000

Dann zählen Sie, um wie viele Stellen Sie das Komma nach links verrückt haben (vier Stellen in unserem Fall) und schreiben diese Zahl als Exponent von 10:

$4{,}7 \times 10^4$.

2. 0,007345 = $7{,}345 \times 10^{-3}$.

Zuerst schieben Sie das Komma zwischen die ersten beiden Ziffern, die nicht 0 sind:

7,345

Dann zählen Sie, um wie viele Positionen Sie das Komma nach rechts verschoben haben (drei Stellen in unserem Fall) und setzen diese Zahl als negativen Exponenten zur Basis 10 ein:

$7{,}345 \times 10^{-3}$

Aufgabe 1.1

Stellen Sie 200 000 in wissenschaftlicher Schreibweise dar.

Aufgabe 1.2

Stellen Sie 80 763 in wissenschaftlicher Schreibweise dar.

Aufgabe 1.3

Stellen Sie 0,00002 in wissenschaftlicher Schreibweise dar.

Aufgabe 1.4

Wandeln Sie $6{,}903 \times 10^{2}$ in die Dezimalschreibweise um.

Multiplizieren und Dividieren in der wissenschaftlichen Schreibweise

Der größte Vorteil der wissenschaftlichen Schreibweise besteht darin, dass folgende Rechenoperationen stark vereinfacht werden. (Ein anderer Vorteil liegt darin, dass Zahlen mit Exponenten nicht nur weniger Schreibarbeit erfordern, sondern zudem auch noch viel cooler aussehen.) Die Vereinfachung durch die wissenschaftliche Schreibweise wird besonders deutlich, wenn man mit diesen Zahlen dividieren oder multiplizieren muss. (Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, lassen sich Addition und Subtraktion zwar mit der exponentiellen Schreibweise viel einfacher durchführen, aber nicht unbedingt mit der strengen wissenschaftlichen Schreibweise.)

Um zwei Zahlen in der wissenschaftlichen Schreibweise miteinander zu multiplizieren, werden zuerst die Koeffizienten miteinander multipliziert und dann die Exponenten addiert. Um zwei Zahlen zu dividieren, müssen Sie zunächst die Koeffizienten dividieren und dann den Exponenten des *Divisors* (der unten stehenden Zahl, des Nenners) vom Exponenten des *Dividenden* (der oben stehenden Zahl, des Zählers) abziehen.

Beispiel

1. Multiplizieren Sie vereinfachend mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise:

   $1{,}4 \times 10^{2} \times 2{,}0 \times 10^{-5}$.

2. Dividieren Sie vereinfachend mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise:

   $3{,}6 \times 10^{-3}/1{,}8 \times 10^{4}$.

Lösung

1. **$2{,}8 \times 10^{-3}$.**

   Zuerst multiplizieren Sie die Koeffizienten miteinander:

   $1{,}4 \times 2{,}0 = 2{,}8$

   Dann addieren Sie die Exponenten der Zehnerpotenzen miteinander:

   $10^{2} \times 10^{-5} = 10^{2+(-5)} = 10^{-3}$

   Zum Schluss führen Sie die Ergebnisse für Koeffizient und Exponent zusammen:

   $2{,}8 \times 10^{-3}$

2. **$2{,}0 \times 10^{-7}$.**

   Zuerst teilen Sie die Koeffizienten:

   $3{,}6/1{,}8 = 2{,}0$

   Dann ziehen Sie den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden ab:

   $10^{-3}/10^{4} = 10^{-3-4} = 10^{-7}$

   Zum Schluss führen Sie die Ergebnisse für Koeffizient und Exponent zusammen:

   $2{,}0 \times 10^{-7}$

Aufgabe 1.5

Multiplizieren Sie $2{,}2 \times 10^{9} \times 5{,}0 \times 10^{-4}$.

Aufgabe 1.6

Dividieren Sie $(9{,}3 \times 10^{-5})/(3{,}1 \times 10^{2})$.

Aufgabe 1.7

Multiplizieren Sie mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise $52 \times 0{,}035$.

Aufgabe 1.8

Dividieren Sie mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise 0,00809/20,3.

