

## A

## Lösungen und Lösungswege

**A**us Platzgründen mussten wir leider darauf verzichten zu allen Übungsaufgaben den ausführlichen Lösungsweg in das Buch aufzunehmen. Sie finden in diesem Lösungsteil zu den ersten beiden Übungsaufgaben eines Kapitels jeweils die Lösung und den ausführlichen Lösungsweg. Zu den weiteren Aufgaben finden Sie nur das Ergebnis. Die Lösungswege zu allen Aufgaben des Buches können Sie unter <http://www.wiley-vch.de/ISBN978-3-527-71430-8> als PDF herunterladen.

### Aufgabe 1.1: Einheiten umrechnen

Die universelle Gaskonstante, die für jedes beliebige Gas immer denselben Wert hat, wird in diesem Buch durch das Formelzeichen  $\mathfrak{R}$  gekennzeichnet. Sie besitzt den Wert:

$$\mathfrak{R} = 8,31447 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Ein lateinisches R kennzeichnet die spezielle Gaskonstante eines speziellen Gases. Sie benötigen die Umrechnungstafel und suchen nach einem Zusammenhang der Energieeinheit J und der Druckeinheit bar. In der Liste der Umrechnungsbeziehungen finden Sie den Eintrag:  $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$ .

Da hier die Einheit bar noch nicht aufgetaucht ist, können Sie beim Druck nach der Einheit bar suchen und diese mit Newton (N) in Verbindung bringen. Finden Sie die Umrechnungsbeziehung:  $1 \text{ N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}$ . Formulieren Sie daraus die Umrechnungsbeziehung zwischen 1 N und bar.

$$1 \text{ N} = 10^{-5} \text{ bar} \cdot \text{m}^2$$

Damit wird 1 N in der Umrechnungsbeziehung ersetzt, es folgt:

$$1 \text{ J} = \underbrace{10^{-5} \text{ bar} \cdot \text{m}^2}_{1 \text{ N}} \cdot \text{m}$$

In  $\mathfrak{R}$  kann jetzt die Einheit Joule ausgetauscht werden.

$$\mathfrak{R} = 8,31447 \frac{10^{-5} \text{ bar} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 8,31447 \times 10^{-5} \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Als Nächstes muss nur noch die Umrechnung der Längeneinheit m in die Längeneinheit Dezimeter erfolgen. Finden Sie den passenden Eintrag in der Umrechnungstafel:  $1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$ .



## 2 Lösungen und Lösungswege

Es wird  $\text{m}^3$  benötigt. Also gilt:

$$(1 \text{ m})^3 = (10 \text{ dm})^3 \quad \text{oder} \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

In der gewünschten Einheit lautet die universelle Gaskonstante  $\mathfrak{R}$ :

$$\mathfrak{R} = 8,31447 \times 10^{-5} \frac{\text{bar} \cdot 1000 \cdot \text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 0,0831447 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$\mathfrak{R}$  ist eine Naturkonstante, deren Einheit auf verschiedenen Arten angegeben werden kann, die allerdings auf SI-Einheiten zurückführbar sind.

### Aufgabe 1.2: Die Stoffmenge in einem Kilogramm Wasser berechnen

Zuerst benötigen Sie die relativen Atommassen der einzelnen Atome aus dem Periodensystem der Elemente.

Teilchen	Relative Atommasse
H-Atom	1,0079
H-Atom	1,0079
O-Atom	15,999
H <sub>2</sub> O-Molekül	Summe = 18,014

H<sub>2</sub>O besteht aus zwei H-Atomen und einem O-Atom.

Die relative Molekülmasse eines H<sub>2</sub>O-Moleküls beträgt 18,014. Achtung, zu dieser Zahl gehört keine Einheit, denn es ist die relative Molekülmasse. Aber die Masse eines H<sub>2</sub>O-Moleküls, die zur Übung nebenbei auch noch berechnet werden soll, beträgt:

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \text{relative Molekülmasse}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot u$$

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = 18,014 \cdot 1,660539 \times 10^{-27} \text{ kg} = 2,99129 \times 10^{-26} \text{ kg.}$$

Die Masse eines H<sub>2</sub>O-Moleküls besitzt die Einheit kg. Zudem ist die relative Molekülmasse 18,014 des reinen Wassers von Bedeutung. Die Zahl zeigt an, dass 18,014 g H<sub>2</sub>O gleich 1 mol H<sub>2</sub>O sind. In diesem Buch soll immer diese definierte Molmasse mit dem Formelzeichen  $m_{\text{Mol}}$  gekennzeichnet werden.

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{H}_2\text{O}} = 18,014 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Um die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$  eines Stoffes zu bekommen, müssen Sie einfach zur relativen Molekülmasse des Stoffes (oder zur relativen Atommasse des Stoffes) die Einheit g/mol oder kg/kmol anhängen. Aus der Einheit Molmasse folgt: 18,014 g H<sub>2</sub>O entsprechen 1 mol H<sub>2</sub>O.

$$18,014 \text{ g H}_2\text{O} \hat{=} 1 \text{ mol H}_2\text{O}$$

Achtung, die dimensionslose Zahl der relativen Molekülmasse aus dem Periodensystem der Elemente entspricht nur dann der Molmasse  $m_{\text{Mol}}$ , wenn Sie zur Zahl die Einheit kg/kmol



## Lösungen und Lösungswege 3

hinzufügen. Weil 1 Kilogramm gleich 1000 Gramm sind, lässt sich eine Dreisatzrechnung durchführen.

$$18,014 \text{ g H}_2\text{O} \hat{=} 1 \text{ mol H}_2\text{O}$$

$$1 \text{ g H}_2\text{O} \hat{=} \frac{1}{18,014} \text{ mol H}_2\text{O}$$

$$1000 \text{ g H}_2\text{O} \hat{=} \frac{1000}{18,014} \text{ mol H}_2\text{O} = 55,512 \text{ mol}$$

Ergebnis: 1 kg reines Wasser entspricht einer Stoffmenge von  $n = 55,512 \text{ mol H}_2\text{O}$ .

### Aufgabe 1.3: An einem schrägen U-Rohrschenkel die Ablesegenauigkeit erhöhen

Eine Möglichkeit zur Festlegung der Nulllinie ist die in der Abbildung eingezeichnete gestrichelte Linie zwischen den Punkten A und B. Der Punkt A liegt im Tank, halb im Öl und halb im Wasser. Der Punkt B befindet sich auf dem Höhenniveau von A und liegt im Wasser des schrägen U-Schenkels. Beide Punkte liegen in derselben Flüssigkeit (Wasser) und spüren den gleichen Druck:  $p_A = p_B$ . An den Punkten A und B gelten die Gleichungen aus der Hydrostatik.

$$p_A = p_o + \rho_{\text{öl}} \cdot g \cdot h_1$$

$$p_B = p_o + \rho_{\text{öl}} \cdot g \cdot h_3 + \rho_W \cdot g \cdot y$$

Gleichgesetzt erhalten Sie  $y = \rho_{\text{öl}} \cdot (h_1 - h_3) / \rho_W = 0,2465 \text{ m}$ . Der Winkel  $\alpha$  ist mithilfe der Arcussinus-Funktion zu bestimmen.

$$\sin(\alpha) = \frac{0,48 \text{ m} + 0,2465 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 0,36325$$

$$\alpha = \arcsin(0,36325) = 21,3^\circ$$

### Aufgabe 1.4: Eine einfache Druckerhöhung bewerkstelligen

Je höher der Wasserspiegel  $h_1$  in der Steigleitung ist, desto stärker wird die Luft im Behälter komprimiert. Die Anzeige des eingebauten Manometers wird hauptsächlich von der Höhe  $h_1 - h_2$  beeinflusst. Das Nullniveau NN liegt hier auf der Trennfläche zwischen Öl und Wasser im Behälter. Verlängern Sie diese gedachte NN-Linie nach links bis zum Steigrohr. Im Steigrohr ist der Druck auf der NN-Linie:

$$p_{\text{NN}} = p_o + \rho_W \cdot g \cdot (h_1 - h_2)$$

Auf derselben NN-Linie im Behälter ist der Druck genauso groß, und zwar:

$$p_{\text{NN}} = p_{\text{Manometer}} + \rho_{\text{öl}} \cdot g \cdot h_3 + \underbrace{p_L}_{\approx 0}$$



## 4 Lösungen und Lösungswege

Hier wird der Druckbeitrag  $p_L$  der im Behälter eingeschlossenen Luft vernachlässigt, weil die Dichte der Luft sehr viel kleiner ist als die Dichte des Öls. Gleichgesetzt folgt für den Luftdruck am Manometer:  $p_{\text{Manometer}} = 1,419 \text{ bar}$ .

Es wurde die Umrechnungsbeziehung  $1 \text{ bar} = 100000 \text{ kg}/(\text{m s}^2)$  verwendet.

### Aufgabe 1.5: Den Druckabfall in einer Wasserleitung berechnen

An der Rohrposition 1 ist ein U-Rohr angebracht, das im linken Schenkel oben mit dem Wasser aus der Wasserleitung und unten mit Quecksilber gefüllt ist. Durch die Drücke  $p_1$  in der Wasserleitung und dem Atmosphärendruck  $p_0$  verschiebt sich das Quecksilber im U-Rohr so, dass in derselben Flüssigkeit (Quecksilber) auf gleichem Niveau ein Druckgleichgewicht entsteht. Legen Sie Ihre Nulllinie (NN) an die Stelle, wo im linken Schenkel die Quecksilbersäule beginnt. Das ist auch die Basis für alle gegebenen Höhenangaben. Genau auf dieser Nulllinie lässt sich das Druckgleichgewicht im U-Rohr so formulieren:

$$p_0 + \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_1 = p_1 + \rho_{\text{W}} \cdot g \cdot L_1$$

Hieraus kann  $p_1$  bestimmt werden. Im U-Rohr an der Leitungsposition 2 ist analog vorzugehen.

$$p_0 + \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_2 = p_2 + \rho_{\text{W}} \cdot g \cdot L_2$$

Der Druck  $p_2$  ist auszurechnen, denn der Druckabfall  $p_1 - p_2$  ist gesucht.

$$p_1 - p_2 = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot (h_1 - h_2) - \rho_{\text{W}} \cdot g \cdot (L_1 - L_2) = 0,0228 \text{ bar}$$

Das Manometer an der Position 2 zeigt den Wasserdruck  $p_2$  in der Leitung an.

$$p_2 = p_0 + \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h_2 - \rho_{\text{W}} \cdot g \cdot L_2 = 2,00 \text{ bar}$$

### Aufgabe 2.1: Mittlere spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

Durch die Daten im Beispiel sind Anfangs- und Endzustand bereits mit den Indizes 1 und 2 markiert. Gesucht wird die mittlere spezifische Wärmekapazität  $c_v|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}}$ . Eine Tabelle für die mittlere spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen ist nicht notwendig, denn es gilt:

$$c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - c_v|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = R$$

Berechnen Sie zuerst  $c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$  von Sauerstoff; mit R erhalten Sie den Wert  $c_v|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ .

$$c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \cdot \left[ \vartheta_2 \cdot c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - \vartheta_1 \cdot c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \right]$$



## Lösungen und Lösungswege 5

Zwei lineare Interpolationen für  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_1}$  und  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_2}$  sind unausweichlich durchzuführen. Hierfür bieten die Kästen in Kapitel 2 eine universelle Formel für beliebige lineare Interpolationen. Wenden Sie die Formel an, und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem individuellen Rechenweg. Es folgen zwei Nebenrechnungen für  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_1=635^\circ\text{C}}$  und  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_2=18,6^\circ\text{C}}$ .

Nebenrechnung für die Größe  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_1=635^\circ\text{C}}$ :

Die Temperatur  $635^\circ\text{C}$  liegt zwischen  $600^\circ\text{C}$  und  $700^\circ\text{C}$ . In Tabelle 2.3 sind für Sauerstoff die passenden  $c_p$ -Werte zu finden.

$\theta$	$c_p _{0^\circ\text{C}}^{\theta}$
$600^\circ\text{C}$	$0,993 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
$700^\circ\text{C}$	$1,005 \text{ kJ}/(\text{kg K})$

### 1. Lineare Interpolation

Die Stützwerte der linearen Interpolation sind:

$$x_1 = 600 \quad \text{und} \quad y_1 = c_p|_{0^\circ\text{C}}^{600^\circ\text{C}} = 0,993$$

$$x_2 = 700 \quad \text{und} \quad y_2 = c_p|_{0^\circ\text{C}}^{700^\circ\text{C}} = 1,005$$

Wie groß ist  $y(x = 635)$ ? Die Interpolationsformel liefert:

$$y = \frac{1,005 - 0,993}{700 - 600} \cdot 635 + \frac{700 \cdot 0,993 - 600 \cdot 1,005}{700 - 600} = 0,9972$$

$$c_p|_{0^\circ\text{C}}^{635^\circ\text{C}} = 0,9972 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Nebenrechnung für die Größe  $c_p|_{0^\circ\text{C}}^{\theta_2=18,6^\circ\text{C}}$ :

Die Temperatur  $18,6^\circ\text{C}$  liegt zwischen den in Tabelle 2.3 gegebenen Temperaturdaten  $0^\circ\text{C}$  und  $100^\circ\text{C}$ . Tabellenauszug:

$\theta$	$c_p _{0^\circ\text{C}}^{\theta}$
$0^\circ\text{C}$	$0,915 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
$100^\circ\text{C}$	$0,924 \text{ kJ}/(\text{kg K})$



## 6 Lösungen und Lösungswege

### 2. Lineare Interpolation

Die Temperatur  $\vartheta_1 = 18,6 \text{ }^\circ\text{C}$  liegt zwischen  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , deshalb sind die Stützwerte der linearen Interpolation:

$$\begin{aligned} x_1 = 0 & \quad \text{und} \quad y_1 = c_p|_0^{0 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,915 \\ x_2 = 100 & \quad \text{und} \quad y_2 = c_p|_0^{100 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,924. \end{aligned}$$

Wie groß ist  $y(x = 18,6)$ ? Die Interpolationsformel liefert:

$$y = \frac{0,924 - 0,915}{100 - 0} \cdot 18,6 + \frac{100 \cdot 0,915 - 0 \cdot 0,924}{100 - 0} = 0,91667$$

$$c_p|_0^{18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,91667 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Die Nebenrechnungen sind beendet, und Sie können mit der Bestimmung der mittleren spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck fortfahren.

$$c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{1}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \cdot \left[ \vartheta_2 \cdot c_p|_0^{\vartheta_2} - \vartheta_1 \cdot c_p|_0^{\vartheta_1} \right]$$

$$c_p|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = \frac{1}{(18,6 - 635) \text{ }^\circ\text{C}} \cdot \left[ 18,6 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,91667 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - 635 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,9972 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$$

$$c_p|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = \frac{1}{(18,6 - 635) \text{ }^\circ\text{C}} \cdot [18,6 \cdot 0,91667 - 635 \cdot 0,9972] \frac{\text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_p|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,9996 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Es folgt die mittlere spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

$$c_v|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = c_p|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} - R$$

$$c_v|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,9996 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - 259,8 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_v|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}} = 0,9996 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} - \frac{259,8}{1000} \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 0,7398 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Alle Wärmekapazitäten der Stoffe zwischen beliebigen Temperaturen sind immer positiv. Wenn Sie mögen, können Sie die Aufgabe umdrehen und nachweisen, dass bei einer Erwärmung von  $18,6 \text{ }^\circ\text{C}$  auf  $635 \text{ }^\circ\text{C}$  gilt:

$$c_v|_{\vartheta_1=18,6 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=635 \text{ }^\circ\text{C}} = c_v|_{\vartheta_1=635 \text{ }^\circ\text{C}}^{\vartheta_2=18,6 \text{ }^\circ\text{C}}$$



## Aufgabe 2.2: Warmwasser bereitstellen

Aus der differentiellen Beziehung  $\delta q = c_p(\vartheta) \cdot d\vartheta$  wird durch die Integration zwischen Anfangszustand 1,  $\vartheta_1 = 10^\circ\text{C}$  bis Endzustand 2,  $\vartheta_2 = 60^\circ\text{C}$  mit der Funktion

$$c_p(\vartheta) = 4,22 - 1,859047 \times 10^{-3} \cdot \vartheta + 2,2857143 \times 10^{-5} \cdot \vartheta^2 - 4,266667 \times 10^{-8} \cdot \vartheta^3$$

die spezifische Wärme  $q_{12}$  errechnet.

$$\int_1^2 \delta q = \int_{\vartheta=10^\circ\text{C}}^{\vartheta=60^\circ\text{C}} c_p(\vartheta) \cdot d\vartheta = 209,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot ^\circ\text{C} = 209,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{12} = 209,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Denken Sie daran, dass bei allen Flüssigkeiten und allen Feststoffen  $c_p$  gleich  $c_v$  ist und Temperaturdifferenzen in der Einheit  $^\circ\text{C}$  gleich sind mit Temperaturdifferenzen in K. Das Differenzial  $d\vartheta$  ist eine Temperaturdifferenz. Die dem Wasser der Masse 30 kg zuzuführende Wärme ist  $Q_{12}$ .

$$Q_{12} = m \cdot q_{12} = 30 \text{ kg} \cdot 209,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 6277,5 \text{ kJ} = 1,744 \text{ kWh}$$

## Aufgabe 2.3: Die Wärmekapazität einer Sodalösung berechnen

Eine 8-prozentige Sodalösung besteht aus 8 Massenprozenten Soda (Backsoda, Natron) und 92 Massenprozenten Wasser. Zusammen also 100 Massenprozent. Nehmen Sie an, die Sodalösung entspricht einer (beliebigen) Masse von  $m = 1 \text{ kg}$ , dann gilt:

$$1 \text{ kg} = m_{\text{Soda}} + m_{\text{W}} = 0,08 \text{ kg Soda} + 0,92 \text{ kg Wasser}$$

$$\text{Die Massenanteile sind } \frac{m_{\text{Soda}}}{m_{\text{Soda}} + m_{\text{W}}} = 0,08 \text{ für Soda und für Wasser } \frac{m_{\text{W}}}{m_{\text{Soda}} + m_{\text{W}}} = 0,92.$$

$$c_{\text{Sodawasser}} = \frac{m_{\text{Soda}}}{m_{\text{Soda}} + m_{\text{W}}} \cdot c_{\text{Soda}} + \frac{m_{\text{W}}}{m_{\text{Soda}} + m_{\text{W}}} \cdot c_{\text{W}}$$

$$c_{\text{Sodawasser}} = 0,08 \cdot 1,171 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + 0,92 \cdot 4,182 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 3,941 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_{\text{Sodawasser}} = (c_p)_{\text{Sodawasser}} = (c_v)_{\text{Sodawasser}} = 3,941 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

## Aufgabe 3.1: Das Molvolumen aus der Dichte eines Gases berechnen

Die für das gesuchte Molvolumen hier zutreffende Gleichung lautet:  $V_{\text{Mol}} = V/n$ . Die Stoffmenge  $n$  ist noch unbekannt, jedoch ist die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$  gegeben. Die Stoffmenge lässt





## 8 Lösungen und Lösungswege

sich mithilfe der Gleichung  $n = m/m_{\text{Mol}}$  berechnen. Somit kann die Stoffmenge  $n$  aus der ersten Gleichung ersetzt werden.

$$V_{\text{Mol}} = \frac{V}{m} \cdot m_{\text{Mol}}$$

Die Größe  $V/m$  ist das spezifische Volumen  $v$ . Die Dichte  $\rho$  ist der Kehrwert des spezifischen Volumens  $v$ .

$$\rho = \frac{1}{v} = \frac{m}{V}$$

$$V_{\text{Mol}} = \frac{1}{\rho} \cdot m_{\text{Mol}}$$

$$V_{\text{Mol}} = \frac{1 \cdot \text{m}^3}{14,114 \text{ kg}} \cdot 44,009 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 3,118 \frac{\text{m}^3}{\text{kmol}}$$

Für jedes Kilomol  $\text{CO}_2$  wird ein Volumen von  $3,118 \text{ m}^3$  benötigt; die Dichte ändert sich dann nicht.

