



## IN DIESEM KAPITEL

Natürliche Zahlen durch die  
Nachfolgeroperation erkennen

Mit Differenzen zu den ganzen Zahlen

Mit Quotienten zu den rationalen Zahlen

Irrationale Zahlen hinzunehmen

Rechnen mit Variablen, Klammern und  
Summenzeichen

# Kapitel 1

## Zahlen und Grundrechenarten

In diesem ersten Kapitel zeige ich Ihnen, woher die Zahlen kommen und wie Sie mit diesen rechnen können. Mit diesem Verständnis lernen Sie nebenbei noch einmal, wie Sie mit Brüchen zu arbeiten haben. Am Ende dieses Einführungskapitels werden Sie mit den Grundbestandteilen der mathematischen Sprache vertraut gemacht: den Variablen! Das Rechnen mit diesen Unbekannten muss sitzen, wie Sie sehen werden.

### Mathematik und ihre natürlichen Zahlen

Fangen wir langsam an. Wenn Sie in einem Korb Ihre Äpfel zählen wollen, dann starten Sie mit der Eins und zählen weiter: zwei, drei, vier und so weiter. Diese Zahlen benötigen Sie ständig im täglichen Leben – es handelt sich um die so genannten natürlichen Zahlen.



Die Menge der **natürlichen Zahlen**  $\mathbb{N}$  bilden die Zahlen  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ . Diese Menge ist unendlich groß: Ist nämlich eine Zahl  $n$  in der Menge  $\mathbb{N}$  enthalten, so auch ihr **Nachfolger**  $n + 1$ .

Die natürlichen Zahlen sind in Abbildung 1.1 dargestellt, so wie Sie sie erwarten:



Abbildung 1.1: Natürliche Zahlen





## 32 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

Die Mathematiker sind sich oft nicht ganz einig, ob sie die Null zur Menge der natürlichen Zahlen hinzuzählen sollen. Das stellt aber auch kein Problem dar. Es handelt sich um eine typische Situation in der Mathematik: Mit beiden Varianten können sie leben und rechnen, aber sie müssen es vorher festlegen – die Mathematiker nennen dies »definieren«.

In diesem Buch gehört die Null zur Menge der natürlichen Zahlen. Ich sage Ihnen auch, warum ich dies gut finde: Stellen Sie sich vor, Sie möchten die natürlichen Zahlen verwenden, um eine Anzahl von Gegenständen zu beschreiben: Wie viele Äpfel im Korb sind; wie viele Birnen sich im Regal befinden oder wie viele Autos auf der Straße vorbeifahren. Dies können eben 1, 2, 3 oder 1000 sein. Der Korb, das Regal oder die Straße kann aber genauso gut auch leer sein. Diese Anzahl würden Sie dann mit Null beschreiben.

### Natürliche Zahlen als Äquivalenzklassen

Betrachten Sie eine Tüte mit drei Birnen. Nehmen Sie nun die drei Birnen heraus und packen Sie drei Äpfel hinein. Wenn Sie nur die Anzahl der Objekte beschreiben möchten, die sich in der Tüte befinden, dann kommt es nicht auf das Objekt an, die Äpfel und Birnen, sondern nur auf die Anzahl: in beiden Fällen »3«. Daher beschreibt die Zahl »3« offenbar ganz viele Dinge, nämlich ganz viele Tüten mit jeweils drei Objekten oder auch eine kleine Herde von drei Pferden oder eine Familie mit der Mutter, dem Vater und dem Kind. Die Zahl »3« ist daher eine Abkürzung, ein Repräsentant der Mengen mit jeweils drei Objekten. Das ist Mathematik! Es wird aber noch besser: Der Null entspricht also die leere Tüte mit Äpfeln oder auch die leere Tüte mit Birnen. Achtung! Die leere Tüte ist nicht nichts! Es bleibt eine Tüte, in der einfach nur nichts enthalten ist. So wie die Zahl 0 eben immer noch eine Zahl ist. Auch das ist Mathematik.

Im Bereich der natürlichen Zahlen haben Sie (mindestens) zwei Operationen, mit denen Sie rechnen können: die Addition »+« und die Multiplikation »·«. (Manchmal wird der Multiplikationspunkt auch als »×« geschrieben. Diese Operationen sind beide zweistellig, das heißt Sie verknüpfen zwei natürliche Zahlen und erhalten eine neue, nämlich die so genannte Summe beziehungsweise das Produkt.



Ein paar technische Details für die richtigen Worte:

- ✓ Bei der **Addition** verknüpft man zwei Zahlen  $a$  und  $b$  zu einer neuen Zahl  $a + b$ . Dabei heißen  $a$  und  $b$  die beiden Summanden und  $a + b$  die Summe.
- ✓ Bei der **Multiplikation** verknüpft man zwei Zahlen  $a$  und  $b$  zu einer neuen Zahl  $a \cdot b$ . Dabei heißen  $a$  und  $b$  die beiden Faktoren und  $a \cdot b$  das Produkt.

Mit natürlichen Zahlen können Sie schon schön rechnen. Das liegt an den Eigenschaften, die diese Zahlen in Verbindung mit Ihren Operationen haben. Wenn Sie diese angeben möchten, müssen Sie über alle natürlichen Zahlen gleichzeitig sprechen. Das ist gar nicht so einfach, denn es gibt unendlich viele von ihnen. Wenn Sie eine Eigenschaft also nacheinander für alle Zahlen angeben wollten, dann werden Sie ja nicht fertig – soviel Zeit können Sie sich gar nicht nehmen (oder zumindest sollten Sie sich nichts *danach* vornehmen)!



## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 33

Um dieses scheinbare Problem in den Griff zu bekommen, brauchen wir zunächst einmal eine Schreibweise hierfür: Sie verwenden die so genannten Quantoren  $\forall$  und  $\exists$  wie folgt:

Den **Allquantor**  $\forall$  lesen Sie als »für alle« und verwenden diesen, um über alle Zahlen gleichzeitig zu sprechen: So lesen Sie die Formel  $\forall x(x + 1 > x)$  als »für alle  $x$  ist  $x + 1$  echt größer als  $x$ «. Das bedeutet, dass es egal ist, welche Zahl  $x$  Sie nehmen, ihr Nachfolger  $x + 1$  wird stets echt größer sein. Dies gilt also für 0, 1, 2, aber auch für 11 oder 111 oder auch 111111 und alle anderen Zahlen auch.