Addieren und Subtrahieren mithilfe der exponentiellen Schreibweise

Additionen oder Subtraktionen gehen leichter von der Hand, wenn Zahlen als Koeffizienten identischer Zehnerpotenzen angegeben werden. Um Zahlen in diese Form zu bringen, kann es nötig sein, Koeffizienten kleiner als 1 oder größer als 10 zu benutzen. Daher ist die wissenschaftliche Schreibweise etwas zu beschränkt, um Additionen und Subtraktionen durchzuführen, und man benutzt in diesem Fall die exponentielle Schreibweise.

Um zwei Zahlen auf einfache Weise mithilfe der exponentiellen Schreibweise zu addieren, müssen Sie diese zuerst als Koeffizienten und Zehnerpotenzen darstellen; dabei ist zu beachten, dass beide den gleichen Exponenten tragen. Nun addieren Sie die Koeffizienten. Um Zahlen zu subtrahieren, führen Sie die gleichen Schritte durch, subtrahieren die Koeffizienten aber am Ende.

BEISPIEL

Beispiel

1. Addieren Sie diese Zahlen mithilfe der exponentiellen Schreibweise: $3710 + 2{,}4 \times 10^2$.
2. Verwenden Sie die exponentielle Schreibweise, um die folgende Subtraktion durchzuführen: $0{,}0743 - 0{,}0022$.

Lösung

1. $39{,}5 \times 10^2$.

Zunächst überführen Sie die erste Zahl mithilfe der exponentiellen Schreibweise in die Zehnerpotenz der zweiten Zahl:

$37{,}1 \times 10^2$

Dann addieren Sie die Koeffizienten beider Zahlen:

$37{,}1 + 2{,}4 = 39{,}5$

Zum Schluss führen Sie die Koeffizientensumme wieder mit der gemeinsamen Zehnerpotenz zusammen:

$39{,}5 \times 10^2$

2. $7{,}21 \times 10^{-2}$.

Zuerst formen Sie beide Zahlen so um, dass sie die gleichen Hochzahlen (zur Basis 10) tragen:

$7{,}43 \times 10^{-2}$ und $0{,}22 \times 10^{-2}$

Als Nächstes subtrahieren Sie die Koeffizienten:

$7{,}43 - 0{,}22 = 7{,}21$

Zum Schluss führen Sie den neuen Koeffizienten mit der gemeinsamen Zehnerpotenz zusammen:

$7{,}21 \times 10^{-2}$

Aufgabe 1.9

Addieren Sie $398 \times 10^{-6} + 147 \times 10^{-6}$.

Aufgabe 1.10

Subtrahieren Sie $7{,}685 \times 10^{5} - 1{,}283 \times 10^{5}$.

Aufgabe 1.11

Addieren Sie in der exponentiellen Schreibweise 0,00206 + 0,0381.

Aufgabe 1.12

Subtrahieren Sie in der exponentiellen Schreibweise 9352 – 431.

Zwischen Genauigkeit und Präzision unterscheiden

Genauigkeit und Präzision… Präzision und Genauigkeit… ist doch ein und dasselbe, stimmt's? Chemiker auf der ganzen Welt ringen jetzt jedoch vor Entsetzen nach Luft und greifen sich reflexartig an die Brusttasche – Genauigkeit und Präzision sind für sie nämlich ganz und gar nicht identisch.

- *Genauigkeit* beschreibt, wie sehr sich eine Messung dem wahren Wert tatsächlich annähert.
- *Präzision*, die wir im nächsten Abschnitt noch erläutern, beschreibt, wie sehr nacheinander durchgeführte Messungen einander gleichen – egal wie dicht die einzelnen Messwerte dabei am tatsächlichen Wert liegen. Je größer die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert einer Wiederholungsmessung, desto niedriger die Präzision.

Die beiden bekanntesten Ausdrücke im Zusammenhang mit Genauigkeit sind *Messfehler* und *prozentualer Fehler*.

✓ **Der Messfehler** ist ein Maß für die Genauigkeit, also die Differenz zwischen einem experimentell gemessenen Wert und dem eigentlichen, tatsächlichen Wert:

Tatsächlicher Wert – Messwert = Messfehler

✓ **Der prozentuale Fehler** betrachtet das Ausmaß eines Messfehlers vor dem Hintergrund der ganzen Messung:

(Messfehler/Tatsächlicher Wert) × 100 = prozentualer Fehler

Wenn man einen hohen Berg vermessen will und sich dabei um einen Meter verrechnet, ist das nicht weiter schlimm; es ist jedoch jämmerlich, wenn man beim Versuch, die Körpergröße eines Bergsteigers zu bestimmen, den gleichen Messfehler begeht.