### Aufgabe 3.2: Molmasse eines H-Atoms bestimmen

Ein Mol atomarer Wasserstoff besteht aus  $6,022136 \times 10^{23}$  H-Atomen. Jedes H-Atom besitzt eine Masse von  $1,674 \times 10^{-24} \text{ g}$ . Da  $6,022136 \times 10^{23}$  H-Atome genau ein Mol H ausmachen, beträgt die Masse von  $6,022136 \times 10^{23}$  H-Atomen:

$$6,022136 \times 10^{23} \text{ H-Atome} = 1 \text{ mol H-Atome} = 6,022136 \times 10^{23} \cdot 1,674 \times 10^{-24} \text{ g}$$

1 mol H-Atome entsprechen also 1,008 g. Die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$  ist die Masse eines Mols.

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{H}} = 1,008 \text{ g/mol}$$

Im Prinzip wurde die Gleichung  $m = n \cdot m_{\text{Mol}}$  benutzt. Da die Molmasse die Masse eines Mols eines Stoffes ist, muss zur Anwendung der Gleichung  $n = 1 \text{ mol}$  gesetzt werden. Ein Mol besteht aber immer aus  $6,022136 \times 10^{23}$  Teilchen (H-Atomen). Die Gesamtmasse von  $6,022136 \times 10^{23}$  Teilchen ist  $m = 6,022136 \times 10^{23} \cdot 1,674 \times 10^{-24} \text{ g} = 1,008 \text{ g}$ .

$$m_{\text{Mol}} = \frac{m}{n} = \frac{1,008 \text{ g}}{1 \text{ mol}} = 1,008 \text{ g/mol}$$

### Aufgabe 3.3: Stoffmenge eines Salzkristalls

Im Periodensystem der Elemente finden Sie die relative Atommasse für Natrium und Chlor, die Sie aber mit der Einheit g/mol versehen müssen, da Sie an der Molmasse interessiert sind.

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{Na}} = 22,990 \text{ g/mol}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{Cl}} = 35,453 \text{ g/mol}$$





## Lösungen und Lösungswege 9

Die Molmasse der NaCl-Verbindungen ist durch die Summe der beiden Molmassen bestimmt.  $(m_{\text{Mol}})_{\text{NaCl}} = 58,443 \text{ g/mol}$ . Das bedeutet, dass 1 mol der NaCl-Verbindungen eine Masse von 58,443 g besitzt. Die Lösung gelingt mit dem Dreisatz.

$$1 \text{ mol NaCl} \hat{=} 58,443 \text{ g}$$

Mithilfe des Dreisatzes können Sie vorerst 1 g der NaCl-Verbindungen bestimmen. Sie müssen die vorstehende Zeile (1. Satz des Dreisatzes) durch 58,443 teilen.

$$\frac{1 \text{ mol NaCl}}{58,443} \hat{=} \frac{58,443}{58,443} \text{ g}$$

$$\frac{1 \text{ mol NaCl}}{58,443} \hat{=} 1 \text{ g}$$

Die Feststellung für die Basis 1 g war der 2. Schritt des Dreisatzes. Das Zeichen  $\hat{=}$  bedeutet »entspricht«. Wenn Sie die letzte Zeile auf beiden Seiten mit 50 multiplizieren, erhalten Sie auf der rechten Seite 50 g, genau die gegebene Zahl. Der 3. Schritt lautet:

$$50 \cdot \frac{1 \text{ mol NaCl}}{58,443} \hat{=} 50 \text{ g}$$

$$50 \text{ g} \hat{=} \frac{50 \text{ mol NaCl}}{58,443} = 0,856 \text{ mol NaCl}$$

50 Gramm NaCl-Verbindungen entsprechen einer Stoffmenge von  $n = 0,856 \text{ mol}$ .

### Aufgabe 3.4: Massenstrom berechnen

Im Anfangszustand 1 kann der Druck  $p_1$  mithilfe des hydrostatischen Grundgesetzes nach Euler berechnet werden:

$$p_1 = p_0 - \rho_W \cdot g \cdot h_1$$

$$p_1 = 1 \text{ bar} - 998,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,14 \text{ m} = 98628,9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Die Dichte des eingeschlossenen Wasserstoffgases im Anfangszustand ist:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R \cdot T} = 0,0816 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Bevor der Massenstrom  $\dot{m}$  berechnet werden kann, ist es erforderlich, den Volumenstrom  $\dot{V}$  festzustellen. In der Zeitspanne von 224 Sekunden hat sich das Anfangsvolumen  $V_1 = 0,05 \text{ Liter}$  auf  $V_2 = 2,85 \text{ Liter}$  erhöht. Die Volumenänderung beträgt somit  $2,80 \text{ dm}^3$ . Der Volumenstrom ist die Volumenänderung pro Zeitspanne.

$$\dot{V} = \frac{2,80 \text{ dm}^3}{224 \text{ s}} = 0,0125 \frac{\text{Liter}}{\text{s}}$$

Aufgrund der idealen Gasgleichung in der vierten Form gilt:

$$\dot{m} = \frac{p_2 \cdot \dot{V}}{R \cdot T}$$





## 10 Lösungen und Lösungswege

Denken Sie daran, dass der Massenstrom erst rückwirkend nach dem Schließen des Ventils ermittelbar ist, also nach der Prozesszeit von 224 Sekunden. Dann aber liegt der Gaszustand 2 vor, und der Druck  $p_2$  geht in die ideale Gasgleichung ein. Wie groß ist der Druck  $p_2$ ?

Der Strömungsvorgang ist abgeschlossen, das Gas ist ein statisches Gas geworden, das heißt, es gibt im Gas keine messbaren Gasgeschwindigkeiten. Wieder hilft hier das Grundgesetz der Hydrostatik. Der Druck im Wasserstoffgas wird durch den Luftdruck  $p_0$  und der Wassersäule  $h_2$  bestimmt.

$$p_2 = p_0 + \rho_W \cdot g \cdot h_2$$

Berechnen Sie  $p_2$  und fügen Sie den Zahlenwert in die ideale Gasgleichung ein.

$$p_2 = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 998,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,19 \text{ m} = 101860,73 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Zur Umrechnung benötigen Sie die Formel:  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ . Wie groß ist der Massenstrom?

$$\dot{m} = \frac{101860,73 \text{ N} \cdot 0,0125 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot 4123,8 \text{ J} \cdot (273,15 + 20) \text{ K}}$$

$$\dot{m} = 0,001053 \frac{\text{N} \cdot \text{dm}^3 \cdot \text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{J}} = 0,001053 \frac{\text{N} \cdot \text{dm}^3 \cdot \text{kg}}{\text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{N} \cdot \text{m}}$$

$$\dot{m} = 0,001053 \frac{\text{m}^3 \cdot \text{kg}}{1000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}} = 1,053 \times 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Im Mittel strömten  $1,053 \times 10^{-6} \text{ kg}$  Wasserstoffgas pro Sekunde in die Glasglocke.

### Aufgabe 3.5: Luftfederung

Sie haben erkannt, dass hier zwei Gaszustände zusammenwirken. Sie müssen deshalb die unterschiedlichen Werte der Zustandsgrößen klar auseinanderhalten. Demzufolge gilt für den Anfangszustand:  $p_1 = 2,4 \text{ bar}$ ,  $\vartheta_1 = 15 \text{ °C}$  und  $V_1 = 4,8 \text{ Liter}$ . Im Endzustand, also nach der Verdichtung gilt:  $\vartheta_2 = 47 \text{ °C}$ ,  $V_2 = 3,1 \text{ Liter}$ . Gesucht wird der Druck  $p_2$ . Das Gas sei ein ideales Gas. Grundsätzlich wird dann jeder Gaszustand durch die ideale Gasgleichung beschrieben. Sie können somit für jeden Gaszustand die passende ideale Zustandsgleichung notieren. Hier eignet sich die folgende Form der idealen Gasgleichung:

$$p_1 \cdot V_1 = m_1 \cdot R_1 \cdot T_1 \quad \text{und} \quad p_2 \cdot V_2 = m_2 \cdot R_2 \cdot T_2$$

Natürlich ändern sich die Größen  $m$  und  $R$  während der Verdichtung nicht. Für diese Größen war also kein Index notwendig, aber der Form halber wurden sie mit den Indizes versehen. Es gilt:

$$m_1 = m_2 \quad \text{und} \quad R_1 = R_2$$

Sie können zum Beispiel die linke Gasgleichung nach  $m_1$ , die rechte nach  $m_2$  umstellen und gleichsetzen.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{R_1 \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{R_2 \cdot T_2}$$



## Lösungen und Lösungswege 11

$R_1$  lässt sich mit  $R_2$  kürzen, und der Druck  $p_2$  kann eindeutig bestimmt werden.

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \frac{T_2}{V_2}$$

Sie prüfen sofort die Einheiten und erkennen, dass der Druck  $p_2$  dieselbe Einheit besitzt wie  $p_1$ . Die Rechnung und die Umstellungen der Gleichungen scheinen in Ordnung zu sein. Achten Sie darauf, dass das Formelzeichen  $T$  in der idealen Gasgleichung immer eine Temperaturangabe in Kelvin erzwingt.

$$p_2 = \frac{2,4 \text{ bar} \cdot 4,8 \text{ Liter}}{(273,15 + 15) \text{ K}} \cdot \frac{(273,15 + 47) \text{ K}}{3,1 \text{ Liter}} = 4,129 \text{ bar}$$

Durch die Verdichtung ist der Druck des idealen Gases auf 4,129 bar gestiegen.

### Aufgabe 3.6: Druckausgleich bei verschiedenen Gasen

Wenn Mengenbilanzen bei Gasen durchgeführt werden, ist es wichtig, die Massen der Gase zu betrachten. Das Volumen eignet sich hierfür nicht, da ein Gasvolumen immer von Druck und Temperatur abhängig ist. Die Lösungsstrategie ist folgende: Gesucht sind die Massen der Gase in den Tanks vor dem Öffnen des Ventils. Nach der Öffnung ist die Gesamtmasse die Summe aus den Einzelmassen und für das Gesamtvolumen gilt  $V_3 = V_1 + V_2$ . Es kommt die ideale Gasgleichung  $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$  für die drei Zustände zur Anwendung.

Masse des Gases im Tank 1 (Zustand 1):

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R_1 \cdot T_1} = \frac{7 \text{ bar} \cdot 0,6 \text{ m}^3}{296,7 \text{ J} \cdot T_1} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}$$

Masse des Gases im Tank 2 (Zustand 2):

$$m_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{R_2 \cdot T_1} = \frac{5 \text{ bar} \cdot 3,2 \text{ m}^3}{259,8 \text{ J} \cdot T_1} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}$$

Die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  sind gleich. Wenn nach einer Weile die Druckwellen in den Tanks abgeklungen sind, soll die Gasmischung durch den Index »3« als gemeinsamer Zustand charakterisiert werden. Dann gilt wieder die ideale Gasgleichung; sie lautet für den Zustand 3:

$$p_3 \cdot (V_1 + V_2) = m_3 \cdot R_3 \cdot T_1$$

$$m_3 = m_1 + m_2$$

$R_3$  ist die Gaskonstante des Gasgemischs.

$$R_3 = \frac{m_1}{m_3} \cdot R_1 + \frac{m_2}{m_3} \cdot R_2$$

Gesucht ist der Druck  $p_3$ .

$$p_3 = (m_1 + m_2) \cdot \left( \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot R_1 + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot R_2 \right) \cdot T_1 \cdot \frac{1}{(V_1 + V_2)}$$



## 12 Lösungen und Lösungswege

$$p_3 = (m_1 \cdot R_1 + m_2 \cdot R_2) \cdot T_1 \cdot \frac{1}{(V_1 + V_2)}$$

$$p_3 = \left( \frac{p_1 \cdot V_1}{R_1 \cdot T_1} \cdot R_1 + \frac{p_2 \cdot V_2}{R_2 \cdot T_1} \cdot R_2 \right) \cdot T_1 \cdot \frac{1}{(V_1 + V_2)}$$

$$p_3 = \frac{p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = 5,316 \text{ bar}$$

Nach dem Druckausgleich beträgt der Gleichgewichtsdruck  $p_3 = 5,316 \text{ bar}$ .

### Aufgabe 3.7: Einen Gasbehälter auf Dichtigkeit prüfen

Zur Lösung wird wieder die Strategie benutzt, dass der Lösungsweg über die Betrachtung der Masse des Gases erfolgen muss, wie es die Aufgabe durch die Fragestellung schon andeutet. Aufgrund der gegebenen Daten lassen sich Masse und Massenänderung des Gases bestimmen. Sie haben erkannt, dass wieder zwei Gaszustände betrachtet werden müssen und dass für jeden Gaszustand die ideale Gasgleichung gilt. Der Gaszustand 1 sei der Zustand zur Zeit  $t = 0$ , der Gaszustand 2 bezieht sich auf die Messungen zur Zeit  $t = 15 \text{ Minuten}$ .

Gaszustand 1:  $V_1 = 10 \text{ Liter}$ ,  $p_1 = 5,5 \text{ bar}$ ,  $T_1 = (273,15+20) \text{ K}$ ,  $R = 296,7 \text{ J}/(\text{kg K})$

Gaszustand 2:  $V_1 = 10 \text{ Liter}$ ,  $p_2 = 5,3 \text{ bar}$ ,  $T_2 = (273,15+20) \text{ K}$ ,  $R = 296,7 \text{ J}/(\text{kg K})$

Gaszustand 1,  $t = 0$ : Im geschlossenen Behälter befindet sich die Masse  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1}$$

Gaszustand 2,  $t = 15 \text{ min}$ : Im geschlossenen Behälter befindet sich die Masse  $m_2$ .

$$m_2 = \frac{p_2 \cdot V_1}{R \cdot T_2}$$

Da der Druck gefallen ist, muss  $m_2$  kleiner sein als  $m_1$ . Die entwichene Masse ist:

$$m_1 - m_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} - \frac{p_2 \cdot V_1}{R \cdot T_2} = (p_1 - p_2) \cdot \frac{V_1}{R \cdot T_1}$$

$$m_1 - m_2 = (5,5 - 5,3) \text{ bar} \frac{10 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{296,7 \text{ J} \cdot (273,15 + 20) \text{ K}} = 0,0000229 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot \text{kg}}{\text{J}}$$

$$m_1 - m_2 = 0,0000229 \frac{10^5 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^3}{\text{m}^3 \cdot \text{J} \cdot 1000} = 0,00229 \text{ kg}$$

Infolge einer undichten Stelle am Verschluss sind 2,29 Gramm Gas aus dem Behälter entwichen.



### Aufgabe 3.8: Ein Kilogramm Gas im Normzustand einschließen

Gesucht ist das Volumen der Luft, wenn die Masse der Luft  $m = 1 \text{ kg}$  ist und die Luft sich im Normzustand befindet. Die hierfür geeignete ideale Zustandsgleichung lautet:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$V = \frac{m \cdot R \cdot T}{p} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J} \cdot 273,15 \text{ K}}{\text{kg} \cdot \text{K} \cdot 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}} = 0,77396 \frac{\text{J}}{\text{Pa}} = 0,77396 \frac{\text{J}}{\text{J}} \cdot \text{m}^3$$

$$V = L^3 = 0,774 \text{ m}^3$$

Das berechnete Volumen des Gases von  $V = 0,774 \text{ m}^3$  soll im Kasten mit der inneren Kantenlänge  $L$  untergebracht werden.

$$L = \sqrt[3]{0,774 \text{ m}^3} = (0,774 \text{ m}^3)^{1/3} = 0,918 \text{ m}$$

Der würfelförmige Kasten muss eine Kantenlänge mit einer inneren Abmessung von  $L = 0,918 \text{ m}$  besitzen.

Wäre das Gas im Standardzustand (Druck  $p = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$  und Temperatur  $\vartheta = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ) im würfelförmigen Kasten eingeschlossen, müsste die innere Kantenlänge  $L = 0,945 \text{ m}$  sein. Durch die höhere Gastemperatur des Standardzustands wird auch ein im Vergleich zum Normzustand größeres Volumen bei konstantem Druck benötigt.

### Aufgabe 3.9: Ein dreistufiger Verdichtungsprozess

Hier ist eine Gleichung für die Temperatur des Gases im Zustand 4 zu entwickeln, damit aus den gegebenen Zustandsgrößen die Temperatur  $T_4$  berechnet werden kann. An jedem Zustandspunkt und an jedem beliebigen Punkt auf der Zustandsfunktion gilt die ideale Gasgleichung. Weil weder Masse noch Volumen gegeben sind, wird hier die ideale Gasgleichung (= thermische Zustandsgleichung) der 2. Form an allen vier Zustandspunkten benutzt. Das Gas besteht immer aus denselben Teilchen;  $R = \text{konstant}$ .

$$p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

$$p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2 \quad \text{wobei} \quad v_2 = v_1 \quad \text{ist}$$

$$p_3 \cdot v_3 = R \cdot T_3 \quad \text{wobei} \quad T_3 = T_2 \quad \text{ist}$$

$$p_4 \cdot v_4 = R \cdot T_4 \quad \text{wobei} \quad p_4 = p_3 \quad \text{ist}$$

Gesucht ist  $T_4$ ; mit  $p_4 = p_3$  folgt aus den Gleichungen an den Zustandspunkten 4 und 3:

$$T_4 = p_4 \cdot \frac{v_4}{R} = \frac{R \cdot T_3}{v_3} \cdot \frac{v_4}{R} = \frac{v_4}{v_3} \cdot T_3$$



## 14 Lösungen und Lösungswege

$T_3$  ist gleich  $T_2$ .  $T_2$  kommt aus der Gleichung am Zustandspunkt 2 und  $v_2$  wird durch  $v_1$  ersetzt.

$$T_4 = \frac{v_4}{v_3} \cdot T_3 = \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{p_2 \cdot v_2}{R} = \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{p_2}{R} \cdot \underbrace{\left( \frac{R \cdot T_1}{p_1} \right)}_{= v_1 = v_2}$$

$$T_4 = \frac{v_4}{v_3} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1$$

Die Prüfung der Einheiten zeigt, dass  $T_4$  die Einheit Kelvin erhält.

### Aufgabe 3.10: Eine luftgefüllte Stahlflasche kühlt sich ab

Für den Zustand 1 der in der Flasche vorhandenen Luft direkt nach der Füllung gilt:

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1$$

Hieraus ergibt sich mit  $p_1 = 6 \text{ bar}$ ,  $V_1 = 0,020 \text{ m}^3$ ,  $T_1 = (273,15 + 28) \text{ K}$  die Masse der trockenen Luft.