Den **Existenzquantor**  $\exists$  lesen Sie als »es existiert ein« und verwenden diesen, um die Existenz einer Zahl zu postulieren: So lesen Sie die Formel  $\exists y(2 + y = 8)$  als »es existiert ein  $y$ , so dass 2 plus  $y$  gleich 8 ist«. Das bedeutet, dass es eine Zahl geben muss, die zur 2 addiert 8 ergibt. Diese Zahl gibt es natürlich auch, nämlich die 6.

Mithilfe der Quantoren können Sie nun beliebig komplizierte Formeln aufstellen, die das Verhalten der Zahlen und ihrer Operationen beschreiben.

**Ein Beispiel:** Es gilt in den natürlichen Zahlen  $\forall x \forall y \exists z(x < y \rightarrow x + z = y)$ . Das bedeutet, dass egal welche Zahlen Sie auswählen, wenn die erste kleiner als die zweite ist, dann können Sie immer eine Zahl finden, die zur ersten addiert die zweite ergibt. Verstanden? Sonst lesen Sie diesen Satz bitte noch einmal und überprüfen Sie sich selbst, ob Sie diesen Inhalt auch aus der Formel abgelesen hätten. Dabei geht es weniger um den Wortlaut, sondern nur um den beschriebenen Sachverhalt. Mehr zur mathematischen Logik und den Formeln der Mathematik lernen Sie in Kapitel 3.



Um Mathematik zu verstehen, müssen Sie Mathematik lesen, schreiben und sprechen lernen. Formeln sind dabei die Schriftsprache, die Sie wählen, um zu kommunizieren.

Formeln sind in der Mathematik sehr wichtig, um kurz und knapp über Zusammenhänge zu sprechen. Wenn Sie alles mit Worten beschreiben würden, dann würden die Inhalte untergehen. In der Mathematik ist es sehr wichtig, den Überblick zu behalten und dies erreichen Sie durch kurze aber übersichtliche Darstellungen. Aber seien Sie beruhigt, ein solches Gefühl kommt nicht von heute auf morgen. Haben Sie Geduld. Sie erlernen eine neue Sprache – dies geht auch nicht von heute auf morgen.

## Eigenschaften der Grundrechenarten

Lassen Sie uns endlich rechnen und trotzdem Mathematik betreiben. Ich zeige Ihnen nun mithilfe der Formeltheorie ein paar allgemeine Rechengesetze und Sie versuchen diese gemeinsam mit mir zu verstehen. Folgende grundlegende Eigenschaften der Operationen Addition und Multiplikation über den natürlichen Zahlen können Sie leicht verstehen:

- ✓ Assoziativgesetz der Addition:  $\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z))$
- ✓ Kommutativgesetz der Addition:  $\forall x \forall y(x + y = y + x)$



## 34 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

- ✓ Existenz des neutralen Elementes der Addition:  $\forall x(x + 0 = x \wedge 0 + x = x)$
- ✓ Assoziativgesetz der Multiplikation:  $\forall x \forall y \exists z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- ✓ Kommutativgesetz der Multiplikation:  $\forall x \forall y(x \cdot y = y \cdot x)$
- ✓ Existenz des neutralen Elementes der Multiplikation:  $\forall x(x \cdot 1 = x \wedge 1 \cdot x = x)$
- ✓ Distributivgesetz:  $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

Das ist Ihnen zu technisch beschrieben? Aber verständlich ist es dennoch, oder? Sie können also beliebig klammern oder auch die Summanden oder Faktoren in ihrer Reihenfolge tauschen. Und schließlich gibt es jeweils ein Element pro Operation, dessen Verknüpfung nichts am Ausgangswert ändert: Addieren Sie die Null, passiert genauso viel, als wenn Sie mit der Eins multiplizieren, nämlich nichts Neues. Mehr zum Verknüpfen von Aussagen lesen Sie in Kapitel 3.

**Ein Beispiel:** Wenn Sie beispielsweise den Term  $((x \cdot a) \cdot (a \cdot (1 \cdot x)) \cdot x) \cdot a$  betrachten, dann können Sie wegen der Assoziativität die Klammern sofort weglassen und erhalten den wesentlich vereinfachten Ausdruck:  $x \cdot a \cdot a \cdot 1 \cdot x \cdot x \cdot a$ . Hier können Sie wegen der Kommutativität auch noch ordnen:  $x \cdot x \cdot x \cdot a \cdot a \cdot a \cdot 1$ . Die neutrale Eins können Sie glücklicherweise auch noch weglassen, ohne etwas inhaltlich zu ändern und die Multiplikation mit sich selbst können Sie abkürzend als Potenzen schreiben, wenn Sie das möchten und erhalten schließlich:  $x^3 a^3$  – das ist doch viel einfacher!



Übrigens, Sie können ganz allgemein eine Menge  $M$  mit einer Operation  $\circ$  darauf betrachten. Gilt  $\forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$  so nennt man die Struktur  $(M, \circ)$  eine **Halbgruppe**. Gilt zusätzlich  $\forall x \forall y(x \circ y = y \circ x)$ , so spricht man von einer kommutativen (oder abelschen) Halbgruppe. Gibt es in einer Halbgruppe ein neutrales Element, so nennt man die Struktur **Monoid**.

## Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen

In den natürlichen Zahlen können Sie also addieren und multiplizieren und das ohne jede Einschränkung. Allerdings kennen Sie auch noch andere Operationen, die Sie zumindest teilweise auch auf den natürlichen Zahlen ausführen können: Ich spreche von den Umkehroperationen, also Subtraktion und Division:  $7 - 4 = 3$  und  $8 : 4 = 2$ . Allerdings können Sie nicht einfach  $4 - 7$  oder  $4 : 8$  berechnen, da es keine natürliche Zahl gibt, die diesen Termen entsprechen würde. Dennoch haben Sie sofort ein Gefühl dafür, was  $4 - 7$  sein sollte, nämlich  $-3$ . Und schon sind wir bei den ganzen Zahlen.



Zu jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnet  $-n$  ihre Gegenzahl, die die Eigenschaft  $n + (-n) = (-n) + n = 0$  besitzt. Die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit all ihren Gegenzahlen bezeichnet man als Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ , also:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .





## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 35

Die ganzen Zahlen erweitern die Natürlichen und ergeben daher folgende Situation:

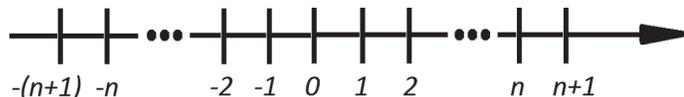


Abbildung 1.2: Ganze Zahlen

Schauen Sie sich folgende erste Eigenschaften der ganzen Zahlen an:

- ✓ Beachten Sie, dass per Definition »  $-0$ « offenbar gleich  $0$  sein muss. Überprüfen Sie dies bitte, indem Sie sich die Summeneigenschaft der Gegenzahl der  $0$  anschauen: Es gilt nämlich, dass die Gegenzahl der  $0$ , also  $-0$ , offenbar die Zahl  $z$  ist, so dass  $0 + z = z + 0 = 0$  gilt. Diese Eigenschaft erfüllt genau die Zahl  $0$  selbst.
- ✓ Des Weiteren sehen Sie, dass die ganzen Zahlen die natürlichen Zahlen erweitern. Man sagt, dass die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der ganzen Zahlen sind und schreibt:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

Der **Betrag** einer ganzen Zahl  $z \in \mathbb{Z}$  ist ganz einfach definiert, wenn Sie es ganz langsam

$$\text{lesen: } |z| := \begin{cases} -z & , \text{ falls } z < 0 \\ 0 & , \text{ falls } z = 0 \\ z & \text{ falls } z > 0 \end{cases}$$



Beachten Sie, dass der Betrag einer ganzen Zahl *nie* negativ ist! Es gilt:  $|3| = 3$  und  $|-3| = -(-3) = 3$ .

- ✓ Die Addition der natürlichen Zahlen wird auf die ganzen Zahlen kompatibel fortgesetzt – schauen Sie selbst:
  - Der Term  $7 + 4$  ist auch weiterhin  $11$ , da beide Summanden positiv sind.
  - Der Term  $7 + (-4)$  entspricht  $7 - 4 = 3$ , da Sie die betragskleinere Zahl einfach von der betragsgrößeren abziehen, denn das Minuszeichen steht vor der betragskleineren Zahl und wird einfach durchgereicht.
  - Der Term  $(-7) + 4$  entspricht  $-(7 - 4) = -3$ , da Sie die betragskleinere Zahl von der betragsgrößeren abziehen – diesmal aber das Minuszeichen bei der betragsgrößeren stand und sich durchsetzt!
  - Der Term  $(-7) + (-4)$  entspricht  $-(7 + 4) = -11$ , da beide Summanden negativ sind, addieren Sie die Beträge der Summanden und setzen ein Minuszeichen davor.

Sie sehen, wie aufwändig es sein kann, nur die Addition zu definieren, wenn man dies formal durchführen möchte. Ich bin sicher, dass Sie diese beispielhafte Vorgabe zu einer allgemeinen Definition fortsetzen könnten – dazu müssten Sie lediglich die konkreten Zahlen durch





## 36 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

Variablen ersetzen. Die Fortsetzung der Operationen beschränkt sich zurzeit natürlich nur auf die Addition – für die Multiplikation zeige ich Ihnen dies in Kurzform:

✓ Es gilt:  $8 \cdot 4 = (-8) \cdot (-4) = 32$  und  $8 \cdot (-4) = (-8) \cdot 4 = -32$ .

Das bedeutet, wenn ein Minuszeichen dabei ist, dominiert es – sind gar zwei Minuszeichen dabei, wird daraus wieder ein Pluszeichen.



Ein paar technische Details für die richtigen Worte:

- ✓ Bei der **Subtraktion** verknüpft man zwei Zahlen  $a$  und  $b$  zu einer neuen Zahl  $a - b$ . Dabei heißt  $a$  der Minuend,  $b$  der Subtrahend und  $a - b$  die Differenz.

Bei diesen formalen Definitionen der Addition können wir auch die Subtraktion definieren – Sie schreiben:  $a - b$  für ganze Zahlen  $a$ ,  $b$  und meinen damit den Term  $a + (-b)$ .

**Ein Beispiel:**  $4 - 7 = 4 + (-7) = (-7) + 4 = -(7 - 4) = -3$ .

**Noch ein Beispiel:** Berechnen Sie den Term  $-3a + a$ . Sie sehen sofort, dass es sich um  $-3$  Elemente von » $a$ « handelt, zu denen Sie eines hinzufügen. Somit muss das Ergebnis  $-2a$  sein. (Stellen Sie sich dies als Schulden vor: Wenn Sie jemandem 3 Äpfel schulden und Sie diesem Geschäftspartner einen Apfel geben, dann schulden Sie ihm nur noch 2 Äpfel.) Das sehen Sie auch anhand der obigen Regeln, denn  $|-3a| = 3 \cdot |a| > |a|$ , also gilt  $-3a + a = -(3a - a) = -2a$ . Sie könnten auch rechnen:  $-3a + a = (-3) \cdot a + 1 \cdot a = [-3 + 1] \cdot a = [-3 - 1] \cdot a = -2a$ . Nicht schöner, aber das steckt eigentlich hinter der ersten Rechnung. Also keine Angst vor Variablen – aber dies können Sie im letzten Abschnitt dieses Kapitels noch weiter üben.

### Existenz inverser Elemente nicht unterschätzen

Ein großer Unterschied zwischen der Addition und der Multiplikation auf den ganzen Zahlen ist die Tatsache, dass es zu jeder ganzen Zahl eine andere ganze Zahl gibt, so dass deren Summe das neutrale Element Null ergibt: Zu jedem  $z \in \mathbb{Z}$  können Sie die Gegenzahl  $-z \in \mathbb{Z}$  finden, denn es gilt  $z + (-z) = 0$ . Dies gilt weder für die Addition in den natürlichen Zahlen (denn für die Zahl 3 gibt es keine andere natürliche Zahl, so dass die Summe 0 ergibt) noch für die Multiplikation in den natürlichen und ganzen Zahlen: Für die Zahl 2 gibt es keine natürliche oder ganze Zahl, so dass das Produkt mit ihr das neutrale Element der Multiplikation, die Eins, ergibt. Verstanden? Dann suchen Sie noch weitere Gegenbeispiele für diese Negativaussagen.

In der Struktur  $(\mathbb{Z}, +)$  gilt das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz sowie die Existenz des neutralen Elements. Des Weiteren gilt das Gesetz der Existenz der Inversen:  $\forall x \exists y (x + y = 0)$ . Mathematiker nennen solche Strukturen **abelsche Gruppen**. Die Struktur  $(\mathbb{N}, +)$  ist *keine* Gruppe, so ist auch die Struktur  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  *keine* Gruppe; beides sind allerdings Monoide.