Beispiel

1. Ein Polizist blitzt einen vorbeifahrenden Ferrari mit einer Radarpistole mit 131 km/h. Der Ferrari fuhr aber mit einer tatsächlichen Geschwindigkeit von 127 km/h. Berechnen Sie den Messfehler.
2. Berechnen Sie den prozentualen Fehler bei der Geschwindigkeitsmessung des Polizisten, als er den Ferrari blitzte.

Lösung

1. –4 km/h.

Zuerst müssen Sie bestimmen welche der beiden Geschwindigkeiten dem Messwert und welche dem tatsächlichen Wert entspricht:

Der tatsächliche Wert beträgt 127 km/h; der Messwert beträgt 131 km/h.

Danach können Sie den Messfehler berechnen, indem Sie den Messwert vom tatsächlichen Wert abziehen:

127 km/h – 131 km/h = –4 km/h

2. 3,15 %.

Zuerst dividieren Sie den Betrag des oben ermittelten Messfehlers durch den tatsächlichen Wert:

|–4 km/h|/127 km/h = 4 km/h/127 km/h = 0,0315

Als Nächstes multiplizieren Sie das Ergebnis mit 100 und erhalten so den prozentualen Fehler:

0,0315 × 100 = 3,15 %

Aufgabe 1.13

Reginald und Dagmar wiegen sich eines Morgens mithilfe normaler Körperwaagen, die nicht übermäßig genau sind. Laut Anzeige wiegt Reginald 118 kg, obwohl er tatsächlich 128 kg schwer ist. Dagmars Waage zeigt einen Wert von 59 kg an, obwohl sie eigentlich 65 kg wiegt. Bei welcher Messung trat der größere Messfehler auf? Und wessen Waage hat den größten prozentualen Fehler?

Aufgabe 1.14

Zwei Juweliere wurden gebeten, die Masse eines Goldstücks zu bestimmen. Die tatsächliche Masse betrug 0,856 Gramm (g). Jeder Juwelier führte drei Messungen durch. Der Mittelwert dieser drei Messungen wurde als »offizielles« Messergebnis mit den folgenden Teilergebnissen bekannt gegeben:

Juwelier A: 0,863 g; 0,869 g; 0,859 g

Juwelier B: 0,875 g; 0,834 g; 0,858 g

Wessen offizielles Messergebnis war das genauere? Wessen Ergebnis war das präziseste? Bestimmen Sie für beide offiziellen Messergebnisse Messfehler und prozentualen Fehler.

Präzision mit signifikanten Stellen ausdrücken

Nachdem Sie wissen, wie Sie Zahlen in wissenschaftlicher Schreibweise darstellen können und was der Unterschied zwischen Genauigkeit und Präzision ist (wir haben beide Themen schon in diesem Kapitel erläutert), können Sie sich nun im Glanze einer neuen Fähigkeit sonnen: mithilfe wissenschaftlicher Schreibweise Präzision auszudrücken. Das Geniale dieses Systems besteht darin, dass Sie mit einem Blick auf ein Messergebnis erkennen können, wie präzise die Messung war.

Wenn Sie ein Messergebnis auswerten, sollten Sie nur jene Stellen berücksichtigen, deren Werte auch sicher sind. Diese Stellen bezeichnen wir als *signifikant*. Eine Messung wird umso präziser ausfallen, je mehr signifikante Stellen im Ergebniswert enthalten sind. Die letzte signifikante Stelle ist stets diejenige mit der höchsten Fragwürdigkeit. Hier folgen ein paar Regeln, mit deren Hilfe Sie entscheiden können, welche Stelle signifikant ist und welche nicht:

- **Jede Stelle ungleich null ist signifikant.** So enthält die Angabe 6,42 Sekunden (s) zum Beispiel drei signifikante Stellen.
- **Nullen zwischen zwei Ziffern ungleich null sind signifikant.** 3,07 s besteht zum Beispiel auch aus drei signifikanten Stellen.
- **Nullen links von der ersten Ziffer ungleich null sind *nicht* signifikant.** 0,0642 s und 0,00307 s enthalten jeweils drei signifikante Stellen.