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{3,98518 \times 10^{-4} \cdot \text{bar} \cdot \text{m}^3}{R \cdot \text{K}}$$

Am nächsten Morgen ist die Stahlflasche infolge eines Temperatursturzes von  $\vartheta_1 = 28 \text{ }^\circ\text{C}$  auf  $\vartheta_2 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$  geschrumpft und ihr Inhalt  $V_2$  ist nur noch 99 % von  $V_1$ . Die Masse der trockenen Luft ist unverändert geblieben. Für diesen neuen Zustand 2 gilt jetzt:

$$p_2 \cdot V_2 = m \cdot R \cdot T_2 \quad \text{oder} \quad p_2 = \frac{m \cdot R \cdot T_2}{V_2} = \frac{m \cdot R \cdot T_2}{0,99 \cdot V_1}$$

Die Masse  $m$  der Luft wurde im Zustand 1 bestimmt und kann eingesetzt werden.

$$p_2 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \cdot \frac{R \cdot T_2}{0,99 \cdot V_1} = p_1 \cdot \frac{T_2}{0,99 \cdot T_1} = 5,598 \text{ bar}$$

### Aufgabe 3.11: Sauerstoff in Flaschen umfüllen

Die Lösungsstrategie beruht auf der Massenbilanz des Sauerstoffs, der aus dem Tank in die  $x$  Flaschen umgefüllt wird. Alle Flaschen sind völlig leer, das heißt, der Druck in jeder einzelnen Flasche ist praktisch null; ein Vakuum befindet sich in der Flasche, was nicht besonders realistisch ist. Der maximale Druck in einer aufgefüllten Flasche (Index F) soll 60 bar betragen. Demnach lässt sich die Masse des Sauerstoffs  $m_F$  in jeder Flasche berechnen.



## Lösungen und Lösungswege 15

Aus der idealen Gasgleichung der Form  $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$  folgt mit  $p_F = 60 \text{ bar}$  und  $V_F = 5 \text{ Liter} = 0,005 \text{ m}^3$ :

$$m_F = \frac{p_F \cdot V_F}{R \cdot T} = \frac{60 \text{ bar} \cdot 0,005 \text{ m}^3}{R \cdot T} = 0,3 \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{R \cdot T}$$

Weil die Temperatur  $T$  und die Gaskonstante  $R$  sich nicht ändern, bleibt  $R \cdot T$  konstant und kann später gekürzt werden.

Im großen Sauerstofftank (Index T) ist der Anfangsdruck  $(p_T)_{\max} = 180 \text{ bar}$ , der während der Umfüllaktion abfällt. Wenn der minimale Druck  $(p_T)_{\min} = 60 \text{ bar}$  im Tank erreicht wird, ist die Umfüllaktion einzustellen, damit sichergestellt ist, dass alle Flaschen mit einem Druck von 60 bar ausgeliefert werden. Die zu diesem Zeitpunkt aus dem Tank entnommene Sauerstoffmasse  $\Delta m_T$  berechnet sich wie folgt:

$$\Delta m_T = \frac{((p_T)_{\max} - (p_T)_{\min}) \cdot V_T}{R \cdot T} = \frac{(180 \text{ bar} - 60 \text{ bar}) \cdot 4 \text{ m}^3}{R \cdot T} = 480 \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{R \cdot T}$$

Diese Masse wird in die  $x$  Gasflaschen abgefüllt. Es gilt:  $\Delta m_T = x \cdot m_F$ .

$$x = \frac{\Delta m_T}{m_F} = \frac{((p_T)_{\max} - (p_T)_{\min}) \cdot V_T}{p_F \cdot V_F} = 1600 \text{ Flaschen}$$

Zusatzfrage: Normalerweise sind die Sauerstoffflaschen nicht leer, wenn sie in der Umfüllstation abgegeben werden, sondern der Sauerstoff in der Flasche steht unter Atmosphärendruck. In der Flasche ist sozusagen noch ein Rest an Sauerstoff vorhanden. Wenn der Restdruck in der leeren Gasflasche  $p_R = 1 \text{ bar}$  beträgt, wie viele Gasflaschen kann man bei sonst gleichen Bedingungen aus dem Tank abfüllen? Lösung: 1627 Stück.

### Aufgabe 3.12: Dauerbelastung eines pneumatischen Stoßdämpfers

Zustand 1 beschreibt den unbelasteten Stoßdämpfer, Zustand 2 den belasteten. Im Zustand 1 beträgt die konstante Masse der eingeschlossenen Luft:

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1}$$

Infolge der Dauerbelastung steigt der Druck des Gases auf  $p_2 = 8 \text{ bar}$  und das Gasvolumen schrumpft auf  $V_2$ . Die Gastemperatur  $T_2$  ist nach einer kurzen Wartezeit wieder auf die Anfangstemperatur vor der Dauerbelastung zurückgegangen, sodass  $T_1$  gleich  $T_2$  ist. Es gilt:

$$V_2 = \frac{m \cdot R \cdot T_2}{p_2}$$

Die Volumenänderung des Gases infolge der Dauerbelastung beruht auf dem Weg  $x$  des verschiebbaren Kolbens:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 - \frac{m \cdot R \cdot T_2}{p_2}$$



## 16 Lösungen und Lösungswege

Die Masse  $m$  ist durch den Anfangszustand gegeben; zudem ist  $\Delta V = x \cdot D^2 \cdot \pi/4$ .

$$\Delta V = V_1 - \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} \cdot \frac{R \cdot T_2}{p_2} = V_1 \cdot \left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) = 0,001563 \text{ m}^3$$

$$\text{Kolbenweg } x = \frac{4 \cdot \Delta V}{\pi \cdot D^2} = 0,311 \text{ m}$$

### Aufgabe 3.13: Masse und Stoffmenge

Gegeben ist das Volumen  $V = 0,002 \text{ m}^3$ , deshalb ist die ideale Gasgleichung der 1. Form anzuwenden, um die Masse des Stickstoffgases zu bestimmen. Die Gaskonstante ist in Tabelle 3.2 mit  $R = 296,7 \text{ J}/(\text{kg K})$  aufgeführt.

$$m = \frac{p \cdot V}{R \cdot T} = 3,922 \text{ g}$$

Die Dichte  $\rho$  kann aus der idealen Gasgleichung der 3. Form berechnet werden; aus der 5. Form erhalten Sie die Anzahl der  $\text{N}_2$ -Moleküle.

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{1,7 \text{ bar} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{296,7 \text{ J} \cdot (273,15 + 19) \text{ K}} \cdot \frac{100000 \text{ J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} = 1,961 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$N = \frac{p \cdot V}{k \cdot T} = \frac{1,7 \text{ bar} \cdot 0,002 \text{ m}^3 \cdot \text{K}}{1,38065 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot (273,15 + 19) \text{ K}} \cdot \frac{100000 \text{ J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} = 8,42926 \times 10^{22}$$

Mit der Formel  $N = n \cdot N_{\text{Avo}}$  ist eine Möglichkeit gegeben, die Stoffmenge  $n$  zu bestimmen.

$$n = \frac{N}{N_{\text{Avo}}} = \frac{8,42926 \times 10^{22} \cdot \text{mol}}{6,022136 \times 10^{23}} = 0,1399 \text{ mol}$$

### Aufgabe 3.14: Norm- und Standardzustand

Der Normzustand ist immer durch den Druck  $p = 1,01325 \text{ bar}$  und durch die Temperatur  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  festgelegt. Im Zustand 1 gilt  $p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1$  wobei  $p_1 = 125 \text{ kPa}$ ,  $T_1 = (273,15+20) \text{ K}$  und  $V_1 = 350 \text{ ml} = 0,00035 \text{ m}^3$  sind. Im Normzustand gilt ebenfalls die ideale Gasgleichung.

$$p_{i,N} \cdot V_{i,N} = m \cdot R \cdot T_{i,N}$$

Die Masse  $m$  und die Gaskonstante  $R$  bleiben unverändert. Deshalb kann man beide Gleichungen nach  $m \cdot R$  umstellen und gleichsetzen. Das Volumen im Normzustand ist dann:

$$V_{i,N} = \frac{p_1}{p_{i,N}} \cdot \frac{T_{i,N}}{T_1} \cdot V_1 = 402,3 \text{ ml}$$

Im Standardzustand bei  $1,01325 \text{ bar}$  und  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  beträgt das Volumen  $V_{i,S}$ :

$$V_{i,S} = \frac{p_1}{p_{i,S}} \cdot \frac{T_{i,S}}{T_1} \cdot V_1 = 439,1 \text{ ml}$$





## Lösungen und Lösungswege 17

Ist das gegebene Gas in einem 200 ml großen Behälter bei einem Druck von 200 kPa (2 bar) eingeschlossen, dann beträgt die Temperatur im Behälter:

$$T = \frac{p \cdot V}{m \cdot R} = 200 \text{ kPa} \cdot 200 \text{ ml} \cdot \frac{1}{m \cdot R} = 200 \text{ kPa} \cdot 200 \text{ ml} \cdot \frac{T_1}{p_1 \cdot V_1}$$

$$T = \frac{200 \text{ kPa} \cdot 200 \text{ ml}}{125 \text{ kPa} \cdot 350 \text{ ml}} \cdot (273,15 + 20) \text{ K} = 268,02 \text{ K} \quad (\text{entspricht } -5,1 \text{ } ^\circ\text{C})$$

### Aufgabe 3.15: Außergewöhnlicher Verdichtungsprozess

Der Verdichtungsprozess beginnt am Zustandspunkt 1 mit den Koordinaten  $v_1 = 0,25 \text{ m}^3/\text{kg}$  und  $T_1 = 330 \text{ K}$ . Die Verdichtungsfunktion

$$p = \frac{23685,75}{v^2} \cdot \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{kg}^2},$$

die durch den Anfangspunkt läuft, gibt an, dass  $v$  in der Einheit  $\text{m}^3/\text{kg}$  eingesetzt werden muss und der Druck dann die Einheit  $\text{J}/\text{m}^3$  erhält. Am Zustandspunkt 1 lässt sich der Druck  $p_1$  mithilfe der Verdichtungsfunktion oder mit der idealen Gasgleichung berechnen. Mit der Verdichtungsfunktion erhält man:

$$p_1 = \frac{23685,75}{0,25^2} \cdot \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 378972 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad \text{entspricht } 3,789 \text{ bar}$$

Somit sind am Zustandspunkt 1 alle Daten bekannt, um die Gaskonstante  $R$  bestimmen zu können.

$$R = \frac{p_1 \cdot v_1}{T_1} = 287,1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Die Verdichtung ist abgeschlossen, wenn das spezifische Volumen  $v_2 = 0,1 \text{ m}^3/\text{kg}$  erreicht ist. An diesem Zustandspunkt 2 ergibt sich für den Druck  $p_2$  und die Temperatur  $T_2$ :

$$p_2 = \frac{23685,75}{0,1^2} \cdot \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = 2368575 \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \quad \text{entspricht } 23,686 \text{ bar}$$

$$T_2 = \frac{p_2 \cdot v_2}{R} = 825 \text{ K} \quad \text{oder} \quad T_2 = \frac{v_1}{v_2} \cdot T_1 = 825 \text{ K}$$

Die letzte Gleichung entsteht aus der Beziehung  $p_1 \cdot v_1^2 = p_2 \cdot v_2^2$ , wobei für die Drücke  $p_1 = R \cdot T_1/v_1$  und  $p_2 = R \cdot T_2/v_2$  ersetzt sind.

Im Zwischenzustand 3, mit  $v_3 = 0,16 \text{ m}^3/\text{kg}$ , kann wieder mithilfe der Prozessfunktion der Druck  $p_3 = 9,252 \text{ bar}$  errechnet werden.



## 18 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 3.16: Masse und Dichte einer Stoffmenge

1,4 mol Stickstoff sind eingeschlossen in einem Behälter. Ein Manometer zeigt den Druck  $p = 719 \text{ kPa}$  und ein Thermometer die Temperatur  $\vartheta = 36 \text{ °C}$  an. Mit der idealen Gasgleichung der 6. Form und der universellen Gaskonstante  $\mathfrak{R}$  erhält man das Volumen.

$$V = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot T}{p} = \frac{1,4 \text{ mol} \cdot 8,31447 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot (273,15 + 36) \text{ K}}{\text{mol} \cdot \text{K} \cdot 719000 \text{ Pa}} = 0,005 \text{ m}^3$$

Die Masse kann ebenfalls mithilfe der idealen Gasgleichung oder mit der Molmasse von Stickstoff aus Tabelle 3.2 bestimmt werden.

$$m = \frac{p \cdot V}{R_{\text{N}_2} \cdot T} = \frac{7,19 \text{ bar} \cdot 0,005 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ g} \cdot \text{K} \cdot 100000 \text{ J}}{296,7 \text{ J} \cdot (273,15 + 36) \text{ K} \cdot \text{bar} \cdot \text{m}^3} = 39,2 \text{ g}$$

$$m = n \cdot m_{\text{Mol}} = 1,4 \text{ mol} \cdot 28,014 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 39,2 \text{ g}$$

Zur Berechnung der Dichte  $\rho$  kann die Masse  $m$  und das Volumen  $V$  herangezogen werden.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0,0392 \text{ kg}}{0,005 \text{ m}^3} = 7,84 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

### Aufgabe 3.17: Zum 1. Gesetz von Gay-Lussac (Gesetz von Charles)

Das Gesetz von Gay-Lussac und Charles beschreibt die Volumenänderung  $V(T)$  eines idealen Gases infolge einer Temperaturänderung gegenüber der Bezugstemperatur  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  bei konstantem Druck und konstanter Masse.

$$V(T) = V_0 \cdot [1 + \gamma \cdot (T - T_0)] = V_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{273,15 \text{ K}} \cdot (T - T_0) \right]$$

Die Bezugstemperatur  $T_0$ , von der aus die Temperaturänderung zu messen ist, beträgt  $273,15 \text{ K}$ . Alle Zustandsvariablen, die bei der Bezugstemperatur gegeben sind, haben den Index  $\gg 0 \ll$ . Mit  $T_0 = 273,15 \text{ K}$ ,  $V_0 = 10 \text{ Liter}$ ,  $\gamma = 1/(273,15 \text{ K})$  und der neuen Temperatur  $T = 303,15 \text{ K}$  (entspricht  $30 \text{ °C}$ ) nach der Zustandsänderung ergibt sich das Volumen des Gases.

$$V = 10 \text{ Liter} \cdot \left( 1 + \frac{(303,15 \text{ K} - 273,15 \text{ K})}{273,15 \text{ K}} \right) = 11,098 \text{ Liter}$$

Die alternative Rechnung führt mit  $\gamma = 1/T_0$ ,  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  und  $p = \text{konstant}$  zur idealen Gasgleichung.

$$p_0 \cdot V_0 = m \cdot R \cdot T_0 \quad \text{und} \quad p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

$$m \cdot R = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad \text{und} \quad m \cdot R = \frac{p \cdot V}{T}$$

Gleichgesetzt und nach  $V$  umgestellt folgt mit  $p_0 = p$ :

$$V = \frac{T}{T_0} \cdot V_0 = \frac{303,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}} \cdot 10 \text{ Liter} = 11,098 \text{ Liter}$$



### Aufgabe 3.18: Relative Zustandsgrößen berechnen

Im Behälter befindet sich ein ideales Gas, dessen Zustand stets durch die ideale Gasgleichung  $p \cdot v = R \cdot T$  bestimmt werden kann. Wenn kleine Zustandsänderungen betrachtet werden, lassen sich diese durch die partiellen Änderungen in der idealen Gasgleichung erfassen. Sie können totale Differenziale benutzen oder die partiellen Ableitungen nach den vorhandenen Variablen aus der idealen Gasgleichung bestimmen.

$$d(p \cdot v) = d(R \cdot T)$$

$$dp \cdot v + p \cdot dv = R \cdot dT$$

Die isotherme Druckänderung erhält man mit  $dT = 0$ :

$$dp = \frac{-p \cdot dv}{v}$$

Daraus folgt die relative Druckänderung  $dp/p$ :

$$\frac{dp}{p} = \frac{-dv}{v}$$

Die Dichte  $\rho$  kann aus dem spezifischen Volumen bestimmt werden:  $\rho = 1/v$ . Die partielle Ableitung ergibt:

$$d\rho = \frac{1}{v} \cdot \frac{-dv}{v} = \rho \cdot \frac{-dv}{v} \quad \text{oder} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-dv}{v}$$

Zwischen relativer Druckänderung und relativer Dichteänderung  $d\rho/\rho$  stellen sich somit die folgenden Beziehungen ein.

$$\frac{dp}{p} = \frac{-dv}{v} = \frac{d\rho}{\rho}$$

### Aufgabe 4.1: Partialdrücke und Temperatur einer Gasmischung

Mit den Stoffmengen 1,15 kmol und 0,55 kmol können Sie mithilfe der Avogadro-Zahl  $N_{\text{Avo}}$  auf die Anzahl der  $\text{H}_2$ - und  $\text{N}_2$ -Teilchen schließen. Nach der Vermischung ist die Stoffmenge der Mischung  $n_{\text{ges}}$  die Summe der einzelnen Stoffmengen.

$$n_{\text{ges}} = n_1 + n_2 = 1,7 \text{ mol}$$

Gesucht werden die Partialdrücke  $p_1$  und  $p_2$ .

$$p_1 = y_1 \cdot p_{\text{ges}}$$

$$p_1 = \frac{n_1}{n_{\text{ges}}} \cdot p_{\text{ges}}$$

$$p_1 = p_{\text{H}_2} = \frac{n_1}{n_{\text{ges}}} \cdot p_{\text{ges}} = \frac{1,15 \text{ mol}}{1,7 \text{ mol}} \cdot 420 \text{ kPa} = 284,12 \text{ kPa}$$

$$p_2 = p_{\text{N}_2} = \frac{n_2}{n_{\text{ges}}} \cdot p_{\text{ges}} = \frac{0,55 \text{ mol}}{1,7 \text{ mol}} \cdot 420 \text{ kPa} = 135,88 \text{ kPa}$$



## 20 Lösungen und Lösungswege

Vor der Vermischung waren die Drücke in den Behältern  $p_{\text{H}_2} = 284,12 \text{ kPa}$  und  $p_{\text{N}_2} = 135,88 \text{ kPa}$ . Der Gesamtdruck  $p_{\text{ges}}$  nach der Vermischung setzt sich aus den Summen der Partialdrücke zusammen. Die Gesamtmasse  $m_{\text{ges}}$  und die Massenkonzentrationen einer jeden Komponente  $x_i$  lassen sich mit der Molmasse der Komponenten  $(m_{\text{Mol}})_i$  bestimmen.

$$m_i = n_i \cdot (m_{\text{Mol}})_i$$

$$m_1 = m_{\text{H}_2} = n_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1 = 1,15 \text{ mol} \cdot 2,016 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 2,3184 \text{ g}$$

$$m_2 = m_{\text{N}_2} = n_2 \cdot (m_{\text{Mol}})_2 = 0,55 \text{ mol} \cdot 28,014 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 15,4077 \text{ g}$$

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 = 17,7261 \text{ g}$$

Die Summe der Massenkonzentrationen (oder Massenanteile) muss die Zahl 1 ergeben.

$$x_i = \frac{m_i}{m_{\text{ges}}}$$

$$x_1 = \frac{m_1}{m_{\text{ges}}} = \frac{2,3184 \text{ g}}{17,7261 \text{ g}} = 0,1308$$

$$x_2 = \frac{m_2}{m_{\text{ges}}} = \frac{15,4077 \text{ g}}{17,7261 \text{ g}} = 0,8692$$

$$x_1 + x_2 = 0,1308 + 0,8692 = 1 \quad \text{ok}$$

Hinsichtlich der Massenkonzentration kann gesagt werden, dass die Mischung aus 86,92 %  $\text{N}_2$  und 13,08 %  $\text{O}_2$  besteht. Sie können auch sagen, der  $\text{O}_2$ -Anteil an der Mischung beläuft sich auf 13,08 Massenprozent. Zur Berechnung der Gaskonstante der Mischung ist die folgende Formel anzuwenden.