## Mathematiker und ihre Konstruktion der ganzen Zahlen

Wenn Mathematiker die ganzen Zahlen definieren, dann schreiben Sie nicht einfach die natürlichen Zahlen und ihre Gegenzahlen auf. Die Gegenzahlen existieren in dieser Art auch gar nicht, denn wenn Sie ehrlich sind, dann nutzen Sie bei der Schreibweise  $-3$  bereits ihr Wissen darüber, dass diese Zahl irgendwo existieren muss. Sie müssen sich vorstellen – und das können Mathematiker sehr gut –, dass Sie nur Wissen über die natürlichen Zahlen haben und aus diesem Wissen über diese Zahlen neue kreieren möchten – unvorstellbar, oder? Ich zeige Ihnen die Idee: Was Ihnen in der Welt der natürlichen Zahlen fehlt, sind Differenzen beliebiger natürlicher Zahlen. Mathematiker akzeptieren typischerweise nicht oft, dass etwas nicht existiert – sie definieren sich diese Dinge einfach. So auch hier: Betrachten Sie einfach die Menge der folgenden Zahlenpaare  $[a, b]$  für natürliche Zahlen  $a, b$  und interpretieren Sie dies (im Kopf) als  $b - a$ . Nun können Sie verschiedene solche Paare miteinander identifizieren, nämlich diese, die in Ihrer Interpretation gleich sein sollen: Also etwa  $[2, 4]$  und  $[6, 8]$ , denn beide würden Sie interpretieren als  $4 - 2 = 8 - 6 = 2$ . Mathematiker sprechen hier von der Bildung von Äquivalenzklassen. Verstanden soweit? Gut! Dann weiter: Sehen Sie, dass Sie auch Zahlenpaare haben, die Ihrer  $-2$  entsprechen, beispielsweise  $[4, 2]$  oder auch  $[14, 12]$ . Damit entspricht diese Menge von Zahlenpaaren, jeweils als gleich markierte Paare nur einmal gezählt, genau der Menge von ganzen Zahlen – diesmal aber nur mittels der natürlichen Zahlen definiert. Immer noch verstanden – gut, dann weiter im Text. Auf dieser Menge von Zahlenpaaren können Sie nun auch Operationen, wie etwa die Addition definieren. Sie schreiben formal:  $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ . Dies entspricht auch Ihrer Interpretation, denn  $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ . Für die Multiplikation würde man dann schreiben:  $[a, b] \cdot [c, d] = [bc + ad, bd + ac]$ . Dies ist schon viel komplizierter, aber es stimmt – schauen Sie selbst:  $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd = (ac + bd) - (ad + bc)$ .

## Aufgaben mit Klammern richtig lösen

Hier gibt es nicht viel zu erläutern, aber wenn ich es nicht erkläre, dann fehlt es. Da die Addition und die Multiplikation assoziativ sind, können Klammern meistens weggelassen werden. Sie müssen also nicht  $((0 + (1 + 2) + (3 + 4)) + 5)$  schreiben, sondern können dies einfach als  $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$  notieren. Allerdings müssen Sie aufpassen, wenn Sie subtrahieren, denn: *Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, ändern sich alle Zeichen in der Klammer!* Das bedeutet, aus einem Pluszeichen innerhalb der Klammer wird beim Weglassen ein Minuszeichen und umgekehrt, das heißt:

$-(-1 + 2 + 3 - 4 - 5)$  ist das Gleiche wie  $1 - 2 - 3 + 4 + 5$ .

Klammern werden dann interessant, wenn Sie damit eine Reihenfolge zwischen verschiedenen Operationen festlegen. So ist  $1 + 2 \cdot 3 = 1 + (2 \cdot 3) = 7$ , aber natürlich gilt  $(1 + 2) \cdot 3 = 9$ . Im ersten Fall habe ich eine weitere Regel verwendet, nämlich *Punktrechnung geht vor Strichrechnung* – erinnern Sie sich an Ihre Schulzeit?

## Aus ganz wird rational – Bruchrechnung mal anders

In dem vorangegangenen Abschnitt haben Sie gesehen, dass Sie mit den ganzen Zahlen zwar addieren, subtrahieren und multiplizieren können, allerdings nicht dividieren – zumindest nicht teilen durch beliebige Zahlen. Um eine Zahlenmenge zu bekommen, die auch unter Division abgeschlossen ist, müssen wir die ganzen Zahlen erweitern. (Abgeschlossen unter einer Operation zu sein bedeutet, dass das Ergebnis der Operation von zwei beliebigen Elementen der Menge wieder in der Menge liegt.) Dies muss aber so geschehen, dass die größere Menge die positiven Eigenschaften betreffs der Addition, Subtraktion und Multiplikation nicht verliert. Das ist nämlich gar nicht so klar.

Die Zahlenklasse, die hier benötigt wird, sind die rationalen Zahlen. Diese werden durch Brüche  $\frac{p}{q}$  von ganzen Zahlen  $p, q \in \mathbb{Z}$  (für  $q \neq 0$ ) gebildet, so dass damit per Definition die Division möglich ist. Außerdem sind die ganzen Zahlen ebenfalls in dieser neuen Menge enthalten, denn durch Division durch Eins bleibt die Ausgangszahl erhalten:  $\frac{p}{1} = p$ .



Die Menge  $\mathbb{Q}$  aller  $\frac{p}{q}$  für  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$  bezeichnet man als **rationale Zahlen**. Die Elemente der Menge  $\mathbb{Q}$  werden auch **Brüche** genannt. Sie lesen  $\frac{p}{q}$  als » $p$  durch  $q$ «. Dabei heißt  $p$  der **Zähler** und  $q$  der **Nenner** des Bruchs  $\frac{p}{q}$ . Der **Kehrwert** von  $\frac{p}{q}$  ist  $\frac{q}{p}$ . Sie vertauschen also Zähler und Nenner.

Die rationalen Zahlen darzustellen, ist gar nicht so einfach, wenn man die übliche Zahlengerade betrachtet. Die fehlenden (irrationalen) Löcher im Vergleich zu den bekannten reellen Zahlen sind nicht darstellbar – bestenfalls erkennbar mit einer unendlichfach vergrößerten Lupe. Daher erscheint die Darstellung sehr stark verwaschen:



Abbildung 1.3: Rationale Zahlen

Beachten Sie, dass verschiedene Darstellungen als Brüche doch gleiche Zahlen ergeben – das Stichwort, welches Sie sicher sofort erraten, ist Kürzen von Brüchen.