- ✓ **Ist ein Wert größer als 1, werden alle Stellen rechts des Kommas als signifikant betrachtet.** Während 1,76 s drei signifikante Stellen enthält, besitzt 1,760 s vier signifikante Stellen. Während die »6« in der ersten Messung fragwürdig ist, gilt ihr Wert in der zweiten Messung durch die nachfolgende 0 jedoch als gesichert.
- ✓ **Wenn eine Dezimalzahl ein Komma hat, können alle Nullen, die auf die letzte Ziffer ungleich null folgen, als signifikant betrachtet werden, müssen aber nicht.** Wenn Sie also einen Messwert von 1,370 s haben, können Sie nicht sicher sein, ob die Null am Ende einem bestimmten Wert entspricht oder lediglich als Platzhalter eingefügt wurde.

  Seien Sie ein guter Chemiker. Stellen Sie Ihre Messungen in wissenschaftlicher Schreibweise dar, um solchen ärgerlichen Problemen aus dem Weg zu gehen (siehe dazu auch den vorangegangenen Abschnitt »Exponentielle und wissenschaftliche Schreibweise zur Interpretation chemischer Messungen anwenden«).
- ✓ **Eine Zahl aus einer Zählung (zum Beispiel: 1 Känguru, 2 Kängurus, 3 Kängurus…) oder aus einer definierten Menge (also zum Beispiel 60 Sekunden sind 1 Minute) besitzt eine unbegrenzte Anzahl signifikanter Stellen;** mit anderen Worten, diese Werte sind vollkommen signifikant und sicher.
- ✓ **Wenn eine Zahl bereits in wissenschaftlicher Schreibweise dargestellt wurde, werden alle Stellen des Koeffizienten als signifikant betrachtet, jedoch keine weiteren.**

Die Anzahl signifikanter Stellen in Ihrem Messwert sollte Ihrem eigenen Vertrauen zu diesem Wert entsprechen. Wenn Sie zum Beispiel wissen, dass der Tacho Ihres Autos immer 7 km/h mehr anzeigt als Sie tatsächlich fahren, können Sie durchaus protestieren, wenn Sie von einem Polizisten in der Stadt angehalten werden und er Ihnen vorwirft, mit 56 km/h unterwegs gewesen zu sein.

Beispiel

Wie viele signifikante Stellen sind in den folgenden drei Werten enthalten?

20 175 km; $1{,}75 \times 10^5$ km; $1{,}750 \times 10^5$ km

Lösung

Fünf, drei bzw. vier signifikante Stellen. Bei der ersten Messung sind außer einer Stelle alle ungleich null, diese eine Stelle sitzt zwischen 2 und 1 und gilt somit als signifikant. Der zweite Wert enthält nur Stellen ungleich null im Koeffizienten. Der dritte Wert enthält eine Null im Koeffizienten, diese ist aber die Endziffer und befindet sich rechts vom Komma; sie ist somit auch signifikant.

Aufgabe 1.15

Formen Sie die folgenden Zahlen so um, dass jeder Wert die entsprechende Anzahl signifikanter Stellen (SS) in wissenschaftlicher Schreibweise enthält.

$76{,}93 \times 10^{-2}$ m (1 SS); 0,0007693 m (2 SS); 769,3 m (3 SS)

Aufgabe 1.16

In der Chemie wird der potenzielle Fehler, der mit einer Messung einhergeht, oft in folgender Form an den Messwert angehängt: $793{,}4 \pm 0{,}2$ g. Diese Darstellung zeigt, dass alle Stellen bis auf die letzte als signifikant und gesichert angesehen werden können. Der Wert kann also zwischen 793,2 und 793,6 schwanken. Was trifft dann auf die folgenden Angaben zu bzw. was stimmt damit nicht?

$893{,}7 \pm 1$ g; $342 \pm 0{,}01$ g

Mit signifikanten Stellen rechnen

In der Chemie tätig zu sein bedeutet stets viele Messungen durchzuführen. Chemiker geben daher lieber mehr Geld aus, um mit Geräten zu arbeiten, die so präzise wie nur möglich messen können. Nachdem Sie dann Ihre präzisen Messungen gemacht haben, können Sie Ihre Ärmel hochkrempeln und damit ordentlich weiterrechnen.