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^I x_i \cdot R_i = x_1 \cdot R_1 + x_2 \cdot R_2 = x_1 \cdot \frac{\mathfrak{R}}{m_{\text{Mol}_1}} + x_2 \cdot \frac{\mathfrak{R}}{m_{\text{Mol}_2}}$$

$$R_{\text{ges}} = 0,1308 \cdot \frac{8,31447 \text{ kJ}}{2,016 \text{ kg} \cdot \text{K}} + 0,8692 \cdot \frac{8,31447 \text{ kJ}}{28,014 \text{ kg} \cdot \text{K}} = 0,79743 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Die Mischtemperatur  $T_{\text{ges}}$  können Sie mit der idealen Gasgleichung ermitteln, denn sie gilt auch bei Mischungen.

$$T_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{ges}} \cdot V}{m_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}}}$$

$$T_{\text{ges}} = \frac{420 \text{ kPa} \cdot 0,01 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{0,0177261 \text{ kg} \cdot 0,79743 \text{ kJ}} = 297,1 \text{ K}$$

### Aufgabe 4.2: Eine Massenkonzentration in Volumenanteile umrechnen

Index  $i = 1$  sei Stickstoff, Index  $i = 2$  Sauerstoff. Der Lösungsweg ist folgender: Gegeben sind die Massenkonzentrationen (Massenanteile)  $m_i$  und die Molmassen  $(m_{\text{Mol}})_i$ . Daraus lassen sich die Stoffkonzentrationen  $n_i = m_i / (m_{\text{Mol}})_i$  bestimmen. Da die  $\text{N}_2$ - und  $\text{O}_2$ -Teilchen



## Lösungen und Lösungswege 21

dieselbe Temperatur in der Luft annehmen und beide Komponenten denselben Gesamtdruck spüren, sind  $T$  und  $p$  konstant. Die Stoffanteile  $y_i$  sind dann die Raumanteile; diese werden durch  $y_i = n_i/n_{\text{ges}}$  berechnet.

$$n_1 = \frac{m_1}{(m_{\text{Mol}})_1} = \frac{0,768}{28,014} \text{ kmol} = 0,0274 \text{ kmol}$$

$$n_2 = \frac{m_2}{(m_{\text{Mol}})_2} = \frac{0,232}{31,9988} \text{ kmol} = 0,0725 \text{ kmol}$$

Denken Sie daran, dass die Summe der Massenanteile die Zahl 1 ergeben muss, das heißt, es sind nicht die Massenprozente, sondern der hundertste Teil davon für  $m_i$  einzusetzen (nicht 76,8, sondern 0,768).

$$n_{\text{ges}} = n_1 + n_2 = 0,034665 \text{ kmol}$$

Die Stoffanteile  $y_i$  sind hier die Raumanteile  $V_i$

$$y_1 = \frac{n_1}{n_{\text{ges}}} = \frac{0,768 \text{ kmol}}{28,014 \cdot 0,034665 \text{ kmol}} = 0,7909$$

$$y_2 = \frac{n_2}{n_{\text{ges}}} = \frac{0,232 \text{ kmol}}{31,9988 \cdot 0,034665 \text{ kmol}} = 0,2091$$

Bei Atmosphärendruck und Raumtemperatur sind die Volumenanteile dieser Luft:  $V_1 = V_{\text{Stickstoff}} = 79,1 \%$ ;  $V_2 = V_{\text{Sauerstoff}} = 20,91 \%$ . Rudimentär ausgedrückt, also 79 % Stickstoff und 21 % Sauerstoff.

Versuchen Sie, aus der Schritt-für-Schritt-Rechnung eine allgemeine Formel dieser Aufgabe herzuleiten. Die Formel ist:

$$y_i = \frac{\frac{m_i}{(m_{\text{Mol}})_i}}{\sum_{i=1}^2 \left[ \frac{m_i}{(m_{\text{Mol}})_i} \right]}$$

Für die Komponenten folgt:

$$y_1 = \frac{\frac{m_1}{(m_{\text{Mol}})_1}}{\frac{m_1}{(m_{\text{Mol}})_1} + \frac{m_2}{(m_{\text{Mol}})_2}} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{\frac{m_2}{(m_{\text{Mol}})_2}}{\frac{m_1}{(m_{\text{Mol}})_1} + \frac{m_2}{(m_{\text{Mol}})_2}}$$

### Aufgabe 4.3: Die Dichte einer $\text{O}_2$ - $\text{N}_2$ -Gasmischung berechnen

Das Stichwort »Ideales Gas« beinhaltet unter anderem, dass die universelle Gaskonstante  $\mathfrak{R}$  automatisch benutzt werden darf, ohne dass sie in der Aufgabenstellung gegeben sein muss. Zum Zweck einer weiteren Übung im Umgang mit Molmassen und Molvolumen kombinieren Sie die folgenden Formeln für das Molvolumen  $V_{\text{Mol}}$ , die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$  und das spezifische Volumen  $v$ .

$$V_{\text{Mol}} = \frac{V}{n}$$

## 22 Lösungen und Lösungswege

$$m_{\text{Mol}} = \frac{m}{n}$$

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Diese drei Gleichungen verknüpfen Dichte, Molvolumen und Molmasse. Die Dichte wird verlangt!

$$V_{\text{Mol}} = v \cdot m_{\text{Mol}} = \frac{1}{\rho} \cdot m_{\text{Mol}}$$

$$\rho = \frac{m_{\text{Mol}}}{V_{\text{Mol}}}$$

Sie können diese Formel benutzen, indem Sie annehmen, dass im Tank  $n = 1$  mol synthetische Luft vorhanden ist. Das hierfür notwendige Volumen ist das Molvolumen  $V_{\text{Mol}}$ .

Betrachten Sie zuerst die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$ . Die Molmasse von  $\text{O}_2$  ist die Molmasse von O multipliziert mit der Zahl 2. Die Molmasse von O kommt aus dem Periodensystem der Elemente. Dort finden Sie in der Hauptgruppe VI das Element O mit der relativen Atommasse 15,9994.

VI	Hauptgruppe
8	Ordnungszahl
O	Symbol
15,9994	relative Atommasse

**Abbildung 1:** Die üblichen Eintragungen für  $\text{O}_2$  in den Periodensystemen der Elemente.

Die Ordnungszahl gibt die Anzahl der positiven Elementarladungen im Atomkern an. In einem neutralen Atom ist die Ordnungszahl außerdem die Anzahl der Elektronen.

Aus der relativen Atommasse 15,9994 für O wird die Molmasse  $m_{\text{Mol}}$  für O, wenn Sie die Einheit kg/kmol oder g/mol dazuschreiben. Folglich gilt:

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{O}} = 15,9994 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{O}_2} = 2 \cdot 15,9994 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 31,9988 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Außerdem berechnen wir die Masse eines  $\text{O}_2$ -Moleküls. Diese Molekülmasse setzt sich aus den Massen von zwei O-Atomen zusammen. Allerdings muss man daran denken, dass diese Zahl 15,9994 die relative Atommasse  $m_{\text{Atom}}/u$  ist. Die atomare Masseneinheit  $u$  beträgt für alle Atome  $1,66054 \times 10^{-27}$  kg. Die Masse eines O-Atoms bezeichnen wir mit  $m_{\text{Atom}} = m_{\text{O}}$ .

$$m_{\text{O}} = 15,9994 \cdot u$$

$$m_{\text{O}} = 15,9994 \cdot 1,66054 \times 10^{-27} \text{ kg} = 2,65676 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Die Masse eines  $\text{O}_2$ -Moleküls beträgt das Doppelte:

$$m_{\text{O}_2} = 5,31353 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

## Lösungen und Lösungswege 23

So viel zum Unterschied zwischen der Masse eines Moleküls und der Molmasse eines Mols an Teilchen.

Zurück zur ursprünglichen Aufgabe. Es muss noch die Molmasse, die auch molare Masse genannt wird, von  $N_2$  bestimmt werden. Jetzt liefert das Periodensystem die Zahl

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{N}} = 14,007 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{N}_2} = 28,014 \text{ kg/kmol}$$

Die synthetische Luft besteht aus 18 Massenprozent  $O_2$  und 82 Massenprozent  $N_2$ . Die Summe ist 100 %. Deshalb ist die gesamte Molmasse  $(m_{\text{Mol}})_{\text{Luft}}$  dieser Mischung aus den Molmassen der Massenanteile zu bestimmen.

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{Luft}} = \frac{18}{100} \cdot (m_{\text{Mol}})_{\text{O}_2} + \frac{82}{100} \cdot (m_{\text{Mol}})_{\text{N}_2} = 28,7313 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Es fehlt noch das Molvolumen. Sauerstoff und Stickstoff sollen als ideales Gas behandelt werden. Das Molvolumen eines beliebigen idealen Gases der Gesamtstoffmenge  $n = 1$  mol ist:

$$V_{\text{Mol}} = \frac{\mathcal{R} \cdot T}{p}$$

$$V_{\text{Mol}} = \frac{8,31447 \text{ J}}{\text{K} \cdot \text{mol}} \cdot (273,15 + 20) \text{ K} \cdot \frac{1}{0,95 \text{ bar}}$$

$$V_{\text{Mol}} = 0,025657 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

Schließlich ist die gesuchte Dichte der synthetischen Luft:

$$\rho = \frac{(m_{\text{Mol}})_{\text{Luft}}}{V_{\text{Mol}}} = \frac{28,7313 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}}{0,025657 \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}} = 1,1198 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

In einem Kubikmeter befinden sich 1,1198 kg synthetische Luft. Denken Sie in der Formel für  $V_{\text{Mol}}$  und  $\rho$  an die Umrechnungen der Einheiten: 1 bar = 100000 J/m<sup>3</sup>, 1 kmol = 1000 mol.

### Aufgabe 4.4: Gaslieferung an ein Zementwerk

Die spezielle Gaskonstante wird mithilfe der Gleichung

$$R_{\text{ges}} = x_{\text{CH}_4} \cdot R_{\text{CH}_4} + x_{\text{CO}_2} \cdot R_{\text{CO}_2}$$

berechnet. Hierzu müssen die Massenkonzentrationen ermittelt werden.

$$x_{\text{CH}_4} = \frac{\dot{m}_{\text{CH}_4}}{\dot{m}_{\text{ges}}}$$

$$x_{\text{CO}_2} = \frac{\dot{m}_{\text{CO}_2}}{\dot{m}_{\text{ges}}}$$



## 24 Lösungen und Lösungswege

Eingesetzt in die Gleichung für  $R_{\text{ges}}$  folgt:

$$R_{\text{ges}} = \frac{\dot{m}_{\text{CH}_4}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot R_{\text{CH}_4} + \frac{\dot{m}_{\text{CO}_2}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot R_{\text{CO}_2}$$

Die speziellen Gaskonstanten werden durch die Gleichung  $R_i = \mathfrak{R}/(m_{\text{Mol}})_i$  ausgedrückt.

$$R_{\text{ges}} = \frac{\dot{m}_{\text{CH}_4}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4}} + \frac{\dot{m}_{\text{CO}_2}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}_2}}$$

Aufgrund der Information, dass sich die Masse mit 91 zu 9 Massenprozenten verteilt, lässt sich schreiben:

$$\dot{m}_{\text{CH}_4} = 0,91 \cdot \dot{m}_{\text{ges}} \quad \text{und} \quad \dot{m}_{\text{CO}_2} = 0,09 \cdot \dot{m}_{\text{ges}}$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{0,91 \cdot \dot{m}_{\text{ges}}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4}} + \frac{0,09 \cdot \dot{m}_{\text{ges}}}{\dot{m}_{\text{ges}}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}_2}}$$

$$R_{\text{ges}} = 0,91 \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4}} + 0,09 \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}_2}}$$

Die universelle Gaskonstante  $\mathfrak{R} = 8,31447 \text{ kJ}/(\text{kmol K})$  ist eine Naturkonstante und darf für jedes beliebige Gas benutzt werden. Demnach kann man  $R_{\text{ges}}$  für die gegebene Mischung berechnen:

$$R_{\text{ges}} = 0,91 \cdot \frac{8,31447 \text{ kJ} \cdot \text{kmol}}{\text{kmol} \cdot \text{K} \cdot 16,043 \text{ kg}} + 0,09 \cdot \frac{8,31447 \text{ kJ} \cdot \text{kmol}}{\text{kmol} \cdot \text{K} \cdot 44,009 \text{ kg}}$$

$$R_{\text{ges}} = 488,62 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Das gelieferte Brenngas besitzt die spezielle Gaskonstante  $R_{\text{ges}} = 488,62 \text{ J}/(\text{kg K})$ . Wir bestimmen jetzt den Massenstrom für das Brenngas  $\text{CH}_4$  in der Mischung. Dazu ist zuerst der Gesamtmassenstrom  $\dot{m}_{\text{ges}}$  mithilfe der idealen Gasgleichung zu ermitteln; davon entfallen 91 % auf das reine Brenngas  $\text{CH}_4$ .

$$\dot{m}_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{ges}} \cdot \dot{V}_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}} \cdot T_{\text{ges}}} = \frac{5 \text{ bar} \cdot 440 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{488,62 \text{ J} \cdot \text{h} \cdot 283,15 \text{ K}} = 1590,14 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

Hier wurde die Umrechnungsbeziehung  $1 \text{ bar} = 100 \text{ kJ}/\text{m}^3$  berücksichtigt. Der gelieferte  $\text{CH}_4$ -Massenstrom beträgt:

$$\dot{m}_{\text{CH}_4} = 0,91 \cdot \dot{m}_{\text{ges}} = 1447,03 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

Mit dieser Massenstromangabe wird mithilfe der idealen Gasgleichung der Volumenstrom in Normzustand  $\dot{V}_{\text{CH}_4}$  bestimmt.

$$\dot{V}_{\text{CH}_4} = \frac{\dot{m}_{\text{CH}_4} \cdot R_{\text{CH}_4} \cdot T_{i,N}}{p_{i,N}}$$



## Lösungen und Lösungswege 25

Die spezielle Gaskonstante für das Methangas ist nicht direkt gegeben; sie muss zunächst berechnen werden:

$$R_{\text{CH}_4} = \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4}} = 518,26 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Der gesuchte Volumenstrom des Methangases im Normzustand ist:

$$(\dot{V}_{\text{CH}_4})_{i.N} = \frac{1447,03 \text{ kg}}{\text{h}} \cdot 518,26 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 273,15 \text{ K} \cdot \frac{1}{1,01325 \text{ bar}} \cdot \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{100\,000 \text{ J}}$$

$$(\dot{V}_{\text{CH}_4})_{i.N} = 2021,66 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

Übrigens, der Volumenstrom des mitgeführten Kohlendioxids im Normzustand beläuft sich auf 72,89 m<sup>3</sup>/h.

### Aufgabe 4.5: Partialdrücke und Mischtemperatur

Gesucht sind  $p_{\text{ges}}$  und  $T_{\text{ges}}$  der Luftmischung unter der Annahme, dass die Luftmoleküle untereinander Wärme nur austauschen, bis jedes Molekül die Mischtemperatur  $T_{\text{ges}}$  besitzt. Es handelt sich hier um einen Mischungsprozess mit drei Gaszuständen. Gaszustand 1 bezieht sich auf Tank 1, Gaszustand 2 auf Tank 2; der dritte Zustand ist der Mischzustand mit dem Index ges.

Die Luftmassen werden jeweils aus der idealen Gasgleichung bestimmt.

$$m_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{11 \text{ bar} \cdot 5 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{287,1 \text{ J} \cdot 295,15 \text{ K}} = 64,906 \text{ kg}$$

$$m_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{R \cdot T_2} = \frac{2 \text{ bar} \cdot 4 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{287,1 \text{ J} \cdot 281,15 \text{ K}} = 9,911 \text{ kg}$$

Gesamtmasse und Gesamtvolumen:

$$m_{\text{ges}} = m_1 + m_2 = 74,817 \text{ kg}$$

$$V_{\text{ges}} = V_1 + V_2 = 9 \text{ m}^3$$

Die Partialdrücke sind die Drücke einer Komponente einer Mischung, wenn sich die betrachtete Komponente alleine im Volumen der Mischung befinden würde. Der dann von dieser Gaskomponente ausgeübte Druck im Gesamtvolumen heißt Partialdruck (oder Teildruck) der betrachteten Komponente. Die Summe aus allen Partialdrücken der Komponenten der Mischung ergibt den Gesamtdruck der Mischung. Dies ist das Gesetz von Dalton. Die ideale Gasgleichung ist hierfür auch zuständig! Die Partialdrücke sind:

$$p_{p_1} = \frac{m_1 \cdot R \cdot T_1}{V_{\text{ges}}} = \frac{64,906 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J} \cdot 295,15 \text{ K}}{9 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} = 6,1111 \text{ bar}$$

$$p_{p_2} = \frac{m_2 \cdot R \cdot T_2}{V_{\text{ges}}} = \frac{9,911 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J} \cdot 281,15 \text{ K}}{9 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} = 0,8889 \text{ bar}$$

Die Summe ergibt den Gesamtdruck der Mischung.

$$p_{\text{ges}} = p_{p_1} + p_{p_2} = 7,00 \text{ bar}$$



## 26 Lösungen und Lösungswege

Zum Schluss dieses Beispiels ist noch die Mischtemperatur  $T_{\text{ges}}$  auszurechnen. Sie können wieder die ideale Gasgleichung zur Berechnung verwenden.

$$T_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}}}{m_{\text{ges}} \cdot R} = \frac{7 \text{ bar} \cdot 9 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{74,817 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J}} = 293,3 \text{ K}$$

Am Ende des Ausgleichsprozesses wird ein Thermometer eine Temperatur der vermischten Luft von 20,1 °C anzeigen.

### Aufgabe 4.6: Brennwert einer Gasmischung

Die Formel für die Dichte einer Mischung finden Sie im Abschnitt »Die Dichte einer Gasmischung«.

$$\rho_{\text{ges}} = r_G \cdot \rho_G + r_L \cdot \rho_L$$

Hierzu werden die Volumenanteile (Raumanteile) der Gaskomponenten  $r_G$  und  $r_L$  benötigt.

$$r_G = \frac{V_G}{V_{\text{ges}}} \quad \text{und} \quad r_L = \frac{V_L}{V_{\text{ges}}}$$

Das Gesamtvolumen im Normzustand der Mischung beträgt:

$$V_{\text{ges}} = V_G + V_L = 2 \text{ m}^3 + 0,4 \text{ m}^3 = 2,4 \text{ m}^3$$

Rückwärts eingesetzt folgt die Dichte der Mischung  $\rho_{\text{ges}}$  im Normzustand.