Die Brüche  $\frac{p}{q}$  und  $\frac{a \cdot p}{a \cdot q}$  sind für alle  $a \neq 0$  gleich. So kann aus dem Bruch  $\frac{10}{8}$  leicht durch **Kürzen** (Division durch  $a = 2$ ) der Bruch  $\frac{5}{4}$  entstehen und es gilt:  $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ . Wenn der Bruch  $\frac{p}{q}$  nicht weiter gekürzt werden kann, dann sind Zähler und Nenner **teilerfremd**, haben also keinen weiteren Teiler.

## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 39

Das Gegenteil von Kürzen ist Erweitern. So können Sie den Bruch  $\frac{7}{2}$  leicht durch **Erweitern** (Multiplikation mit  $a = 6$ ) auf den Bruch  $\frac{42}{12}$  bringen, ohne etwas am Wert des Bruches zu ändern.

**Ein Beispiel:** Das Kürzen benötigen Sie, um die Zahlenwerte in Zähler und Nenner möglichst klein zu halten. Niemand möchte mit dem Bruch  $\frac{42}{12}$  weiterrechnen, sondern dann lieber mit dem gekürzten Bruch  $\frac{7}{2}$ , oder?



Manchmal sehen Sie auch *gemischte Zahlen*, beispielweise  $1\frac{1}{3}$ . Dann handelt es sich um eine verkürzte Form von  $1 + \frac{1}{3}$ . Da man dies auch mit einem weggelassenen Multiplikationszeichen verwechseln kann, benutzen Sie diese Schreibweise sehr vorsichtig, es gilt  $1\frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ .

**Noch ein Beispiel:** Das Erweitern benötigen Sie dagegen, um den so genannten Hauptnenner zu finden: Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerzahlen. Auf diesen Zahlenwert erweitern Sie dann beide Brüche: Die Brüche  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{4}$  haben als Hauptnenner die Zahl 4 und Sie können den ersten auf  $\frac{2}{4}$  erweitern. Sie könnten auch beide Brüche auf andere gemeinsame Vielfache erweitern, etwa auf 8. Dann werden aus  $\frac{1}{2}$  und  $\frac{3}{4}$  die Brüche  $\frac{4}{8}$  und  $\frac{6}{8}$ . Ist also ganz leicht.

Nun können Sie alle vier Grundoperationen ausführen – schauen Sie mal: Es ist offensichtlich, dass Sie nun ganze Zahlen teilen können und in  $\mathbb{Q}$  bleiben. Die Frage ist aber, was passiert, wenn Sie nun rationale Zahlen selbst mit einander verknüpfen. Aber auch das geht recht einfach:

- ✓ Beim **Addieren**  $\frac{p}{q} + \frac{a}{b}$  müssen Sie beide Summanden zunächst auf den **Hauptnenner** bringen, also auf das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerzahlen  $q$  und  $b$ . Was immer geht ist das Produkt  $qb$ , dies muss aber nicht das kleinste gemeinsame Vielfache sein. Nachdem Sie nun beide Summanden erweitert haben, können Sie weiterrechnen:  $\frac{p}{q} + \frac{a}{b} = \frac{pb}{qb} + \frac{qa}{qb} = \frac{pb+qa}{qb}$ . Dabei ist  $\frac{pb+qa}{qb}$  wieder eine rationale Zahl.
- ✓ **Subtrahieren** können Sie über die Addition:  $\frac{p}{q} - \frac{a}{b} = \frac{p}{q} + \frac{-a}{b}$ . Fertig.
- ✓ **Multiplizieren** ist ganz einfach – es gilt:  $\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} = \frac{p \cdot a}{q \cdot b}$ .



Multiplizieren von Brüchen heißt: Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.



## 40 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

- ✓ Beim *Dividieren* müssen Sie sich konzentrieren, denn dies wird leider ganz oft und ganz rasch wieder verlernt: Wenn Sie den Term  $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{q}{a} \cdot \frac{p}{b}$  berechnen wollen, rechnen Sie ein fach  $\frac{p}{q} : \frac{a}{b} = \frac{q}{a} \cdot \frac{p}{b}$ , denn Sie müssen folgende Regel anwenden:



Division durch einen Bruch ist gleich Multiplikation mit seinem Kehrwert.

**Ein Beispiel:** Rechnen Sie Gleichheitszeichen für Gleichheitszeichen mit – durch Übung wird die Sache verständlicher:

$$✓ \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1.4+2.3}{2.4} = \frac{4+6}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5.2}{4.2} = \frac{5}{4}$$

$$✓ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1.4-2.3}{2.4} = \frac{4-6}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$✓ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1.3}{2.4} = \frac{3}{8}$$

$$✓ \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1.4}{2.3} = \frac{4}{6} = \frac{2.2}{3.2} = \frac{2}{3}$$

**Noch ein Beispiel:** Berechnen Sie die Summe, das Produkt und den Quotienten von  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{3b}{a^2}$ . Sie rechnen daher ganz in Ruhe  $\frac{a}{2} + \frac{3b}{a^2} = \frac{a \cdot a^2 + 2 \cdot 3b}{2a^2} = \frac{a^3 + 6b}{2a^2}$  sowie  $\frac{a}{2} \cdot \frac{3b}{a^2} = \frac{3ab}{2a^2} = \frac{3b}{2a}$  und schließlich  $\frac{a}{2} : \frac{3b}{a^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2}{3b} = \frac{a^3}{6b}$ . Auch nicht wirklich schwieriger, oder?



Denken Sie immer daran, dass Sie nichts aus Summen und Differenzen kürzen können – also konkret: In dem Bruch  $\frac{a^3+6b}{2a^2}$  können Sie *nichts* kürzen!

Nachdem Sie nun verstanden haben, wie Bruchrechnung funktioniert, können wir einen Schritt weiter gehen. Sie haben nun nämlich eine Struktur mit einer zusätzlichen Eigenschaft vor sich:

Sowohl die Struktur  $(\mathbb{Q}, +)$  als auch  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ , das heißt die rationalen Zahlen mit der Addition und der Multiplikation, bilden jeweils eine **abelsche Gruppe**. Das bedeutet, dass Sie Summanden oder Faktoren vertauschen können, Sie beliebig klammern dürfen, jeweils ein neutrales Element bezüglich der jeweiligen Operation existiert und dass es schließlich zu jedem Element ein Inverses gibt.



## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 41

Beachten Sie, dass das neutrale Element von  $(\mathbb{Q}, +)$  natürlich die Null ist, aber das neutrale Element in  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  selbstverständlich die Eins darstellt. Daran hat sich vom Übergang von den ganzen Zahlen nichts geändert. Neu ist nun, dass es in den rationalen Zahlen bezüglich der Multiplikation ebenfalls beliebige Inverse gibt, denn zu einer rationalen Zahl bildet ihr Kehrwert das passende Inverse:  $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} = 1$ .



Ein paar technische Details für die richtigen Worte:

- ✓ Bei der **Division** verknüpft man zwei Zahlen  $a$  und  $b$  zu einer neuen Zahl  $a : b$ . Dabei heißt  $a$  der Dividend,  $b$  der Divisor und  $a : b = \frac{a}{b}$  der Quotient.

### Mathematiker und ihre Definition der rationalen Zahlen

Ich möchte Ihnen wie bei den ganzen Zahlen etwas weiter vorn in diesem Kapitel nicht verheimlichen, wie Mathematiker sich aus den ganzen Zahlen die rationalen Zahlen herleiten. Dazu definieren Sie sich wieder geeignete Äquivalenzklassen, wie auch schon bei den ganzen Zahlen. In diesem Fall sind auch wieder Zahlenpaare  $[a, b]$  im Spiel, diesmal aber für eine ganze Zahl  $a$  und eine positive natürliche Zahl  $b$ . Sie können dies, als den Quotienten  $\frac{a}{b}$  interpretieren. Die Äquivalenzklassenbildung erfolgt nun sehr ähnlich: Sie sagen, dass zwei Zahlenpaare  $[a, b]$  und  $[c, d]$  gleich sein sollen, wenn  $ad = bc$ . Sehen Sie warum? Es muss nämlich entsprechend Ihrer Interpretation gelten:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , wenn  $ad = bc$ . Wie schon bei den ganzen Zahlen definieren Sie nun die fehlenden Operationen: Sie schreiben  $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$ , denn es soll gelten  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ . Einfacher geht diesmal die Multiplikation:  $[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$ .

## Rationale Zahlen und ihre Dezimalbrüche

In den letzten Abschnitten haben Sie sich Ihre Gedanken über natürliche, ganze und rationale Zahlen gemacht. Beim Übergang von den natürlichen zu den ganzen Zahlen wollten Sie neben der Addition auch noch beliebig subtrahieren können. Dies war mit den ganzen Zahlen möglich. Allerdings war trotz der möglichen Multiplikation immer noch keine beliebige Division möglich – hierfür generierten Sie sich die rationalen Zahlen. Sind dies nun alle Zahlen, die Sie zum Rechnen brauchen? Sie können addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Fehlt etwas? Das kommt darauf an, was Sie machen möchten. Sie können schon sehr viele mathematische Fragestellungen in dieser rationalen Welt beantworten. Beliebige Gleichungen und Ungleichungen, in denen addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert wird, können Sie schon lösen. (Mehr über Gleichungen und Ungleichungen lesen Sie in Kapitel 4.)



## 42 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

**Ein Beispiel:** Lösen Sie die Gleichung  $\frac{2x+2}{4} = 8$ . Das ist einfach, oder? Sie multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit 4 und erhalten  $2x + 2 = 32$ . Ziehen Sie auf beiden Seiten 2 ab und die neue Gleichung  $2x = 30$  teilen Sie auf beiden Seiten durch 2 und erhalten schließlich das gewünschte Ergebnis:  $x = 15$ .

Dennoch ist man oftmals nicht zufrieden, denn es gibt immer wieder Fragestellungen, die dann doch nicht zu beantworten sind.

**Ein wichtiges Beweisbeispiel:** Wenn Sie versuchen wollen, über den rationalen Zahlen die Gleichung  $x^2 = 2$  zu lösen, dann versagen Sie automatisch gloriös. Es gibt eben kein rationales  $x$ , so dass  $x^2 = 2$  gilt. Das liegt daran, dass  $\sqrt{2}$  keine rationale Zahl ist. Sie ist, so sagt man, irrational. Das ist auch leicht zu sehen:

1. Angenommen,  $\sqrt{2}$  wäre rational, dann könnten Sie sie als Quotient  $\frac{p}{q}$  für ganze Zahlen  $p$  und  $q$  darstellen. Nehmen Sie weiterhin an, dass diese ganzen Zahlen maximal gekürzt sind, das heißt, dass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. Es würde also gelten:  $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ .
2. Quadrieren Sie beide Seiten der Gleichung und es müsste  $\frac{p^2}{q^2} = 2$  gelten.
3. Bringen Sie anschließend durch Multiplikation mit  $q^2$  diese Gleichung auf die Form  $p^2 = 2 \cdot q^2$ . Und nun?
4. Schauen Sie genau hin: Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Doppelte einer natürlichen Zahl, diese muss also eine gerade Zahl sein, so dann auch die linke Seite der Gleichung.
5. In Kapitel 3 im Abschnitt *Grundlegende Beweistechniken in der Mathematik* zeige ich Ihnen, dass wenn  $p^2$  gerade ist, dann auch  $p$ . Daher finden Sie eine (andere) natürliche Zahl  $a$ , so dass  $p = 2a$ , denn  $2a$  ist die typische Gestalt einer geraden Zahl (im Gegensatz zu einer ungeraden Zahl der Gestalt  $2a + 1$ ).
6. Nun holen Sie zum Gegenschlag aus: Dann gilt nämlich auch  $p^2 = 4a^2$ . Zusammen mit der Gleichung  $p^2 = 2 \cdot q^2$  gilt insgesamt:  $4 \cdot a^2 = 2 \cdot q^2$ .
7. Durch Teilen erhalten Sie  $2 \cdot a^2 = q^2$ . Aber dann wiederum ist auch  $q^2$  mit dem gleichen Argument eine gerade Zahl und damit auch  $q$ .
8. Insgesamt wären dann  $p$  und  $q$  durch 2 teilbar und dies widerspräche der angenommenen Teilerfremdheit.

Man muss sich schon konzentrieren, um das richtig zu verstehen.

Nun gut, nach dem gerade gesehenen Beispiel wissen Sie, dass die Wurzel aus 2 nicht rational sein kann, aber was macht diese Zahl denn nun so irrational? Wie sehen denn rationale Zahlen aus? Am Wurzelzeichen kann es nicht liegen, denn  $\sqrt{4}$  ist auf jeden Fall rational, sogar ganz (mit den Lösungen  $-2$  und  $2$ ).



## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 43



Rationale Zahlen können Sie als **Dezimalbrüche** schreiben. Dezimalbrüche haben die Gestalt einer Kommazahl, wobei vor dem Komma der ganze Anteil der Zahl zu finden ist und nach dem Komma verschiedene Nachkommastellen. Rationale Zahlen in Dezimalbruchschreibweise haben die Eigenschaft, dass sie entweder nur endlich viele Nachkommastellen haben oder es im Falle einer unendlichen Anzahl von Nachkommastellen eine **Periode** gibt, in der Sie eine Wiederholung von Ziffernfolgen finden können.

**Ein Beispiel:** Betrachten Sie folgende rationale Zahlen in endlicher Dezimalbruchschreibweise:

$$✓ \frac{1}{2} = 0,5$$

$$✓ \frac{3}{8} = 0,375$$

$$✓ \frac{167}{16} = 10,4375$$

$$✓ \frac{3}{4} = 0,75$$

$$✓ \frac{7}{16} = 0,4375$$

$$✓ \frac{999}{100} = 9,99$$

Betrachten Sie nun folgende rationale Zahlen in unendlicher, aber periodischer Dezimalbruchschreibweise. Dabei deute ich Ihnen die Periode mit einem Strich über den entsprechenden Stellen an, die sich unendlich oft wiederholen – schauen Sie selbst:

$$✓ \frac{5}{12} = 0,41666666 \dots = 0,41\overline{6}$$

$$✓ \frac{1}{7} = 0,1428571428 \dots = 0,14\overline{2857}$$

$$✓ \frac{1}{11} = 0,0909090909 \dots = 0,0\overline{9}$$

$$✓ \frac{1371742}{11111111} = 0,1\overline{2345678}$$

$$✓ \frac{7}{1111} = 0,006300630063 \dots = 0,0\overline{063}$$

$$✓ \frac{24691111}{199998000} = 0,1234\overline{56789}$$

## Und plötzlich wird's irrational ... und real!

Im vorangegangenen Abschnitt haben Sie bereits gesehen, dass die Wurzel aus 2 nicht rational sein kann. Sie ist irrational. Nach der Theorie über die Dezimalbruchdarstellung wissen Sie auch, dass die Darstellung von  $\sqrt{2}$  als Dezimalbruch unendlich viele Nachkommastellen besitzen muss, die keine Periode in sich tragen, also kein Schema, welches unendlich oft wiederholt wird. Es ist gar nicht so einfach, sich dies vorzustellen. Aber ich kann Ihnen ein paar Details zeigen – folgen Sie mir einfach.

Wenn Sie auf dem Taschenrechner die Wurzel von 2 berechnen, dann zeigt dieser Ihnen eine Approximation des echten Ergebnisses an. Mehr kann dieser auch nicht, denn wie gesagt, das Ergebnis hat unendlich viele Nachkommastellen und der Taschenrechner, so genau er auch sein mag, kann nur endlich viele von diesen berechnen. Ein typisches Ergebnis des Taschenrechners ist 1,41421356. Wie genau ist dies nun, wenn es nicht das echte Ergebnis ist? Nähern wir uns schrittweise an, so gilt:  $1,4^2 = 1,96$  und  $1,5^2 = 2,25$ . Daher muss die Wurzel aus 2 irgendwo zwischen 1,4 und 1,5 liegen. Klar, oder? Dann weiter – es gilt daher:

$$✓ 1,4^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = 1,5^2$$

$$✓ 1,41^2 = 1,9881 < 2 < 2,0164 = 1,42^2$$



#### 44 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

- ✓  $1,414^2 = 1,999396 < 2 < 2,002225 = 1,415^2$
- ✓  $1,4142^2 = 1,99996164 < 2 < 2,00024449 = 1,4143^2$
- ✓  $1,41421^2 = 1,9999899241 < 2 < 2,0000182084 = 1,41422^2$
- ✓  $1,414213^2 = 1,999998409369 < 2 < 2,000001237796 = 1,414214^2$
- ✓  $1,4142135^2 = 1,99999982358225 < 2 < 2,00000010642496 = 1,4142136^2$

Können Sie sehen, dass Sie sich immer näher an die Zahl 2 annähern, diese aber nicht erreichen können? Und diese Kette könnten wir unendlich lang fortsetzen, ohne einen Rhythmus (Periode!) in der Ausgangszahl zu bekommen.



Die Menge der rationalen Zahlen zusammen mit den irrationalen sind die **reellen Zahlen**  $\mathbb{R}$ . Diese erweitern die Menge der rationalen Zahlen. Die Operationen werden entsprechend fortgesetzt.

Die reellen Zahlen stellen nun das Bild dar, wie Sie es erwarten:



Abbildung 1.4: Reelle Zahlen

### Mathematiker und ihre Konstruktion der reellen Zahlen

Sie haben bereits gesehen, dass die irrationalen Zahlen in der Dezimalbruchdarstellung unendlich viele Nachkommastellen besitzen, ohne dass eine Periode zu finden ist. Dies klingt nicht nach der idealen Beschreibung, um solche Zahlen wirklich zu finden. Die im Text gezeigte Annäherungsmethode an die Wurzel von 2 zeigt dabei einen möglichen Weg, den Mathematiker gehen, um solche irrationalen Zahlen zu beschreiben. Diese Methode wird **Intervallschachtelung** genannt. Entsprechend der im Text verwendeten Rechnung könnten Sie auch die immer kleiner werdenden Intervalle wie folgt angeben:  $[1, 4; 1, 5]$ ,  $[1,41; 1,42]$ ,  $[1,414; 1,415]$ ,  $[1,4142; 1,4143]$ ,  $[1,41421; 1,41422]$ ,  $[1,414213; 1,414214]$ ,  $[1,4142135; 1,4142136]$ . Sie erkennen, dass das jeweils nachfolgende Intervall immer im Vorhergehenden enthalten ist und somit stets eine zwar positive aber stets kleiner werdende Länge besitzt. Wenn Sie dies bis ins Unendliche betreiben, dann beschreiben Sie genau einen Punkt, sozusagen das Grenzwertintervall der Länge null. Dieser eine Punkt, der vollständig mit rationalen Zahlen beschrieben wurde (in Form dieser Schachtelung der Intervalle) ist die gewünschte irrationale Zahl – in unserem Fall  $\sqrt{2}$ .