Wenn Sie rechnen, müssen einige Regeln beachtet werden, um sicherzustellen, dass die Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten, die Sie erhalten, auch wirklich den Grad an Präzision widerspiegeln, den Sie mit Ihren ursprünglichen Messungen erzielt haben. Dies ist möglich, wenn Sie (ungeachtet der spöttischen Blicke einiger »alter Hasen«) Ihre Rechenwege in Ruhe und einen nach dem anderen ordentlich aufschreiben und dabei ein paar einfachen Regeln folgen. Eine Regel findet bei Addition und Subtraktion Anwendung, eine andere müssen Sie bei Multiplikation und Division beachten.

- **Beim Addieren oder Subtrahieren runden Sie die Summe oder Differenz auf die gleiche Anzahl Stellen hinter dem Komma, die auch der Messwert mit den wenigsten Stellen hinter dem Komma hat.** Auf diese Weise geben Sie zu, dass der errechnete Wert nicht präziser sein kann als der Messwert mit der geringsten Präzision.
- **Beim Multiplizieren oder Dividieren runden Sie das Ergebnis, sodass es die gleiche Anzahl signifikanter Stellen enthält wie der unpräziseste Messwert – also der Wert mit den geringsten signifikanten Stellen.**

Machen Sie sich den Unterschied zwischen beiden Regeln klar. Beim Addieren oder Subtrahieren bestimmen Sie die Anzahl signifikanter Stellen im Ergebnis anhand der Anzahl der Dezimalstellen in jedem ursprünglichen Messwert. Wenn Sie hingegen multiplizieren oder dividieren, bestimmen Sie die Anzahl signifikanter Stellen im Ergebnis anhand der Gesamtzahl signifikanter Stellen der Originalmesswerte.

Gefangen im atemberaubenden Tanz der Arithmetik müssen Sie manchmal Rechnungen in mehreren Schritten wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen. Kein Problem. Führen Sie alle Rechenoperationen in der gewohnten Reihenfolge durch, also Punkt- vor Strichrechnung. Befolgen Sie bei jedem Schritt die oben genannten Regeln, bevor Sie zum nächsten übergehen.

Beispiel

1. Bestimmen Sie die folgende Summe mit der richtigen Anzahl signifikanter Stellen:

   35,7 km + 634,38 km + 0,97 km = x

2. Bestimmen Sie das folgende Produkt mit der richtigen Anzahl signifikanter Stellen:

   27 m × 13,45 m = ?

Lösung

1. **671,1 km.**

   Wenn man alle drei Werte addiert, erhält man einen Rohwert von 671,05 km. Der unpräziseste Wert von allen dreien ist 35,7 km, er hat nur eine Stelle hinter dem Komma; daher muss auch die Rohsumme auf eine Dezimalstelle gerundet werden, also von 671,05 auf 671,1 km.

2. **$3{,}6 \times 10^2$ m^2.**

   Von beiden Werten besitzt der eine zwei signifikante Stellen (27 km), während der andere vier signifikante Stellen hat (13,45 m). Das Produkt muss daher zwei signifikante Stellen enthalten. Das Rohprodukt lautet 363,15 m^2 und muss gerundet werden. Sie könnten auf 360 m^2 abrunden, aber dann wäre nicht sicher, ob die Null am Ende signifikant ist oder nur einen Platzhalter darstellt. Um das einwandfrei zu klären, stellen Sie das Produkt in wissenschaftlicher Schreibweise als $3{,}6 \times 10^2$ m^2 dar.

Aufgabe 1.17

Bestimmen Sie die Differenz mit der entsprechenden Anzahl signifikanter Ziffern:

$127{,}39 \text{ s} - 13{,}14 \text{ s} + 1{,}09 \times 10^{-1} \text{ s} = x$

Aufgabe 1.18

Bestimmen Sie die Lösung mit der entsprechenden Anzahl signifikanter Stellen:

$345{,}6 \text{ m} \times (12 \text{ cm}/1 \text{ m}) = x$

Aufgabe 1.19

Bestimmen Sie die Differenz mit der entsprechenden Anzahl signifikanter Stellen:

$3{,}7 \times 10^{-4}\ \text{min} - 0{,}009\ \text{min} = x$

Aufgabe 1.20

Bestimmen Sie die Lösung mit der entsprechenden Anzahl signifikanter Stellen:

$87{,}95\ \text{m} \times 0{,}277\ \text{m} + 5{,}02\ \text{m} - 1{,}348\ \text{m}/10{,}0\ \text{m} = x$

Lösungen zu den Aufgaben rund ums Thema Wissenschaftlich rechnen

Im Folgenden geben wir Ihnen die Lösungen zu den praktischen Problemaufgaben, mit denen wir Sie in diesem Kapitel konfrontiert haben.