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{2}{2,4} \cdot 1,191 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + \frac{0,4}{2,4} \cdot 1,2928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1,208 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Die Gasmischung befindet sich in einem Raum mit dem Volumen  $V_{\text{ges}} = 2,4 \text{ m}^3$ , steht unter einem Druck von  $p_{\text{ges}} = 1,01325 \text{ bar}$  und hat eine Temperatur von  $T_{\text{ges}} = 273,15 \text{ K}$ . Neben diesen Daten wird noch die Gesamtmasse  $m_{\text{ges}}$  benötigt, um die individuelle Gaskonstante  $R_{\text{ges}}$  mithilfe der idealen Gasgleichung

$$p_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}} = m_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}} \cdot T_{\text{ges}}$$

bestimmen zu können. Die Gesamtmasse der Mischung setzt sich aus den Einzelmassen der Komponenten zusammen.

$$m_{\text{ges}} = m_G + m_L$$

$$m_{\text{ges}} = \rho_G \cdot V_G + \rho_L \cdot V_L$$

$$m_{\text{ges}} = 1,191 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 2 \text{ m}^3 + 1,2928 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,4 \text{ m}^3 = 2,8991 \text{ kg}$$

Somit kann die spezifische oder individuelle Gaskonstante bestimmt werden.

$$R_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}}}{m_{\text{ges}} \cdot T_{\text{ges}}}$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{1,01325 \text{ bar} \cdot 2,4 \text{ m}^3}{2,8991 \text{ kg} \cdot 273,15 \text{ K}} \cdot \frac{100000 \text{ J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} = 307,08 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$



## Lösungen und Lösungswege 27

In dieser Aufgabe spielt der Brennwert eines brennbaren Gases eine Rolle. Der Brennwert eines genau definierten festen, flüssigen oder gasförmigen Brennstoffs gibt die Reaktionsenergie pro Kubikmeter oder Kilogramm des Brennstoffs bei einer stöchiometrischen Verbrennung (mit genau berechneter Luftmenge) an. Brennstoffe, die nur aus Kohlenwasserstoffen und/oder Schwefel bestehen, haben einen Brennwert; Luft hat keinen!

Der Brennwert des hier vorgegebenen Brenngases beträgt  $4200 \text{ kJ/m}^3$ . In einem Volumen von  $2 \text{ m}^3$  sind also  $8400 \text{ kJ}$  Energie gespeichert. Nach der Mischung ist die Luft mit dem Brennstoff homogen vermischt; die Mischung ist in einem Volumen von  $2,4 \text{ m}^3$  gespeichert. Der Energieanteil der Mischung hat sich nicht geändert, da die Luft keinen Brennwert besitzt, also keinen Energiebetrag bei einer möglichen chemischen Verbrennungsreaktion liefern kann. Also ist im Volumen von  $2,4 \text{ m}^3$  ein Energiebetrag von  $8400 \text{ kJ}$  gespeichert. Da sich der gegebene Brennwert auf  $1 \text{ m}^3$  bezieht, können Sie mithilfe der Dreisatzrechnung den neuen Brennwert pro Kubikmeter Mischung berechnen.

In  $2,4 \text{ m}^3$  Volumen sind  $8400 \text{ kJ}$  Energie als Brennwert gespeichert. In  $1 \text{ m}^3$  Volumen sind dann  $8400 \text{ kJ}/2,4 = 3500 \text{ kJ}$  Energie als Brennwert vorhanden. Der neue Brennwert der Mischung pro Kubikmeter Volumen beträgt daher  $3500 \text{ kJ}$ .

Alternativrechnung: In  $1 \text{ m}^3$  Volumen befinden sich  $4200 \text{ kJ}$  Energie als Brennwert. Pro Kubikmeter Brenngas wird  $0,2 \text{ m}^3$  Luft zugeführt, sodass sich in  $1,2 \text{ m}^3$  der Mischung auch nur  $4200 \text{ kJ}$  befinden. Wie viel Energie ist dann in einem Kubikmeter der Mischung vorhanden? In  $1 \text{ m}^3$  Volumen der Mischung befinden sich  $4200 \text{ kJ}/1,2 = 3500 \text{ kJ}$ .

### Aufgabe 4.7: Mischung aus gegebenen Volumenkonzentrationen

Die Mischung besteht aus den Komponenten  $i = 1$  (CO) und  $i = 2$  ( $\text{CH}_4$ ). Gesucht wird die spezielle Gaskonstante.

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^2 x_i \cdot R_i$$

Die Massenkonzentrationen  $x_i$  sind nicht gegeben, lassen sich jedoch aus den Volumenanteilen  $y_i$  ermitteln.

$$y_i = \frac{V_i}{V_{\text{ges}}}$$

Die gegebenen Volumenanteile  $V_i$  können auf jedes beliebige Volumen  $V_{\text{ges}}$  bezogen werden, deshalb kann ein Gesamtvolumen gewählt werden. Gewählt wird  $V_{\text{ges}} = 1 \text{ m}^3$ . Das CO-Volumen  $V_1$  beträgt dann  $15\%$  von  $V_{\text{ges}}$ . Entsprechend ist das  $\text{CH}_4$ -Volumen  $V_2$   $85\%$  von  $1 \text{ m}^3$ .

$$V_1 = 0,15 \text{ m}^3 \quad \text{und} \quad V_2 = 0,85 \text{ m}^3$$

$$y_1 = \frac{0,15}{1} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{0,85}{1}$$



## 28 Lösungen und Lösungswege

Die dimensionslosen Massenkonzentrationen  $x_i$  erhalten Sie mithilfe der Molmassen aus dem Periodensystem der Elemente; es gilt  $(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}} = 28,01 \text{ kg/kmol}$ ,  $(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4} = 16,034 \text{ kg/kmol}$ . Mit der folgenden Formel werden die Massenanteile der Komponenten ermittelt.

$$x_1 = \frac{y_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1}{y_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1 + y_2 \cdot (m_{\text{Mol}})_2}$$

$$x_1 = \frac{y_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1}{y_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1 + y_2 \cdot (m_{\text{Mol}})_2} = \frac{0,15 \cdot 28,01 \text{ kg} \cdot \text{kmol}}{(0,15 \cdot 28,01 + 0,85 \cdot 16,034) \text{ kg} \cdot \text{kmol}}$$

$$x_1 = 0,2356$$

$$x_2 = \frac{y_2 \cdot (m_{\text{Mol}})_2}{y_1 \cdot (m_{\text{Mol}})_1 + y_2 \cdot (m_{\text{Mol}})_2} = \frac{0,85 \cdot 16,034 \text{ kg} \cdot \text{kmol}}{(0,15 \cdot 28,01 + 0,85 \cdot 16,034) \text{ kg} \cdot \text{kmol}}$$

$$x_2 = 0,7644$$

Die Summe aus den Massenteilen muss die Zahl 1 ergeben, was hier der Fall ist. Jetzt sind alle Vorbereitungen zur Berechnung der Gaskonstante der Mischung  $R_{\text{ges}}$  abgeschlossen. Die spezielle Gaskonstante der Mischung wird mit der eingangs angegebenen Formel bestimmt.

$$R_{\text{ges}} = x_1 \cdot R_1 + x_2 \cdot R_2$$

$$R_{\text{ges}} = 0,2356 \cdot 296,8 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + 0,7644 \cdot 518,2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 466,04 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

### Aufgabe 4.8: Mittlere Molmasse einer Gasmischung

Die Dichte der Mischung im Normzustand wird durch die Gleichung

$$\rho_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^5 r_i \cdot \rho_i$$

berechnet. Dabei werden die Raumanteile durch  $r_i = V_i / V_{\text{ges}}$  ausgedrückt.

$$V_{\text{ges}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 = (0,42 + 0,14 + 0,375 + 0,035 + 0,03) \text{ m}^3 = 1 \text{ m}^3$$

Die Dichte der Mischung  $\rho_{\text{ges}}$  besitzt die Einheit  $\text{kg/m}^3$ . Alle Daten gelten für den Normzustand.

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{V_1}{V_{\text{ges}}} \cdot \rho_1 + \frac{V_2}{V_{\text{ges}}} \cdot \rho_2 + \frac{V_3}{V_{\text{ges}}} \cdot \rho_3 + \frac{V_4}{V_{\text{ges}}} \cdot \rho_4 + \frac{V_5}{V_{\text{ges}}} \cdot \rho_5$$

$$\rho_{\text{ges}} = \frac{0,42}{1} \cdot 0,09 + \frac{0,14}{1} \cdot 28,01 + \frac{0,375}{1} \cdot 0,717 + \frac{0,035}{1} \cdot 1,26 + \frac{0,03}{1} \cdot 1,977$$

Die Einheit der Dichte  $\rho_{\text{ges}}$  ist  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

$$\rho_{\text{ges}} = 4,3315 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



## Lösungen und Lösungswege 29

Aus den gegebenen Volumenkonzentrationen und den Dichten lassen sich die Massenkonzentrationen der Komponenten berechnen.

$$m_i = \rho_i \cdot V_i$$

Gleichwohl lässt sich auch die Gesamtmasse  $m_{\text{ges}}$  im Volumen  $V_{\text{ges}}$  bestimmen. Sie benötigen die Massenanteile zur Berechnung der speziellen Gaskonstante.

$$m_{\text{ges}} = \rho_1 \cdot V_1 + \rho_2 \cdot V_2 + \rho_3 \cdot V_3 + \rho_4 \cdot V_4 + \rho_5 \cdot V_5$$

$$m_{\text{ges}} = (0,09 \cdot 0,42 + 28,01 \cdot 0,14 + 0,717 \cdot 0,375 + 1,26 \cdot 0,035 + 1,977 \cdot 0,03) \text{ kg}$$

$$m_{\text{ges}} = \left( \underbrace{0,0378}_{m_1} + \underbrace{3,9214}_{m_2} + 0,26875 + 0,0441 + \underbrace{0,05931}_{m_5} \right) \text{ kg} = 4,3315 \text{ kg}$$

Die Analyse der Einheiten ergibt für die Gesamtmasse die Dimension kg. Der Wert ist zahlenmäßig derselbe wie bei der Dichte der Mischung, denn es gilt auch die Gleichung  $m_{\text{ges}} = \rho_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}}$ . Wenn  $V_{\text{ges}} = 1$  ist, sind die Zahlenwerte von  $\rho_{\text{ges}}$  und  $m_{\text{ges}}$  gleich. Nur die Einheiten sind unterschiedlich! Betrachten Sie jetzt die spezielle Gaskonstante  $R_{\text{ges}}$ .

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot R_i$$

Anstelle der speziellen Gaskonstanten sind in diesem Beispiel die Molmassen der Komponenten gegeben. Zusammen mit der universellen Gaskonstante

$$\mathfrak{R} = 8314,47 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}$$

ergeben sich die spezifischen Gaskonstanten  $R_i = \mathfrak{R}/(m_{\text{Mol}})_i$ .

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_i}$$

Es folgt weiter mit  $x_i = m_i / m_{\text{ges}}$ :

$$R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^5 \frac{m_i}{m_{\text{ges}}} \cdot \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_i}$$

Die Größen  $m_{\text{ges}}$  und  $\mathfrak{R}$  können vor das Summenzeichen gesetzt werden.

$$R_{\text{ges}} = \frac{\mathfrak{R}}{m_{\text{ges}}} \sum_{i=1}^5 \frac{m_i}{(m_{\text{Mol}})_i}$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{8314,47 \text{ J} \cdot \text{kg} \cdot \text{kmol}}{4,3315 \text{ kg} \cdot \text{kmol} \cdot \text{K} \cdot \text{kg}} \cdot \left[ \frac{0,0378}{2,016} + \frac{3,9214}{1,25} + \frac{0,26875}{16,042} + \frac{0,0441}{28,052} + \frac{0,05931}{44,01} \right]$$

$$R_{\text{ges}} = 6095,568 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Der gerundete Wert der speziellen Gaskonstante der Mischung ist  $6,0956 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ . Die Molmasse der Mischung beträgt:  $m_{\text{Mol}} = \mathfrak{R}/R_{\text{ges}} = 1,364 \text{ kg}/\text{kmol}$ .



## 30 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 4.9: Eine Gasmischung für Schutzgasschweißungen

Für die Mischung und für jede einzelne Komponente gilt die ideale Gasgleichung. Aus Tabellen erhalten Sie die Molmassen  $(m_{\text{Mol}})_{\text{Ar}} = 39,948 \text{ kg/kmol}$  und  $(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}_2} = 44,01 \text{ kg/kmol}$ . Zusammen mit der universellen Gaskonstanten  $\mathfrak{R} = 8,31447 \text{ Pa m}^3/(\text{mol K})$  ergeben sich die spezifischen Gaskonstanten der Komponenten.

$$R_{\text{Ar}} = \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{Ar}}} = 208,13 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}} = 2,0813 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

$$R_{\text{CO}_2} = \frac{\mathfrak{R}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CO}_2}} = 188,92 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}} = 1,8892 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

Aus den gewonnenen Daten lassen sich die Massen der Komponenten bestimmen.

$$m_{\text{Ar}} = \frac{p_{\text{Ar}} \cdot V_{\text{Ar}}}{R_{\text{Ar}} \cdot T_{\text{Ar}}} = \frac{40 \text{ bar} \cdot 1000 \text{ dm}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}}{2,0813 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 18) \text{ K}} = 66,009 \text{ kg}$$

$$m_{\text{CO}_2} = \frac{p_{\text{CO}_2} \cdot V_{\text{CO}_2}}{R_{\text{CO}_2} \cdot T_{\text{CO}_2}} = \frac{25 \text{ bar} \cdot 120 \text{ dm}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}}{1,8892 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 22) \text{ K}} = 5,380 \text{ kg}$$

Somit ist die Gesamtmasse der Mischung  $m_{\text{ges}} = 71,389 \text{ kg}$ .

$$x_{\text{Ar}} = \frac{m_{\text{Ar}}}{m_{\text{ges}}} = \frac{66,009 \text{ kg}}{71,389 \text{ kg}} = 0,9246$$

$$x_{\text{CO}_2} = \frac{m_{\text{CO}_2}}{m_{\text{ges}}} = \frac{5,380 \text{ kg}}{71,389 \text{ kg}} = 0,0754$$

Die Summe  $x_{\text{Ar}} + x_{\text{CO}_2} = 1$  dient als Kontrolle. Sie haben jetzt alle Daten zusammengetragen, die für die Berechnung der spezifischen Gaskonstante der Mischung benötigt werden.

$$R_{\text{ges}} = x_{\text{Ar}} \cdot R_{\text{Ar}} + x_{\text{CO}_2} \cdot R_{\text{CO}_2}$$

$$R_{\text{ges}} = 0,9246 \cdot 208,13 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}} + 0,0754 \cdot 188,92 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

$$R_{\text{ges}} = 206,68 \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}} = 2,0668 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^3}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

Der Gesamtdruck  $p_{\text{ges}}$  der Mischung berechnet sich wie folgt:

$$p_{\text{ges}} = p_{\text{Ar}} + p_{\text{CO}_2}$$

$$p_{\text{Ar}} = \frac{m_{\text{Ar}} \cdot R_{\text{Ar}} \cdot T_{\text{Ar}}}{V_{\text{ges}}}$$

$$p_{\text{Ar}} = \frac{66,009 \text{ kg} \cdot 2,0813 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 18) \text{ K}}{200 \text{ dm}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}} = 199,997 \text{ bar}$$

$$p_{\text{CO}_2} = \frac{m_{\text{CO}_2} \cdot R_{\text{CO}_2} \cdot T_{\text{CO}_2}}{V_{\text{ges}}}$$



## Lösungen und Lösungswege 31

$$p_{\text{CO}_2} = \frac{5,380 \text{ kg} \cdot 1,8892 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 22) \text{ K}}{200 \text{ dm}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{kg}} = 14,999 \text{ bar}$$

$$p_{\text{ges}} = 199,997 \text{ bar} + 14,999 \text{ bar} = 214,996 \text{ bar}$$

Dieser Gesamtdruck entspricht gerundet 215 bar. Die Temperatur der Mischung  $T_{\text{ges}}$  wird auch mit der idealen Gasgleichung bestimmt.

$$T_{\text{ges}} = \frac{p_{\text{ges}} \cdot V_{\text{ges}}}{m_{\text{ges}} \cdot R_{\text{ges}}}$$

$$T_{\text{ges}} = \frac{214,996 \text{ bar} \cdot 200 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{71,389 \text{ kg} \cdot 2,0668 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3} = 291,43 \text{ K}$$

Wir suchen die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen  $(C_v)_{\text{ges}}$  der Mischung. Weil es meistens Tabellen für die Wärmekapazität bei konstantem Druck  $C_p$  gibt, kann die Gleichung

$$(C_p)_{\text{ges}} - (C_v)_{\text{ges}} = \mathfrak{R}$$

genutzt werden. Die Anlage zur Herstellung von Schutzgas ist ein geschlossenes System ohne Verbindungen zur Umgebung; deshalb ist die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen für Energiebetrachtungen maßgebend.

$$(C_p)_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^I y_i \cdot (C_p)_i$$

Mit  $i = 1 \triangleq \text{Ar}$  und  $i = 2 \triangleq \text{CO}_2$  folgt:

$$(C_p)_{\text{ges}} = y_{\text{Ar}} \cdot (C_p)_{\text{Ar}} + y_{\text{CO}_2} \cdot (C_p)_{\text{CO}_2}$$

Die Bestimmung der Stoffmengen  $n_{\text{Ar}}$  und  $n_{\text{CO}_2}$  erfolgt aus der idealen Gasgleichung für jede Komponente der Mischung.

$$p_i \cdot V_i = n_i \cdot \mathfrak{R} \cdot T_i$$

$i = 1$ : Argon

$$n_{\text{Ar}} = \frac{p_{\text{Ar}} \cdot V_{\text{Ar}}}{\mathfrak{R} \cdot T_{\text{Ar}}} = \frac{40 \text{ bar} \cdot 1000 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}}{0,0831447 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 18) \text{ K}} = 1652,375 \text{ mol}$$

$i = 2$ : Kohlendioxid

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{p_{\text{CO}_2} \cdot V_{\text{CO}_2}}{\mathfrak{R} \cdot T_{\text{CO}_2}} = \frac{25 \text{ bar} \cdot 120 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol} \cdot \text{K}}{0,0831447 \text{ bar} \cdot \text{dm}^3 \cdot (273,15 + 22) \text{ K}} = 122,249 \text{ mol}$$

Stoffkonzentrationen:

$$y_1 = y_{\text{Ar}} = \frac{n_{\text{Ar}}}{n_{\text{Ar}} + n_{\text{CO}_2}} = \frac{1652,375}{1652,375 + 122,249} = 0,9311$$

$$y_2 = y_{\text{CO}_2} = \frac{n_{\text{CO}_2}}{n_{\text{Ar}} + n_{\text{CO}_2}} = \frac{122,249}{1652,375 + 122,249} = 0,0689$$



## 32 Lösungen und Lösungswege

Die Summe muss die Zahl 1 ergeben. Sie können jetzt die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck der Mischung und die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen bestimmen.

$$(C_p)_{\text{ges}} = (0,9311 \cdot 20,786 + 0,0689 \cdot 37,11) \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 21,910 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$(C_v)_{\text{ges}} = (C_p)_{\text{ges}} - \mathfrak{R}$$

$$(C_v)_{\text{ges}} = 21,910 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} - 8,31447 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 13,596 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Wenn Sie mögen, können Sie auch die Mischtemperatur mit der folgenden Gleichung

$$T_{\text{ges}} = \frac{n_1 \cdot (C_v)_1 \cdot T_1 + n_2 \cdot (C_v)_2 \cdot T_2}{n_1 \cdot (C_v)_1 + n_2 \cdot (C_v)_2}$$

überprüfen. Die Temperatur der Mischung ist nach dieser Formel 291,61 K (18,46 °C). Die kleine Differenz aus den beiden Rechnungen wurde durch Rundungen der Zwischenergebnisse verursacht.