## KAPITEL 1 Zahlen und Grundrechenarten 45



Andere berühmte Vertreter der irrationalen Zahlen sind die Kreiszahl  $\pi = 3,141592653589793238462643383 \dots$  sowie die Eulersche Zahl  $e$ . Beide Zahlen können nicht als ganze Zahl dargestellt werden: Sie haben unendlich viele Nachkommastellen und es ist keine sich wiederholende Periode vorhanden. Sie sind sogar transzendent. Das bedeutet, dass Sie nicht als Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten dargestellt werden können – im Gegensatz zu  $\sqrt{2}$ , welche Nullstelle von  $f(x) = x^2 - 2$  ist. Die Kreiszahl ist in der Geometrie sehr wichtig, denn Sie entspricht dem Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser Eins und dem Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius Eins. Die Eulerzahl  $e = 2,718281828459045235 \dots$  spielt in der Differential- und Integralrechnung eine wesentliche Rolle, wie ich Ihnen noch im Verlaufe des Buches zeigen werde: So lässt sich diese Zahl etwa wie folgt darstellen:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

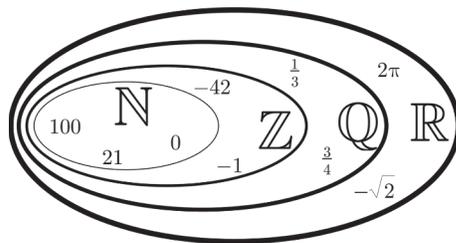


Abbildung 1.5: Zahlbereiche im Vergleich

## Keine Angst vor dem Rechnen mit Variablen

Glücklicherweise gehören Sie nicht zu der Spezies, die Angst vor Variablen hat, oder doch? Lassen Sie mich Ihnen zeigen, warum Ihre Nicht-Angst auch wirklich berechtigt ist, denn wenn Variablen aufkommen, dann behandeln Sie diese mit Respekt, aber ansonsten wie jede andere Zahl auch. Das Prinzip der Rechnungen bleibt nämlich das gleiche.

**Ein Beispiel:** Sie möchten  $a \cdot \frac{a}{b^2}$  vereinfachen. Tun Sie es! Wie würden Sie  $2 \cdot \frac{2}{3^2}$  vereinfachen? – Sie würden die 2 auf den Bruchstrich ziehen und mit der anderen 2 multiplizieren?

Gut! Dann machen Sie es genau so mit den Buchstaben:  $a \cdot \frac{a}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}$ . Fertig.

**Noch ein Beispiel:** Vereinfachen Sie den Term  $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{c}{a}$ . Das ist nun auch einfach. Sie rechnen:

$$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{c}{a} = \frac{a \cdot c}{b^2 \cdot a} \text{ und kürzen das } a \text{ in Zähler und Nenner weg – Sie erhalten das Ergebnis mit}$$

$$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{c}{a} = \frac{a \cdot c}{b^2 \cdot a} = \frac{\cancel{a} \cdot c}{b^2 \cdot \cancel{a}} = \frac{c}{b^2}.$$



## 46 TEIL I Zahlen und Rechenoperationen

**Und noch ein Beispiel:** Sie bleiben tapfer und vereinfachen diesen Term  $\frac{a}{b^2} \cdot \frac{c}{a}$ . Ich rechne einfach mal vor und Sie prüfen es nach und überdenken Sie bei jedem einzelnen Schritt, warum ich diesen machen durfte:  $\frac{a}{b^2} : \frac{c}{a} = \frac{a}{b^2} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a \cdot a}{b^2 \cdot c} = \frac{a^2}{b^2 \cdot c}$ .

**Und schließlich noch ein Beispiel:** Jetzt wird es spannend! Berechnen Sie den Term  $\frac{2a}{3b^2} + \frac{c^2+1}{ab}$ . Eins nach dem anderen und sich nicht gleich verrückt machen lassen. Sie möchten also Brüche addieren. Dafür brauchen Sie den Hauptnenner oder zumindest einen gemeinsamen Nenner beider Brüche. Der erste Bruch hat den Nenner  $3b^2$ , der zweite  $ab$ . Daher könnten Sie als gemeinsamen Nenner  $3b^2 \cdot a$  nehmen, denn beide anderen Nenner teilen diesen. Sie erweitern beide Brüche auf diesen neuen Nenner  $3ab^2$ . Dazu multiplizieren Sie den ersten Bruch mit  $a$  und den zweiten mit  $3b$  – prüfen Sie es bitte nach! Schließlich rechnen Sie wie folgt:  $\frac{2a}{3b^2} + \frac{c^2+1}{ab} = \frac{2a \cdot a}{3b^2 \cdot a} + \frac{(c^2+1) \cdot 3b}{(ab) \cdot (3b)} = \frac{2a^2}{3ab^2} + \frac{3b(c^2+1)}{3ab^2} = \frac{2a^2+3b(c^2+1)}{3ab^2}$ . Fertig.

**Und noch ein Abschlußbeispiel:** Vereinfachen Sie bitte  $\frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{1}{x^2}$ . Sie können nun den Standardweg gehen und einen gemeinsamen Nenner finden:  $x^2 \cdot (x^3 - x^2)$ . Sie rechnen:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} + \frac{1 \cdot (x^3-x^2)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} = \frac{x^2 \cdot (x+1) + (x^3-x^2)}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} = \frac{x^3+x^2+x^3-x^2}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} \\ &= \frac{2x^3}{x^2 \cdot (x^3-x^2)} = \frac{2x^3}{x^3 \cdot (x^2-x)} = \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3} \cdot (x^2-x)} = \frac{2}{x \cdot (x-1)} \end{aligned}$$

War nicht so schwer, oder? – Aber konzentrieren muss man sich eben dennoch.

## Das Summenzeichen

In der Mathematik geht es oft darum, komplizierte Zusammenhänge geschickt kompakt darzustellen. Dieses Prinzip werden Sie immer wieder erkennen – nicht immer wird es Ihnen im ersten Moment verständlich sein, da Sie erst die Symbole lesen lernen müssen, aber auf den zweiten oder dritten Blick werden Sie mir recht geben.

Man schreibt:  $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n$ . Manchmal schreibt man diese Summe auch als  $\sum_{i=0}^n a_i$ . Dies nimmt aber sehr viel Platz weg und so bevorzuge ich die erste Schreibweise.

**Ein Beispiel:** Es gilt:

$$\sum_{i=0}^3 2i+1 = (2 \cdot 0 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 3 + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Natürlich müssen Sie nicht immer bei 0 starten. So ist  $\sum_{i=4}^6 i = 4 + 5 + 6 = 15$ . Erste Anwendungen zum Summenzeichen finden Sie in Kapitel 3 in den Beispielen bei den Beweistechniken.