Lösung zur Aufgabe 1.1

2×10^5. Schieben Sie das Komma hinter die 2, sodass Sie einen Koeffizienten zwischen 1 und 10 erhalten. Dabei bewegen Sie das Komma um fünf Dezimalstellen nach links und müssen entsprechend den Koeffizienten mit der Potenz 10^5 multiplizieren.

Lösung zur Aufgabe 1.2

$8{,}0763 \times 10^4$. Schieben Sie das Komma hinter die 8, sodass Sie einen Koeffizienten zwischen 1 und 10 erhalten. Dabei bewegen Sie das Komma um vier Dezimalstellen nach links und müssen entsprechend den Koeffizienten mit der Potenz 10^4 multiplizieren.

Lösung zur Aufgabe 1.3

2×10^{-5}. Schieben Sie das Komma hinter die 2, sodass Sie einen Koeffizienten zwischen 1 und 10 erhalten. Dabei bewegen Sie das Komma um fünf Dezimalstellen nach rechts und müssen entsprechend den Koeffizienten mit der Potenz 10^{-5} multiplizieren.

Lösung zur Aufgabe 1.4

690,3. Diese Frage setzt voraus, dass Sie die wissenschaftliche Schreibweise verinnerlicht haben, um die Zahl in ihre »normale« Dezimalform zurückzuverwandeln. Da 10^2 gleich 100 ist, multiplizieren Sie den Koeffizienten 6,903 mit 100. Dadurch verschiebt sich das Komma zwei Stellen nach rechts.

Lösung zur Aufgabe 1.5

$1{,}1 \times 10^6$. Die Rohrechnung ergibt 11×10^5; diesen Wert müssen Sie in die wissenschaftliche Schreibweise überführen und erhalten so die angegebene Lösung.

Lösung zur Aufgabe 1.6

$3{,}0 \times 10^{-7}$. Mithilfe der wissenschaftlichen Schreibweise wird Mathe plötzlich kinderleicht. Dividieren Sie die Koeffizienten, so erhalten Sie einen Wert von 3,0, während Sie bei der Division der Potenzen 10^{-7} erhalten. Kombinieren Sie nun beide Quotienten miteinander und Sie haben das richtige Ergebnis – und das auch noch schon in der wissenschaftlichen Schreibweise.

Lösung zur Aufgabe 1.7

1,82. Zuerst überführen Sie jede Zahl in die wissenschaftliche Schreibweise: $5{,}2 \times 10^1$ und $3{,}5 \times 10^{-2}$. Als Nächstes multiplizieren Sie die Koeffizienten: $5{,}2 \times 3{,}5 = 18{,}2$. Dann addieren Sie die Exponenten der Zehnerpotenzen: $10^{1+(-2)} = 10^{-1}$. Schließlich kombinieren Sie den neuen Koeffizienten mit der neuen Potenz: $18{,}2 \times 10^{-1}$. Wenn Sie dieses Ergebnis dann noch in die wissenschaftliche Schreibweise umwandeln, erhalten Sie die Lösung $1{,}82 \times 10^0 = 1{,}82$. (Jede beliebige Zahl, die den Exponenten null trägt, ist gleich 1.)

Lösung zur Aufgabe 1.8

$3{,}99 \times 10^{-4}$. Zuerst stellen Sie jede Zahl in der wissenschaftlichern Schreibweise dar: $8{,}09 \times 10^{-3}$ und $2{,}03 \times 10^1$. Dann dividieren Sie die Koeffizienten: $8{,}09/2{,}03 = 3{,}99$. Danach subtrahieren Sie den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden, um die neue Zehnerpotenz zu erhalten: $10^{-3-1} = 10^{-4}$. Verbinden Sie die beiden Teilergebnisse und Sie werden erfreut feststellen, dass das Endergebnis bereits in der bequemen, wissenschaftlichen Schreibweise vorliegt.