### Aufgabe 4.10: Kaltes und heißes Wasser mischen

Die Formel für die Mischungstemperatur ist hier notwendig. Sie können diese Formel für zwei Stoffmengen anwenden und die Mischungstemperatur  $T_{\text{ges}}$  oder  $\vartheta_{\text{ges}}$  mit den Anfangstemperaturen der Wassermengen dort einsetzen. Die Formel gilt auch für Temperaturen  $\vartheta$  in der Einheit °C. Gleichzeitig ist die Massenbilanz  $130 \text{ kg} = m_{\text{kalt}} + m_{\text{heiß}}$  zu beachten. Normalerweise wird eine solche Mischungsaufgabe mithilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik bearbeitet, da aber dieses Thema erst weiter unten in diesem Buch behandelt wird, ist der Weg über die Mischungstemperaturformel hier angebracht. Selbstverständlich können Sie später diese Lösung mit dem 1. Hauptsatz leicht nachvollziehen. Die Formel für die Mischungstemperatur für diese Aufgabe lautet:

$$\vartheta_{\text{ges}} = \frac{m_1 \cdot (c_p)_1 \cdot \vartheta_1 + m_2 \cdot (c_p)_2 \cdot \vartheta_2}{m_1 \cdot (c_p)_1 + m_2 \cdot (c_p)_2}$$

Weisen Sie zum Beispiel den Index 1 dem kalten und den Index 2 dem heißen Wasser zu. Alle Wassermassen haben die Einheit kg, die Temperaturen sind in °C angegeben, und die Einheit der Wärmekapazität kann gekürzt werden.

$$40 \text{ °C} = \frac{m_1 \cdot 4,19 \cdot 10 \text{ °C} + m_2 \cdot 4,19 \cdot 60 \text{ °C}}{(m_1 \cdot 4,19 + m_2 \cdot 4,19)}$$

Für die Gesamtmasse  $m_{\text{ges}} = 130 \text{ kg}$  gilt:

$$m_2 = m_{\text{ges}} - m_1 = 130 - m_1$$

Fügen Sie  $m_2$  in die Gleichung für die Mischungstemperatur ein, und dann lösen Sie die entstehende Gleichung nach  $m_1$  auf. Die Einheit der Masse ist kg.

$$40 = \frac{m_1 \cdot 4,19 \cdot 10 + (130 - m_1) \cdot 4,19 \cdot 60}{[m_1 \cdot 4,19 + (130 - m_1) \cdot 4,19]} = \frac{m_1 \cdot 10 + (130 - m_1) \cdot 60}{[m_1 + (130 - m_1)]}$$

$$m_1 = 52 \text{ kg}$$





## Lösungen und Lösungswege 33

Es werden  $m_1 = 52$  Liter kaltes Wasser gebraucht. Aus  $m_1 + m_2 = 130$  kg folgt dann die Masse des heißen Wassers  $m_2 = 78$  Liter.

### Aufgabe 4.11: Mittlere Molmasse einer Mischung

In einem Mol dieser besonderen Mischung (Luft) sind 78,5 %  $N_2$ , 21 %  $O_2$  und nur 0,5 % Argon. Das bedeutet, es gilt:

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{ges}} = 0,785 \cdot (m_{\text{Mol}})_{N_2} + 0,21 \cdot (m_{\text{Mol}})_{O_2} + 0,005 \cdot (m_{\text{Mol}})_{Ar}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{ges}} = (0,785 \cdot 28,014 + 0,21 \cdot 31,998 + 0,005 \cdot 39,948) \text{ kg/kmol}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{ges}} = 28,910 \text{ kg/kmol}$$

### Aufgabe 4.12: Dichte und Gesamtmasse einer Mischung

Man kann das Gesamtvolumen  $V_{\text{ges}}$  beliebig wählen. Zum Beispiel  $V_{\text{ges}} = 1 \text{ m}^3$ . Die Volumenanteile sind dann:  $V_1 = 0,92 \text{ m}^3$ ,  $V_2 = 0,06 \text{ m}^3$ ,  $V_3 = 0,02 \text{ m}^3$ . Die Massenanteile werden mit  $m_i = \rho_i \cdot V_i$  berechnet:  $m_1 = 1,31458 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,10704 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,039536 \text{ kg}$ . Die Summe ergibt die Gesamtmasse:  $m_{\text{ges}} = 1,46116 \text{ kg}$ .

Mit dem Massenanteilen und den gegebenen Molmassen erhalten Sie die Stoffmengen  $n_i = m_i / (m_{\text{Mol}})_i$ :  $n_1 = 0,041083 \text{ kmol}$ ,  $n_2 = 0,0026795 \text{ kmol}$ ,  $n_3 = 0,0008984 \text{ kmol}$ . Die Summe ergibt die gesamte Stoffmenge:  $n_{\text{ges}} = 0,044661 \text{ kmol}$ . Jetzt können Sie eine prozentuale Aufteilung der einzelnen Stoffmengen  $n_i$  bezogen auf die Gesamtstoffmenge vornehmen:  $\text{Mol}\%_i = n_i / n_{\text{ges}}$ .

$$(\text{Mol}\%)_1 = 0,91989, (\text{Mol}\%)_2 = 0,05999, (\text{Mol}\%)_3 = 0,02012$$

Die Molmasse und die Dichte der Mischung betragen:

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^3 \frac{V_i}{V_{\text{ges}}} \cdot (m_{\text{Mol}})_i = 32,7152 \text{ kg/kmol}$$

$$\rho_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i \cdot V_i}{V_{\text{ges}}} = 1,46116 \text{ kg/m}^3$$

### Aufgabe 4.13: Die Wärmekapazität in einem Experiment bestimmen

Die Aufgabe wird mithilfe der Mischtemperatur gelöst. Index 1 bezieht sich auf das Öl, 2 auf Kupfer.

$$T_{\text{ges}} = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$

Gesucht ist  $c_1 = c_{\text{Öl}} = 1,974 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ .





## 34 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 5.1: Kompressionsmodul und örtlicher Gasdruck

Das Hooke'sche Gesetz bestimmt die gesuchte Größe  $E_c$ .

$$E_c = -V_0 \cdot \frac{dp}{dV}$$

Das absolute Volumen  $V$  wird durch  $V = m \cdot v$  ersetzt. Die Ableitung davon ist  $dV = m \cdot dv$ . Damit ist es möglich, mit  $V_0 = m \cdot v_0$ , das spezifische Volumen  $v$  einzuführen, denn es muss ein Bezug zur Isentropengleichung, in der auch  $v$  vorkommt, hergestellt werden.

$$E_c = -m \cdot v_0 \cdot \frac{dp}{m \cdot dv} = -v_0 \cdot \frac{dp}{dv}$$

Die Gleichung verlangt nach den Änderungen  $dp$  und  $dv$ , die jetzt aus der Isentropengleichung kommen müssen. Kappa  $\kappa$  selbst ist konstant.

$$d(p \cdot v^\kappa) = d(\text{konstant})$$

$$d(p \cdot v^\kappa) = 0$$

$$p \cdot d(v^\kappa) + v^\kappa \cdot dp = 0$$

$$p \cdot \kappa \cdot v^{\kappa-1} \cdot dv + v^\kappa \cdot dp = 0$$

Gesucht wird  $dv$ .

$$dv + \frac{v^\kappa}{p \cdot \kappa \cdot v^{\kappa-1}} \cdot dp = 0$$

$$dv = \frac{-v^\kappa \cdot v^{-(\kappa-1)}}{p \cdot \kappa} \cdot dp$$

$$dv = \frac{-v}{p \cdot \kappa} \cdot dp$$

Eingesetzt in den Ausdruck für  $E_c$  folgt:

$$E_c = -v_0 \cdot \frac{p \cdot \kappa \cdot dp}{-v \cdot dp} = \frac{v_0}{v} \cdot p \cdot \kappa$$

Im Anfangszustand ist das spezifische Volumen der Luft  $v = v_0$  und  $E_c$  wird einfach

$$E_c = \kappa \cdot p$$

für den isentropen Verdichtungsprozess. Mit  $p = 1,01325$  bar und  $\kappa = 1,4$  ergibt sich  $E_c = 1,41855$  bar oder  $E_c = 141855$  N/m<sup>2</sup>.

### Aufgabe 5.2: Dichteänderung der Luft in einer isothermen Atmosphäre

Zuerst wird die relative Änderung der Dichte  $d\rho/\rho$  berechnet.



Die relative Änderung einer Größe  $X$  ist das Differenzial der Größe  $dX$  (Änderung der Größe), bezogen auf die Größe  $X$ . Die relative Änderung entspricht also  $dX/X$ .



## Lösungen und Lösungswege 35

Das Stichwort »ideales Gas« zeigt an, dass die ideale Gasgleichung verwendet werden darf. Natürlich wählen Sie hier die Form, in der die Dichte vorkommt.

$$p = \rho \cdot R \cdot T$$

Die spezielle (oder individuelle) Gaskonstante  $R$  und die Temperatur  $T$  sind konstant. Gesucht wird  $d\rho$ .

$$dp = d\rho \cdot R \cdot T \quad \text{oder} \quad d\rho = \frac{dp}{R \cdot T}$$

Diese Gleichung wird durch  $\rho = p/(R \cdot T)$  geteilt.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{R \cdot T} \cdot \frac{(R \cdot T)}{p}$$

Somit steht fest, dass sich die relative Änderung der Dichte in einem idealen Gas mit konstanter Temperatur auf die relative Änderung des Drucks reduziert.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p}$$

Mit den Daten  $dp = 6200 \text{ Pa}$  und  $p = 92000 \text{ Pa}$  folgt der Betrag der relativen Dichteänderung in Prozent.

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{6200 \text{ Pa}}{92000 \text{ Pa}} = 0,06739$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = |6,74| \%$$

Warum sind plötzlich Betragsstriche  $|6,74|$  vorhanden? Es kommt auf die Betrachtung an! Am Gipfel beträgt der Atmosphärendruck  $92000 \text{ Pa}$ . Die Druckdifferenz, infolge der Höhenänderung um  $530 \text{ m}$ , ist  $6200 \text{ Pa}$ . Sie wissen, dass am Boden der Atmosphärendruck größer ist als in der Höhe. Also ist er am Fuße des Berges  $92000 \text{ Pa} + 6200 \text{ Pa} = 98200 \text{ Pa}$ . Die ideale Gasgleichung  $p = \rho \cdot R \cdot T$  sagt aus, dass mit konstantem  $R$  und konstanter Temperatur die Dichte der Luft abnimmt, wenn der Druck abnimmt, und umgekehrt.

Nehmen Sie zum Beispiel Ihren Betrachtungsstandort am Fuße des Berges ein und wollen die Dichte am Gipfel abschätzen, so ist die relative Dichteänderung negativ.

$$\frac{d\rho}{\rho} = -6,74 \%$$

Die Änderung der Dichte am Gipfel ist um  $6,74 \%$  kleiner gegenüber der Dichte  $\rho$  am Fuße des Berges ( $d\rho = -6,74 \% \cdot \rho$ ).

Stehen Sie am Gipfel und haben dort Ihren Bezugsstandort und möchten die Dichte am Fuße des Berges wissen, so ist die relative Dichteänderung positiv, denn der Druck nimmt mit der Tiefe zu und damit auch die Dichte.

$$\frac{d\rho}{\rho} = +6,74 \%$$



## 36 Lösungen und Lösungswege

Das bedeutet, dass die Dichteänderung vom Gipfel in Richtung zum Fuß des Berges etwa um  $d\rho \approx +6,74\% \cdot \rho$  anwächst, verglichen mit der Dichte  $\rho$  auf dem Gipfel. Die Basisgröße  $\rho$  ist die Dichte am Beobachterstandort.

Die zweite Frage beschäftigt sich mit dem Kompressionsmodul  $E_c$  der Luft in einer isothermen Atmosphäre am Fuße des Berges. Das Hooke'sche Gesetz der Gase lautet:

$$E_c = -V_0 \cdot \frac{dp}{dV}$$

Am Fuße des Berges betrachten wir ein Luftvolumen  $V$  von der Größe des Anfangsvolumens  $V_0$ . Mit  $V_0 = V$  und der Erweiterung mit  $p/p = 1$  folgt:

$$E_c = -V \cdot \frac{p}{p} \cdot \frac{dp}{dV}$$

$$E_c = -\frac{V}{dV} \cdot p \cdot \frac{dp}{p}$$

Die ideale Gasgleichung in der Form  $p \cdot V = m \cdot R \cdot T$  liefert mit  $m \cdot R \cdot T = \text{konstant}$  die Änderungen der verbleibenden Variablen.

$$d(p \cdot V) = d(\text{konstant})$$

$$dp \cdot V + p \cdot dV = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{V}{dV} = -\frac{p}{dp}$$

$E_c$  vereinfacht sich erheblich.

$$E_c = -\left(\frac{-p}{dp}\right) \cdot p \cdot \frac{dp}{p} = p$$

$E_c$  wird durch den Druck am Fuße des Berges bestimmt.  $E_c = p = 98200 \text{ N/m}^2$ . Fazit: Die Elastizität  $E_c$  eines idealen Gases bei isothermen Vorgängen ist der Druck des Gases selbst.

## Aufgabe 5.3: Kompressionsmodul einer Ölmenge bestimmen

Nach dem Hooke'schen Gesetz der Fluide wird der Kompressionsmodul  $E_c$  durch eine Druckänderung  $dp$  und eine Volumenänderung  $dV$  des Anfangsvolumen  $V_0$  bestimmt.

$$E_c = -V_0 \cdot \frac{dp}{dV}$$

Alle Daten sind bekannt, deshalb werden die Differenziale  $dp$  und  $dV$  in guter Näherung durch endliche Differenzen  $\Delta p = (45 - 1) \text{ bar}$  und  $\Delta V = -38,6 \text{ cm}^3$  ersetzt. Das Minuszeichen steht für die Verkleinerung des Volumens.

$$E_c \cong -V_0 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta V} = -16 \text{ dm}^3 \cdot \frac{44 \text{ bar}}{-38,6 \text{ cm}^3} \cdot 10^3 \frac{\text{cm}^3}{\text{dm}^3} = 18238,34 \text{ bar}$$

$$E_c \cong 1,824 \text{ GPa} = 1,824 \text{ GN/m}^2$$



## Aufgabe 5.4: Dichteänderung versus Kompressionsmodul

Das Hooke'sche Gesetz muss so umgeschrieben werden, dass dort die Dichte  $\rho$  und die Dichteänderung  $d\rho$  erscheinen. Dies gelingt mit der Formel für die Masse  $m = \rho \cdot V$  und deren partiellen Ableitungen. Die Masse  $m$  ist konstant; somit ist  $dm$  gleich null.

$$dm = d(\rho \cdot V)$$

$$0 = d\rho \cdot V + \rho \cdot dV \quad \text{oder} \quad dV = -\frac{d\rho}{\rho} \cdot V$$

Zusammen mit dem Hooke'schen Gesetz erhalten Sie:

$$E_c = -V_0 \cdot \frac{dp}{dV} = -\frac{V_0}{V} \cdot \frac{d\rho \cdot \rho}{-d\rho}$$

Wenn die Masse konstant ist, gilt für den Anfangszustand und für den Endzustand die Beziehung:

$$m = \rho_0 \cdot V_0 = \rho \cdot V \quad \text{oder} \quad \rho = \rho_0 \cdot \frac{V_0}{V}$$

Eingesetzt in das Hooke'sche Gesetz der Fluide folgt mit  $V = V_0 - |\Delta V|$ :

$$E_c = \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{dp}{d\rho} = \left(\frac{V_0}{V_0 - |\Delta V|}\right)^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{dp}{d\rho}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Formel für die Dichteänderung:

$$d\rho = \left(\frac{V_0}{V_0 - |\Delta V|}\right)^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{dp}{E_c}$$

Mit den gegebenen Daten und  $E_c = 18238,34$  bar ergibt sich die Dichteänderung:

$$\Delta\rho = \left(\frac{V_0}{V_0 - |\Delta V|}\right)^2 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\Delta p}{E_c} = \left(\frac{0,016}{0,016 - 3,86 \times 10^{-5}}\right)^2 \cdot 820 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{44 \text{ bar}}{18238,34 \text{ bar}}$$

$$\Delta\rho = 1,988 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

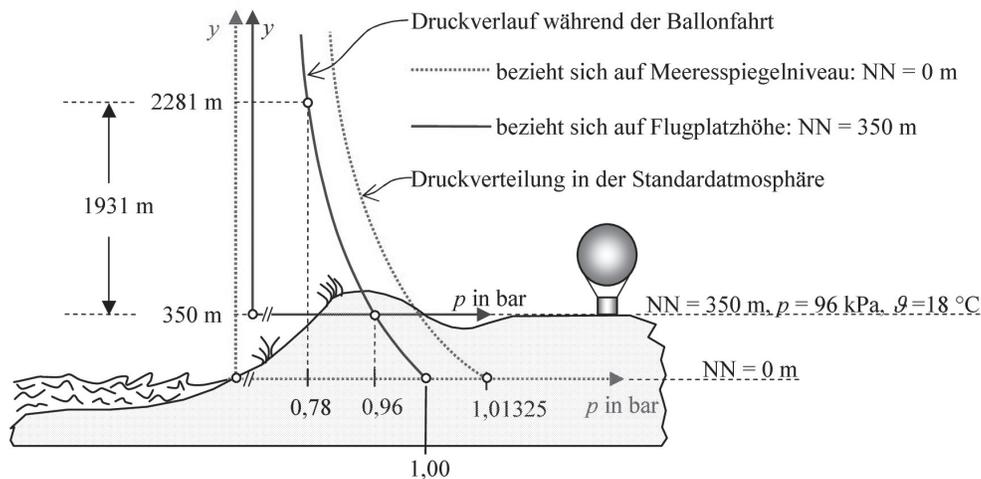
Die positive Dichteänderung zeigt an, dass bei der Kompression die Dichte um  $1,988 \text{ kg/m}^3$  zugenommen hat.

## Aufgabe 6.1: Wie hoch steigt ein Ballon?

In den Gleichungen zur Standardatmosphäre beziehen sich alle Größen mit dem Index o auf das Nullniveau  $NN = 0$  oder  $y = 0$  m, was dem Meeresspiegelniveau entspricht. Im Koordinatensystem des Ballonfahrers ist seine praktische Grundlinie  $y = 350$  m. Dort zeigt sein geeichtes Barometer vor dem Start den Druck  $p = 96$  kPa und eine Lufttemperatur von  $18$  °C an. Der vom Ballonfahrer gewählte Tag hat eigene meteorologische Grunddaten, die nicht mit den Daten der Standardatmosphäre zusammenfallen.

## 38 Lösungen und Lösungswege

In der Abbildung ist die Druckverteilung der amerikanischen Standardatmosphäre skizziert, die auf Meeresspiegelniveau den Bezugsdruck  $p_0 = 1,01325$  bar angibt. Die feste Bezugstemperatur  $T_0 = 288,15$  K gilt auf Meeresspiegelniveau. Am besagten Tag der Ballonfahrt unterschieden sich der Bodendruck und die Bodentemperatur am Flugplatz von den Bedingungen der amerikanischen Standardatmosphäre. Der Ballonfahrer entscheidet, dass die amerikanische Standardatmosphäre gewählt wird. Allerdings werden der Bezugsdruck und die Bezugstemperatur so verändert, dass die gemessenen Daten am Flugplatz eingehalten werden können. Weil die Bezugsgrößen immer auf Höhe des Meeresspiegels definiert sind, müssen diese Werte zuerst bestimmt werden.