Lösung zur Aufgabe 1.9

545×10^{-6}. Da beide Zahlen bereits die gleichen Zehnerpotenzen haben, müssen Sie nur noch die Koeffizienten addieren: $398 + 147 = 545$, und den so erhaltenen Wert vor die ursprüngliche Zehnerpotenz setzen.

Lösung zur Aufgabe 1.10

$6{,}402 \times 10^5$. Da beide Zahlen bereits die gleichen Zehnerpotenzen haben, müssen Sie nur noch die Koeffizienten subtrahieren: $7{,}685 - 1{,}283 = 6{,}402$, und den so erhaltenen Wert mit der ursprünglichen Zehnerpotenz kombinieren.

Lösung zur Aufgabe 1.11

$40{,}16 \times 10^{-3}$ (oder ein entsprechender Wert). Zuerst formen Sie die Zahlen so um, dass jede die gleiche Zehnerpotenz enthält: $2{,}06 \times 10^{-3}$ und $38{,}1 \times 10^{-3}$. Wir haben uns hier für 10^{-3} entschieden, aber Sie können natürlich auch eine beliebige andere Potenz wählen, solange Sie diese auf beide Zahlen anwenden. Als Nächstes addieren Sie die Koeffizienten: $2{,}06 + 38{,}1 = 40{,}16$. Zum Schluss verbinden Sie den neuen Koeffizienten mit der gemeinsamen Zehnerpotenz.

Lösung zur Aufgabe 1.12

$89{,}21 \times 10^2$ (oder ein entsprechender Wert). Zuerst formen Sie die Zahlen so um, dass jede die gleiche Zehnerpotenz enthält: $93{,}52 \times 10^2$ und $4{,}31 \times 10^2$. Wir haben uns hier für 10^2 entschieden, aber Sie können natürlich auch eine beliebige andere Potenz wählen, solange Sie diese auf beide Zahlen anwenden. Als Nächstes subtrahieren Sie die Koeffizienten: 93,52 – 4,31 = 89,21. Zum Schluss verbinden Sie den neuen Koeffizienten mit der gemeinsamen Zehnerpotenz.

Lösung zur Aufgabe 1.13

Reginalds Messung hat den größten Messfehler ergeben, während Dagmars Messung dem größeren prozentualen Fehler unterlag. Reginalds Körperwaage hat einen abweichenden Wert von 128 kg – 118 kg = 10 kg ergeben. Dagmars Waage zeigte eine Differenz von 65 kg – 59 kg = 6 kg an. Vergleichen wir beide Differenzen, stellen wir fest, dass 10 kg > 6 kg ist, und Reginalds Messfehler somit größer ist. Reginalds Messung ergab jedoch nur einen prozentualen Fehler von 10 kg/128 kg × 100 = 7,8 %, während Dagmars prozentualer Fehler mit 6 kg/65 kg × 100 = 9,2 % größer war.

Lösung zur Aufgabe 1.14

Das »offizielle« Messergebnis des Juweliers A betrug 0,864 g, während Juwelier B das Gewicht des Goldstücks »offiziell« mit 0,856 g bestimmt hatte; **somit war die Messung von Juwelier B genauer, da der Wert sogar vollkommen mit dem tatsächlichen Wert von 0,856 g übereinstimmte. Die Messung von Juwelier A war hingegen präziser,** da sich seine einzelnen Messwerte weniger voneinander unterschieden als die Messungen von Juwelier B. Obwohl die Messungen von Juwelier B also im Schnitt näher am tatsächlichen Wert lagen, war sein Messbereich (also die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert) mit 0,041 g größer als der Messbereich von Juwelier A mit 0,010 g. Dieses Beispiel zeigt, wie auch weniger präzise Messungen sehr genaue Ergebnisse durch die anschließende Mittelwertbestimmung der einzelnen Messwerte erzielen können. Im Fall von Juwelier A betrug der Messfehler 0,864 g – 0,856 g = 0,008 g. Der entsprechende prozentuale Fehler betrug 0,008 g/0,856 g × 100 = 0,934 %. Im Fall von Juwelier B betrug der offizielle Messfehler 0,856 g – 0,856 g × 100 = 0 %.

Lösung zur Aufgabe 1.15

Mit der korrekten Anzahl signifikanter Stellen und in wissenschaftlicher Schreibweise lesen sich die Messwerte wie folgt: **8×10^{-1} m; $7{,}7 \times 10^{-4}$ m; $7{,}69 \times 10^2$ m.**

Lösung zur Aufgabe 1.16

893,7 ± 1 g ist eine ungeeignete Art, einen Messwert darzustellen, denn er suggeriert, dass er innerhalb von ein paar Zehntel Gramm als bestätigt gilt. Die angegebene Standardabweichung beträgt aber ±1 Gramm. Korrekt müsste man den Wert daher als 894 ±1 g angeben. **342 ± 0,01 g ist ebenfalls ein sich widersprechender Wert, denn 342 gibt eigentlich an, dass**

der Wert auf Gramm-Ebene als unsicher zu sehen ist. Die Standardabweichung beträgt jedoch gerade einmal ein Hundertstel Gramm. Der Messwert müsste korrekt mit 342,00 ± 0,01 g angegeben werden.

Lösung zur Aufgabe 1.17

$1{,}1436 \times 10^2$ s. Der Trick besteht darin, zuerst alle Messwerte in die gleiche Zehnerpotenz umzurechnen, bevor die Dezimalstellen hinsichtlich signifikanter Stellen untersucht werden. Dadurch wird klar, dass $1{,}2 \times 10^{-1}$ s ein Hundertstel einer Sekunde darstellt, ungeachtet der Tatsache, dass der Wert nur zwei signifikante Stellen enthält. Die Rohberechnung ergibt 114,359 Sekunden. Dieser Wert lässt sich einfach auf die Hunderter-Dezimalstelle aufrunden (mit Rücksicht auf die Anzahl signifikanter Stellen). Dadurch ergibt sich 114,36 s oder $1{,}1436 \times 10^2$ s in wissenschaftlicher Schreibweise.

Lösung zur Aufgabe 1.18

$4{,}147 \times 10^3$ cm. Hier müssen Sie sich an die Regel erinnern, dass definierte Mengen (1 m besteht aus 100 cm) eine unbegrenzte Anzahl signifikanter Stellen beinhalten. Daher ist unsere Rechnung lediglich durch die Anzahl signifikanter Stellen des Wertes 345,6 m begrenzt. Wenn Sie 345,6 m mit (12 cm/1 m) multiplizieren, können Sie die Meter-Einheit wegkürzen, sodass nur noch cm übrig bleibt. Die Rohberechnung ergibt dann 4147,2 cm; dies rundet man auf vier signifikante Stellen und schreibt in der wissenschaftlichen Schreibweise $4{,}147 \times 10^3$ cm.

Lösung zur Aufgabe 1.19

-9×10^{-3} min. Hierbei hilft es, alle Messwerte auf die gleiche Zehnerpotenz umzurechnen, sodass Sie die Dezimalstellen leichter hinsichtlich ihrer Signifikanz miteinander vergleichen können. Dadurch wird ersichtlich, dass $3{,}7 \times 10^{-4}$ min ein Hunderttausendstel einer Minute darstellt, während 0,009 min im Tausendstel-Bereich einer Minute liegt. Die Rohberechnung ergibt –0,00863 min. Diesen Wert können Sie auf die Tausender-Dezimalstelle aufrunden (mit Rücksicht auf die maximal anwendbare Anzahl signifikanter Stellen), sodass Sie –0,009 min oder -9×10^{-3} min in wissenschaftlicher Schreibweise erhalten.

Lösung zur Aufgabe 1.20

$2{,}92 \times 10^1$ m. Nach den Standardrechenregeln kann diese Aufgabe in zwei Hauptschritten gelöst werden, indem Sie zuerst Multiplikation und Division und im Anschluss Addition und Subtraktion anwenden. Mithilfe der Regeln für das Rechnen mit signifikanten Stellen lösen Sie im ersten Schritt: 24,36 m + 5,02 m – 0,1348 m. Jedes Produkt und jeder Quotient enthält die Rohberechnung: 29,2452 m → gerundet $2{,}92 \times 10^1$ m, gleiche Anzahl signifikanter Stellen wie die Zahl in der Berechnung mit den wenigsten signifikanten Stellen.