**Abbildung 2:** Zur Druckverteilung in der Atmosphäre des Flugplatzes.

Zunächst wird die neue Bezugstemperatur  $T_0^*$  am Flugtag berechnet: In der Temperaturverteilung

$$T(y) = T_0^* - a \cdot y$$

muss ein modifizierter Bezugswert  $T_0^*$  gefunden werden, mit dem die Temperatur  $T(y = 350 \text{ m}) = (273,15 + 18)$  K auf Flugplatzhöhe erreicht wird.

$$T(y = 350 \text{ m}) = (273,15 + 18) = T_0^* - 0,0065 \frac{\text{K}}{\text{m}} \cdot 350 \text{ m}$$

$$T_0^* = (291,15 + 2,275) \text{ K} = 293,425 \text{ K} \quad \text{modifizierter Temperaturbezugswert}$$

$$\vartheta_0^* = 20,275 \text{ }^\circ\text{C}$$

Anschließend berechnet man den modifizierten Druckbezugswert  $p_0^*$  am Flugtag: Aus der Druckverteilung der Standardatmosphäre folgt mit  $p(y = 350 \text{ m}) = 96$  kPa:

$$p(y = 350 \text{ m}) = 96 \text{ kPa} = p_0^* \cdot \left( \frac{T_0^* - a \cdot 350 \text{ m}}{T_0^*} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}}$$

Hieraus ergibt sich der modifizierte Druckbezugswert  $p_0^* = 100,011$  kPa. Das heißt, am Flugtag ist der Luftdruck auf Meeresspiegelniveau  $y = 0$  m genau 100,011 kPa. Somit



## Lösungen und Lösungswege 39

hat der Ballonfahrer seine an die amerikanische Standardatmosphäre angelehnte eigene modifizierte Standarddruckverteilung.

$$p(y) = p_0^* \cdot \left( \frac{T_0^* - a \cdot y}{T_0^*} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}} = 100,011 \text{ kPa} \cdot \left( \frac{293,425 - a \cdot y}{293,425} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}}$$

Die restlichen Größen kommen aus der ursprünglichen amerikanischen Standardatmosphäre, da sie für die modifizierte Standardatmosphäre einfach übernommen werden. Der Ballonfahrer stellt diese Gleichung nach  $y$  um und erhält:

$$y = \frac{-1}{a} \left( 293,425 \text{ K} \cdot \left( \frac{p(y)}{100,011 \text{ kPa}} \right)^{\frac{R \cdot a}{g}} - 293,425 \text{ K} \right)$$

Dies ist die Höhenformel des Ballonfahrers als Funktion des Luftdrucks  $p(y)$ . Der Druck muss in der Einheit kPa angegeben werden, dann erhält man  $y$  in der Einheit m. Die Messung des Luftdrucks  $p(y) = 78 \text{ kPa}$  ergibt nach dieser Formel eine Höhe  $y = 2084 \text{ m}$  über Meeresspiegel oder  $1734 \text{ m}$  über Flugplatzniveau.

Zusatzfrage: Was ist, wenn der Start des Ballons an der Nordseeküste  $y = 0 \text{ m}$  erfolgt und dort zufällig genau der Normdruck  $p = 1,01325 \text{ bar}$  und eine Lufttemperatur von  $15 \text{ °C}$  vorhanden sind? Der Ballon steigt auf; in einer gewissen Höhe zeigt das geeichte Barometer im Korb den Druck vom  $0,83 \text{ bar}$  an. Auf welcher Höhe  $y$  befindet sich das Barometer? (Lösung:  $y = 1650 \text{ m}$ )

## Aufgabe 6.2: Luftdruck am Berggipfel

Zuerst wird der Druck  $p_0$  in der Höhe  $y = 0 \text{ m}$  (entspricht Meereshöhe) an diesem Tag mit der barometrischen Höhenformel berechnet, die nur für eine isotherme Atmosphäre gilt:

$$p(y) = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y}{R \cdot T}\right)}$$

Er ist sozusagen der Bezugsdruck. Die Daten hierfür sind alle bekannt, denn in der Höhe  $y = 740 \text{ m}$  kennt man den dort herrschenden Atmosphärendruck  $p = 98 \text{ kPa}$ . Mit der Bedingung  $p(y = 740 \text{ m}) = 0,98 \text{ kPa}$  können Sie auf den Druck auf Meereshöhe  $p_0$  zurückrechnen.

$$0,98 \text{ kPa} = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{9,81 \text{ m} \cdot 740 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{s}^2 \cdot 287,1 \text{ J} \cdot (273,15 + 22) \text{ K}}\right)}$$

Es folgt  $p_0 = 106,765 \text{ kPa}$ . Die Bestimmung des Drucks auf dem Gipfel erfolgt wieder mit der barometrischen Höhenformel, denn  $p_0$  ist jetzt bekannt, und  $p(y = 1055 \text{ m})$  kann berechnet werden.

$$p(y) = 106,765 \text{ kPa} \cdot e^{-\left(\frac{9,81 \text{ m} \cdot 1055 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{s}^2 \cdot 287,1 \text{ J} \cdot (273,15 + 22) \text{ K}}\right)} = 94,49 \text{ kPa}$$

Zuletzt erfolgt die Berechnung der Luftdichte auf der Bergspitze mithilfe der idealen Gasgleichung:  $p = \rho \cdot R \cdot T$ . Mit  $R = 287,1 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  und der Umrechnungsbeziehung  $1 \text{ J} = 1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3/1000$  ist in der isothermen Atmosphäre die Dichte der Luft:

$$\rho = \frac{p(y = 1055 \text{ m}) \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{287,1 \text{ J} \cdot (273,15 + 22) \text{ K}}$$

$$\rho = \frac{94,49 \text{ kPa} \cdot \text{kg} \cdot \text{K} \cdot 1000}{287,1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3 \cdot (273,15 + 22) \text{ K}} = 1,1151 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$





## 40 Lösungen und Lösungswege

Am Fuße des Berges, die Höhe sei die Meeresspiegelhöhe  $y = 0$  m, ist die Dichte der  $22\text{ }^\circ\text{C}$  warmen Luft  $\rho = 1,2599\text{ kg/m}^3$ . Die Druckabnahme mit der Höhe bewirkt in der Luft mit konstanter Temperatur eine Dichteabnahme um  $-11,5\%$ .

### Aufgabe 6.3: Auftrieb in der Atmosphäre

Schweben heißt, die Gesamtgewichtskraft des Ballons ist gleich der Auftriebskraft des Ballons in der Luft. Die Schwebelage lautet:  $F = G$ .

$$\text{Gesamtgewichtskraft: } G = \rho_B \cdot V_B \cdot g = m_B \cdot g$$

$$\text{Auftriebskraft: } F = \rho_{\text{Luft}} \cdot V_B \cdot g$$

Sie benötigen die Dichte der Luft  $\rho_{\text{Luft}}$  aus der idealen Gasgleichung.

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{p(y)}{R \cdot T(y)}$$

Weil die Atmosphäre die Standardatmosphäre ist, können Sie die Formel für die Druckverteilung und auch die Formel für die Temperaturverteilung als gegeben ansehen und dadurch die Luftdichte als Funktion der Höhe bestimmen.

$$p(y) = p_0 \cdot \left( \frac{T_0 - a \cdot y}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}}$$

$$T(y) = T_0 - a \cdot y$$

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{p_0 \cdot \left( \frac{T_0 - a \cdot y}{T_0} \right)^{\frac{g}{R \cdot a}}}{R \cdot (T_0 - a \cdot y)}$$

$$\rho_{\text{Luft}} = \frac{p_0}{R \cdot T_0} \cdot \left( \frac{T_0 - a \cdot y}{T_0} \right)^{\left( \frac{g}{R \cdot a} - 1 \right)}$$

Die Bedingung für Schweben,  $F = G$ , nimmt jetzt die Form

$$\rho_{\text{Luft}} \cdot V_B \cdot g = m_B \cdot g$$

an.  $V_B$  ist das Volumen des kugelförmigen Ballons

$$V_B = \frac{\pi \cdot d^3}{6},$$

wobei  $d$  der Durchmesser des Ballons ist. Die Gleichgewichtsbedingung in der Schwebelage  $y = 750$  m lautet:

$$\frac{p_0}{R \cdot T_0} \cdot \left( \frac{T_0 - a \cdot 750\text{ m}}{T_0} \right)^{\left( \frac{g}{R \cdot a} - 1 \right)} \cdot \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot g = m_B \cdot g$$

In dieser Beziehung sind mit Ausnahme von  $d$  alle Größen bekannt. Die Umstellung dieser Gleichung liefert den erforderlichen Ballondurchmesser  $d$ .





## Lösungen und Lösungswege 41

Daten:  $p_0 = 1,01325 \text{ bar}$ ,  $R = 286,9 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $T_0 = 288,15 \text{ K}$ ,  $a = 0,0065 \text{ K}/\text{m}$ ,  
 $g = 9,807 \text{ m}/\text{s}^2$ ,  $m_B = 7,4 \text{ kg}$

$$d^3 = \frac{6 \cdot m_B \cdot R \cdot T_0}{\pi \cdot p_0 \cdot \left( \frac{T_0 - a \cdot 750 \text{ m}}{T_0} \right)^{\left( \frac{g}{R \cdot a} - 1 \right)}}$$

$$d^3 = 12,400 \text{ m}^3$$

$$d = \sqrt[3]{12,400 \text{ m}^3} = 2,315 \text{ m}$$

Der theoretische Wert für den Ballondurchmesser ist 2,315 m. In der Praxis kann dieser Ballondurchmesser nur sehr schwer eingestellt werden. Daher ist die Schwebhöhe Glücksache, denn die Auftriebskräfte reagieren sehr empfindlich auf Änderungen des Ballonvolumens. Befindet sich der Wetterballon am Boden, auf der Höhe  $y = 0 \text{ m}$ , umgeben vom Bodendruck  $p_0 = 1,01325 \text{ bar}$ , so ist dort die Auftriebskraft ( $F_A = 78,0 \text{ N}$ ) größer als die Gewichtskraft des Ballons ( $G = 72,572 \text{ N}$ ). Der Ballon steigt von selbst in die ruhende Atmosphäre auf.

### Aufgabe 6.4: Luftdruck am Boden eines Erdschachts

In der »Schachtatmosphäre« herrscht eine Temperatur von

$$T = \frac{p_0}{\rho_0 \cdot R_{\text{Luft}}} = \frac{94 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{1,120 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J}} = 292,3 \text{ K},$$

die unabhängig von der Tiefe ist. Denken Sie an die Einheiten, die umgerechnet werden müssen:  $1 \text{ kPa} = 1000 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ ,  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ . Wenn die Temperatur der Atmosphäre konstant ist, gilt die barometrische Höhenformel.

$$p = p_0 \cdot e^{\left( \frac{-g \cdot y}{R \cdot T} \right)} = p_0 \cdot e^{\left( \frac{-g \cdot y \cdot \rho_0}{p_0} \right)}$$

Für  $y = 0 \text{ m}$  ist  $p = p_0$ . In der Schachttiefe  $y = -800 \text{ m}$  ist der Luftdruck höher als an der Erdoberfläche. Der Druck am Boden des Schachtes beträgt:

$$p = 94 \text{ kPa} \cdot e^{\left( \frac{-9,81 \text{ m} \cdot (-800 \text{ m}) \cdot 1,12 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2}{\text{s}^2 \cdot 94 \text{ m}^3 \cdot 1000 \text{ kg}} \right)} = 103,2 \text{ kPa}$$

Sie wissen noch aus Ihrer Mathematikausbildung, dass der Exponent der e-Funktion oder das Argument des Logarithmus frei von Einheiten sein müssen. In der Klammer, dem Exponenten der e-Funktion, wurde die Umrechnung  $1 \text{ kPa} = 1000 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$  benutzt.

### Aufgabe 6.5: Auftriebsfehler bei präzisen Wägungen in der Luft

Beim Experiment wurde festgestellt, dass die Waage im Gleichgewicht verharrt, wenn die Massen der Wägestücke auf der einen Seite der Balkenwaage  $m_W = 725 \text{ g}$  entsprechen. Somit beträgt die Masse des Zylinders auf der anderen Seite wahrscheinlich auch  $725 \text{ g}$ . Das ist die übliche Art, die Massen von Gegenständen mit bekannten Massen von Wägestücke zu vergleichen, wenn die Dichte der umgebenden Luft sehr viel kleiner ist als die Dichten der Wägestücke und des zu wiegenden Gegenstands. Die Dichte der Luft kann dann vernachlässigt werden. Ist das nicht der Fall, dann ist eine Auftriebskorrektur zu berücksichtigen:



## 42 Lösungen und Lösungswege

Der Zylinder und die für das Gleichgewicht notwendigen Wägestücke können unterschiedliche Dichten haben. Die Massen sind grob gesehen jeweils 725 g, aber die Volumina sind unterschiedlich, wenn die Dichten der auf beiden Seiten der Waage liegenden Gegenstände unterschiedlich sind. Damit wirken in der Atmosphäre unterschiedliche Auftriebskräfte auf die Gegenstände in den Waagschalen. Welche Masse  $m_Z$  hat der Zylinder wirklich?

Stellen Sie fest, wie groß die Dichte der Luft  $\rho_L$  bei der Messung war. Die Dichte wurde nicht gemessen, aber Luftdruck und Lufttemperatur wurden registriert. Sie errechnen mithilfe der idealen Gasgleichung  $p = \rho \cdot R_{\text{Luft}} \cdot T$  die Dichte der Luft und erhalten  $\rho_L = 1,180 \text{ kg/m}^3$ . Das exakte Gleichgewicht herrscht an der Balkenwaage, wenn folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\underbrace{m_Z \cdot g}_{\text{Gewicht Zylinder}} - \underbrace{\rho_L \cdot g \cdot V_Z}_{\text{Auftrieb am Zylinder}} = \underbrace{m_W \cdot g}_{\text{Gewicht der Wägestücke}} - \underbrace{\rho_L \cdot g \cdot V_W}_{\text{Auftrieb an den Wägestücken}}$$

Die Gewichtskräfte wirken in Richtung der Fallbeschleunigung  $g$ , die Auftriebskräfte entgegen dieser Richtung, deshalb sind die Auftriebskräfte mit einem Minuszeichen versehen. Die Erdbeschleunigung kann gekürzt werden.

$$m_Z = m_W + \rho_L \cdot V_Z - \rho_L \cdot V_W$$

Mit  $V_Z = r_Z^2 \cdot \pi \cdot h_z$  und  $V_W = \frac{m_W}{\rho_W}$  folgt:

$$m_Z = m_W + \rho_L \cdot r_Z^2 \cdot \pi \cdot h_z - \rho_L \cdot \frac{m_W}{\rho_W}$$

$$m_Z = m_W + \rho_L \cdot \underbrace{\left( r_Z^2 \cdot \pi \cdot h_z - \frac{m_W}{\rho_W} \right)}_{\text{Auftriebskorrektur}}$$

$$m_Z = 725 \text{ g} + 0,257 \text{ g} = 725,257 \text{ g}$$

Sie sehen, dass für die Berücksichtigung der Auftriebskorrektur die Luftdichte  $\rho_L$ , das Volumen des zu messenden Gegenstands  $V_Z$ , die Masse der aufgelegten Wägestücke  $m_W$  und die Dichte der Wägestücke  $\rho_W$  bekannt sein müssen.

### Aufgabe 6.6: Zeppeline können auch Lasten tragen

Schweben heißt, die Gesamtgewichtskraft des Luftschiffs ist gleich der Auftriebskraft des Luftschiffs in der Luft.

Masse der Heliumfüllung:  $m_{\text{He}} = \rho \cdot V = 0,161 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 16000 \text{ m}^3 = 2576 \text{ kg}$

Gesamtmasse mit Fracht:  $m_{\text{ges}} = 15500 \text{ kg} + 2576 \text{ kg} = 18076 \text{ kg}$

Gewichtskraft:  $G = m_{\text{ges}} \cdot g = 18076 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 177\,325,56 \text{ N}$

Auftriebskraft:  $F_A = \rho_L \cdot g \cdot V$



## Lösungen und Lösungswege 43

Die Dichte der Luft (Index L) ändert sich mit der Höhe über Grund. Die ideale Gasgleichung  $p_L = \rho_L \cdot R_L \cdot T_L$  und die barometrische Höhenformel, die nur bei einer isothermen Atmosphäre gilt, beschreiben die Dichteänderung der Luft.

$$p_L = (p_L)_0 \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y}{R_L \cdot T_L}\right)} \quad \text{Barometrische Höhenformel}$$

Beide Gleichungen zusammengenommen ergeben die Dichte der Luft in jeder beliebigen Höhe  $y$  über Grund. Zuvor lässt sich  $R_L \cdot T_L$  durch  $(p_L)_0 / (\rho_L)_0$  ersetzen, denn infolge der unbekannt, aber konstanten Temperatur der Luft gilt dies auch in jeder Höhe  $y$ .

$$\begin{aligned} \rho_L \cdot R_L \cdot T_L &= (p_L)_0 \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y}{R_L \cdot T_L}\right)} \\ \rho_L \cdot \frac{(p_L)_0}{(\rho_L)_0} &= (p_L)_0 \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y \cdot (\rho_L)_0}{(p_L)_0}\right)} \\ \rho_L &= (\rho_L)_0 \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y \cdot (\rho_L)_0}{(p_L)_0}\right)} \end{aligned}$$

Somit erhalten Sie für die Auftriebskraft  $F_A$  den Ausdruck:

$$F_A = g \cdot (\rho_L)_0 \cdot V \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y \cdot (\rho_L)_0}{(p_L)_0}\right)}$$

Die Schwebelage des Luftschiffs lautet: Auftriebskraft  $F_A$  ist gleich Gewichtskraft  $G$ .

$$g \cdot (\rho_L)_0 \cdot V \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot y \cdot (\rho_L)_0}{(p_L)_0}\right)} = m_{\text{ges}} \cdot g$$

Die Auflösung nach  $y$  bringt die gewünschte Gleichung für die Schwebelage.

$$y = \frac{-(p_L)_0}{g \cdot (\rho_L)_0} \cdot \ln \left( \frac{m_{\text{ges}}}{(\rho_L)_0 \cdot V} \right)$$

Aus den gegebenen Daten berechnet man die maximale Schwebelage  $y = 290,6$  m.

Zusatzfrage: Wie hoch ist die Lufttemperatur? Sie benötigen hierfür die Gaskonstante der Luft,  $R = 287,1 \text{ J/(kg K)}$ . Lösung:  $T_L = 1 \text{ bar} / (R \cdot 1,168 \text{ kg/m}^3) \hat{=} 25 \text{ }^\circ\text{C}$

### Aufgabe 6.7: Wie tief taucht ein Körper in eine Flüssigkeit beim Schwimmen ein?

Die Bedingung für das Schwimmen eines Körpers liefert die Eintauchtiefe  $h$ .

$$F_A = G$$

$$\rho_W \cdot g \cdot (B \cdot X \cdot h) + \rho_L \cdot g \cdot (B \cdot X \cdot (H - h)) = \rho_K \cdot g \cdot (B \cdot X \cdot H)$$

Gesucht ist die Tiefe  $h$ .

$$h = \frac{H \cdot (\rho_K - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}$$

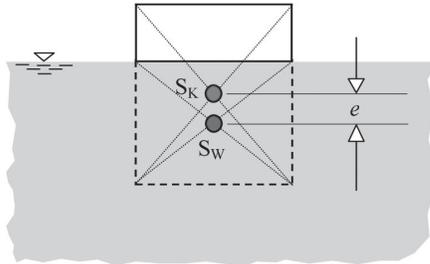
Mit den Daten beträgt die Tiefe  $h = 0,82177$  m. In der Praxis wird oft der Auftrieb in der Luft vernachlässigt. Wie tief würde dann der Quader eintauchen?



## 44 Lösungen und Lösungswege

Wenn Sie  $\rho_L = 0$  setzen, dann ergibt sich eine Eintauchtiefe von 0,822 m, was hier im Rahmen der Messgenauigkeit liegt.

Ist die Schwimmelage stabil? Die Schwimmelage ist stabil, wenn der Schwerpunkt des eingetauchten Körpers  $S_W$  tiefer liegt als der Schwerpunkt des ganzen Körpers  $S_K$ , was hier der Fall ist. Der Schwerpunkt der eingetauchten Quadermasse  $S_W$  ist um die Strecke  $e = H/2 - h/2$  tiefer als der Schwerpunkt des ganzen Quaders  $S_K$ .



**Abbildung 3:** Die Schwimmelage des Körpers ist stabil.

## Aufgabe 6.8: Der Auftriebszug im Schornstein

Stellen Sie sich vor, dass das Abgasvolumen im Schornstein einen Gaskörper darstellt, der wegen seiner hohen Temperatur von 230 °C einen Auftrieb erfährt, wenn er sozusagen ohne seine Hülle aus Mauersteinen oder Röhren in der kälteren Atmosphäre steht. Der Betrag der Gewichtskraft dieser Abgassäule sei  $G_G$  und den Betrag der Auftriebskraft bezeichnen Sie mit  $F_A$ .

$$G_G = \rho_G \cdot g \cdot V$$

Dabei ist  $\rho_G$  die Dichte bei 230 °C. Das Volumen  $V$  ist einfach Grundfläche  $A$  mal Schornsteinhöhe  $h$ . Der Betrag der Auftriebskraft wird mit der Formel

$$F_A = \rho_L \cdot g \cdot V$$

berechnet. Die Auftriebskraft ist das Gewicht der durch das Abgasvolumen  $V$  verdrängten Luftmasse der Dichte  $\rho_L$ . Wenn  $G_G$  gleich  $F_A$  wäre (Schwebezustand), würde das Abgas im statischen Gleichgewicht sein und nicht durch den Schornstein strömen. Der Schornsteinzug, der jetzt betrachtet wird, wäre dann null.

Bilden Sie die Differenz der Kräfte  $F_A - G_G$  und bezeichnen Sie diese mit  $\Delta F$ .

$$\Delta F = \rho_L \cdot g \cdot V - \rho_G \cdot g \cdot V$$

$$\Delta F = (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot V = (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot A \cdot h$$

$$\text{Schornsteinzug } \frac{\Delta F}{A} = (\rho_L - \rho_G) \cdot g \cdot h$$



## Lösungen und Lösungswege 45

Der Schornsteinzug besitzt die Einheit eines Drucks, also zum Beispiel Pa. Zunächst ist es wichtig, die Dichte des Abgases bei der herrschenden Temperatur im Betriebszustand des Schornsteins zu ermitteln. Im Standardzustand gilt für das Abgas:

$$p_{i,N} = (\rho_G)_{i,N} \cdot R \cdot T_{i,N}$$

$$1,01325 \text{ bar} = 1,311 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot R \cdot 273,15 \text{ K}$$

Im Betriebszustand gilt für das Abgas:

$$p_G = \rho_G \cdot R \cdot (273,15 + 230) \text{ K}$$

$$1,01325 \text{ bar} = \rho_G \cdot R \cdot (273,15 + 230) \text{ K}$$

Gleichgesetzt folgt die Dichte des Abgases  $\rho_G$ :

$$\rho_G \cdot R \cdot (273,15 + 230) \text{ K} = 1,311 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot R \cdot 273,15 \text{ K}$$

$$\rho_G = 0,7117 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Mit dieser wahren Dichte im Betriebszustand des Schornsteins ergibt sich für den Schornsteinzug:

$$\frac{\Delta F}{A} = (1,29 - 0,7117) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 70 \text{ m} = 397 \text{ Pa}$$

Bei funktionierenden Schornsteinen muss der Zug möglichst groß sein, damit die Rauchgase aus den Brennkammern abgesaugt werden und gleichzeitig der Brennraum mit Luft aus der Umgebung der Brennkammer versorgt wird.

### Aufgabe 6.9: Archimedes und Gold

Berechnen Sie aus den beiden Messungen die Dichte der Münze und vergleichen Sie den errechneten Wert mit der tatsächlichen Dichte von reinem Gold,  $\rho_{\text{Gold}} = 19300 \text{ kg/m}^3$ . Die Kräftebilanz bei der 1. Messung der Münze in Luft ergibt:

$$M_1 = G$$

Die 2. Kräftebilanz aus der zweiten Messung ergibt:

$$M_2 + F_A = G$$

Die Werte  $M_1$  und  $M_2$  wurden an der Federwaage abgelesen. Aus den beiden Gleichungen lässt sich die Auftriebskraft  $F_A$  bestimmen.

$$F_A = M_1 - M_2$$

Die physikalische Gleichung für die Auftriebskraft ist aber auch:

$$F_A = \rho_W \cdot g \cdot V_{\text{Münze}}$$



## 46 Lösungen und Lösungswege

Setzen Sie die beiden letzten Beziehungen gleich.

$$M_1 - M_2 = \rho_W \cdot g \cdot V_{\text{Münze}}$$

In dieser Gleichung kommt vorerst noch nicht die gesuchte Dichte der Münze vor, aber durch die erste Messung ist bekannt, dass aus der physikalischen Gleichung

$$G = M_1 = \rho_{\text{Münze}} \cdot g \cdot V_{\text{Münze}}$$

die Dichte der Münze theoretisch bestimmt werden kann.

$$V_{\text{Münze}} = \frac{M_1}{\rho_{\text{Münze}} \cdot g}$$

Eingesetzt in die Gleichung  $M_1 - M_2$  folgt:

$$M_1 - M_2 = \rho_W \cdot g \cdot \frac{M_1}{\rho_{\text{Münze}} \cdot g}$$

Die Erdbeschleunigung  $g$  kann gekürzt werden.

$$\rho_{\text{Münze}} = \rho_W \cdot \frac{M_1}{M_1 - M_2}$$

$$\rho_{\text{Münze}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{6,65 \text{ N}}{(6,65 - 6,25) \text{ N}} = 16625 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Die Münze sieht aus wie eine Goldmünze, ist aber nicht aus reinem Gold, denn die Dichte aus dem Experiment stimmt nicht mit der wahren Dichte  $\rho_{\text{Gold}} = 19300 \text{ kg/m}^3$  überein.

## Aufgabe 6.10: Öchslegrad

Die Mostdichte ist bei  $20^\circ\text{C}$  gemessen worden. Sie benötigen nur noch die Dichte von Wasser bei  $20^\circ\text{C}$  und können dann sofort den Öchslegrad angeben. Bekannt sind die Dichte von Wasser bei  $4^\circ\text{C}$ ,  $\rho_{4^\circ\text{C}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ , und der isobare Ausdehnungskoeffizient von Wasser  $\gamma_{4^\circ\text{C}} = 1,0616 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Mit der Formel für den isobaren Ausdehnungskoeffizienten für Flüssigkeiten und dem spezifischen Volumen  $v$  ergibt sich:

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dT} = \gamma$$

$$v = \frac{1}{\rho} \quad \text{und} \quad d(v \cdot \rho) = v \cdot d\rho + \rho \cdot dv = 0$$

$$\frac{-d\rho}{\rho} = \gamma \cdot dT$$

Die Integration von  $\vartheta = 4^\circ\text{C}$  und  $\rho = \rho_{4^\circ\text{C}}$  bis  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$  und  $\rho = \rho_{20^\circ\text{C}}$  ergibt:

$$\int_{\rho_{4^\circ\text{C}}}^{\rho_{20^\circ\text{C}}} \frac{d\rho}{\rho} = -\gamma \cdot \int_{\vartheta=4^\circ\text{C}}^{\vartheta=20^\circ\text{C}} d\vartheta$$

$$\ln\left(\frac{\rho_{20^\circ\text{C}}}{\rho_{4^\circ\text{C}}}\right) = -\gamma \cdot (20^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C})$$





## Lösungen und Lösungswege 47

$$\rho_{20^\circ\text{C}} = \rho_{4^\circ\text{C}} \cdot e^{-\gamma \cdot 16 \text{ K}}$$

$$\rho_{20^\circ\text{C}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot e^{-1,69855 \times 10^{-3}} = 998,30 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Mit dieser Dichte des Wassers bei 20 °C erhalten Sie den gesuchten Öchslegrad.

$$\text{Öchslegrad} = 1000 \cdot \left( 1,083 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} - 0,9983 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \right)_{20^\circ\text{C}} = 84,7^\circ \text{Öchsle}$$

Der Winzer Bruno will beim nächsten Mal im Internet nach der Dichte des Wassers bei vor-gegebener Temperatur suchen. Die Maische wird jedenfalls einen guten Wein hergeben.

### Aufgabe 7.1: Divergenz eines zweidimensionalen Vektorfelds

Die Divergenz  $\text{div}(\vec{c})$  hat im zweidimensionalen Raum dieselbe physikalische Bedeutung wie in drei Dimensionen. Der Wert gibt an, wie groß die Flussdichte des Feldes, also die Flussrate pro Volumeneinheit, ist. Auch in zweidimensionalen Feldern gilt, dass die Strömung nur dann inkompressibel ist, wenn die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds null ist. Sie müssen nur die Gleichung

$$\text{div}(\vec{c}) = \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z}$$

auf zweidimensionale Felder reduzieren und überprüfen, ob  $\text{div}(\vec{c})$  null wird. Gegeben sind die  $u$ - und  $v$ -Geschwindigkeitskomponenten, deshalb gilt:

$$\text{div}(\vec{c}) = \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y}$$

Mit  $u(x, y) = x - y^2$  und  $v(x, y) = x^3 - y$  sind die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(v)}{\partial y} = -1$$

$$\text{div}(\vec{c}) = 1 - 1 = 0$$

Die Summe wird null; deshalb ist die Strömung mit dem gegebenen Geschwindigkeitsfeld inkompressibel. Für alle Punkte im Vektorfeld dehnt sich das Fluid weder aus noch wird es verdichtet. Durch diese Rechnung können Sie erkennen, dass mit der Operation  $\text{div}(\vec{c})$  aus einem Vektorfeld  $\vec{c}$  ein skalares Feld (manchmal auch nur eine Zahl) entsteht.

### Aufgabe 7.2: Ein allgemeines Vektorfeld eines Gases

Die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $w$  sind zeitabhängig. Die allgemeine Kontinuitätsgleichung für Gase lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \cdot \vec{c}) = 0$$

Jede Strömung hat eine positive Dichte  $\rho$ . Unter der Annahme, dass die Dichte konstant ist, kann  $\rho$  aus der Klammer entfernt werden.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \cdot \text{div}(\vec{c}) = 0$$





## 48 Lösungen und Lösungswege

Berechnen Sie  $\text{div}(\vec{c})$ .

$$\text{div}(\vec{c}) = \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{c}) = (4 \cdot x - y) + (2 \cdot y - 4 \cdot x) + (-y) = 0$$

Die Divergenz ist null, das Geschwindigkeitsfeld ist inkompressibel. Wenn Sie dieses Ergebnis in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\rho \cdot \text{div}(\vec{c})}_{=0} = 0$$

einsetzen, lässt sich feststellen, dass die Dichte keine Funktion der Zeit sein kann, denn  $\partial \rho / \partial t$  muss auch null sein. Die Dichte ist konstant im Feld.

### Aufgabe 7.3: Eindimensionale Kontinuitätsgleichung

Die allgemeine eindimensionale Kontinuitätsgleichung für stationäre ( $\partial \rho / \partial t = 0$ ) Bewegungen in  $x$ -Richtung lautet:

$$\frac{\partial(\rho \cdot u)}{\partial x} = 0$$

Es gibt nur die  $x$ -Achse und nur  $x$  ist die unabhängige Variable. Diese einfache Differenzialgleichung verlangt, dass das Produkt  $(\rho \cdot u)$  in  $x$ -Richtung konstant ist, denn sonst ist die Ableitung nicht null.

$$\rho \cdot u = \text{konstant}$$

Nehmen Sie an, dass eine beliebige Stromröhre den konstanten Innenquerschnitt  $A$  besitzt. Die Gleichung kann auf beiden Seiten mit  $A$  multipliziert werden.

$$\rho \cdot u \cdot A = \underbrace{\text{konstant} \cdot A}_{\text{neue Konstante}}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung entsteht durch die Multiplikation mit einer konstanten Größe  $A$  eine neue Konstante. Welche Einheit hat die neue Konstante? Prüfen Sie auf der linken Seite die einzelnen Einheiten: Die Dichte  $\rho$  ist in  $\text{kg}/\text{m}^3$ , die Geschwindigkeit in  $x$ -Richtung  $u$  in  $\text{m}/\text{s}$  und die innere Querschnittsfläche des Stromrohrs  $A$  in  $\text{m}^2$  angegeben. Folglich besitzt die neue Konstante die Einheit  $\text{kg}/\text{s}$ . In der Physik hat nur der Massenstrom  $\dot{m}$  diese Einheit. Die eindimensionale und stationäre Kontinuitätsgleichung einer beliebigen Stromröhre lautet:

$$\rho \cdot u \cdot A = \dot{m}$$

Diese Massenerhaltung darf man auch an zwei auseinanderliegenden Stellen 1 und 2 längs der Stromröhre anwenden. Dann schreibt man aber:

$$\rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2$$



## Lösungen und Lösungswege 49

Die weitere Erkenntnis ist, dass die Stromröhre einen inneren Strömungsquerschnitt haben muss, der jedoch längs der  $x$ -Achse variabel sein darf. An jeder Stelle der Stromröhre strömt innerhalb eines konstanten Zeitintervalls, zum Beispiel in 1 Sekunde, dieselbe Fluidmasse durch den dort vorhandenen Innenquerschnitt.

### Aufgabe 7.4: Ein rechteckiger Luftkanal

Der rechteckige Kanal hat die Abmessungen  $B/H = 1/1,5$  und somit eine innere Querschnittsfläche  $A$  von:

$$A = B \cdot H = \frac{H^2}{1,5}$$

Zusammen mit den vorgegebenen Daten für den Volumenstrom  $\dot{V} = 4000 \text{ m}^3/\text{h}$  und die Strömungsgeschwindigkeit  $u = 4 \text{ m/s}$  ergibt sich aus der Gleichung

$$\dot{V} = u \cdot A = u \cdot \frac{H^2}{1,5}$$

die gesuchte Höhe  $H$  des Kanals.

$$H = \sqrt{\frac{1,5 \cdot \dot{V}}{u}} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 4000 \text{ m}^3 \cdot \text{s}}{3600 \text{ s} \cdot 4 \text{ m}}} = 0,6455 \text{ m}$$

Die Breite des Kanals wird durch das Verhältnis  $B/H$  bestimmt.

$$B = \frac{H}{1,5} = 0,4303 \text{ m}$$

Um den Massenstrom mit der Kontinuitätsgleichung bestimmen zu können, ist es notwendig, die Dichte aus der idealen Gasgleichung zu kennen:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{1,4 \text{ bar} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{287,1 \text{ J} \cdot (273,15 + 60) \text{ K}} = 1,4637 \text{ kg/m}^3$$

Somit ergibt sich ein Luftmassenstrom von:

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = 1,4637 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4000 \frac{\text{m}^3}{3600 \text{ s}} = 1,626 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

### Aufgabe 7.5: Ist das Feld einer Grenzschichtströmung inkompressibel?

Die Kontinuitätsgleichung in zwei Dimensionen lautet für diesen Fall mit  $\rho = \text{konstant}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Da die Geschwindigkeit  $u(x, y)$  gegeben ist, kann die Ableitung  $\partial u / \partial x$  berechnet werden. Anschließend muss  $v$  aus der Kontinuitätsgleichung ermittelt werden.

Mit  $\partial u / \partial x = 14 \cdot x \cdot y / 5$  nimmt die Kontinuitätsgleichung die folgende Form an:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-14 \cdot x \cdot y}{5}$$



## 50 Lösungen und Lösungswege

Es gibt zwei Wege zur Lösung: Sie können erstens die Differenzialgleichung lösen oder zweitens die Integrationsregel »Trennung der Variablen« verwenden. Beide Wege sind gleichwertig! Wir lösen die Integrale, die sich aus der Kontinuitätsgleichung ergeben (zweiter Weg).

$$\int \partial v = - \int \frac{14 \cdot x \cdot y}{5} \cdot \partial y$$

$$v + C_1 = \frac{-14 \cdot x}{5} \cdot \frac{y^2}{2} + F(x)$$

Bei partiellen Integrationen werden die Integrationskonstanten beliebige Funktionen der anderen vorhandenen Variablen. Das rechte Integral muss über  $y$  integriert werden, deshalb ist die Integrationskonstante eine beliebige Funktion von  $x$ .  $C_1$  lässt sich in  $F(x)$  unterbringen. Die Geschwindigkeitskomponente  $v$  ist:

$$v(x, y) = \frac{-14}{10} \cdot x \cdot y^2 + \underbrace{F(x) - C_1}_{f(x)}$$

Aus der Randbedingung an der Wand  $v(x, y = 0) = 0$  folgt weiter, dass  $f(x)$  verschwindet. Die Geschwindigkeitskomponente  $v$  ist:

$$v(x, y) = \frac{-7}{5} \cdot x \cdot y^2$$

Es ergibt sich das zweidimensionale Vektorfeld:

$$\vec{c} = \left\{ \frac{7}{5} \cdot x^2 \cdot y + 6,9 \cdot y^{5/28} ; \frac{-7}{5} \cdot x \cdot y^2 \right\}$$

Die Frage, ob das Feld inkompressibel ist, lässt sich mit der Divergenz in zwei Dimensionen leicht beantworten:

$$\operatorname{div}(\vec{c}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Genau diese Gleichung haben Sie benutzt, um  $v(x, y)$  zu bestimmen. Wenn keine Rechenfehler gemacht wurden, ist das Vektorfeld inkompressibel, denn  $\operatorname{div}(\vec{c}) = 0$ . Infolgedessen gibt es keine Punkte im Feld, bei denen sich das Fluid ausdehnt oder verdichtet. Das Feld ist quellen- und senkenfrei.

### Aufgabe 7.6: Zwei Gasströme werden gemischt

Die Massenströme in den zuführenden Leitungen lassen sich mit der eindimensionalen Kontinuitätsgleichung in Stromröhren berechnen.

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \cdot u_1 \cdot A$$

$$\dot{m}_2 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A$$

In der Gasleitung 3 fließt der Massenstrom  $\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$  ab.

$$\dot{m}_3 = A \cdot (\rho_1 \cdot u_1 + \rho_2 \cdot u_2)$$



## Lösungen und Lösungswege 51

Der Massenstrom  $\dot{m}_3$  ist aber auch durch

$$\dot{m}_3 = \rho_3 \cdot u_3 \cdot A$$

berechenbar. Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich die Dichte in der abführenden Leitung 3.

$$\rho_3 \cdot u_3 \cdot A = A \cdot (\rho_1 \cdot u_1 + \rho_2 \cdot u_2)$$

$$\rho_3 = \frac{\rho_1 \cdot u_1 + \rho_2 \cdot u_2}{u_3} = 1,3686 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m}_3 = 1,3686 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 12,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,2 \text{ m}^2 = 3,312 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

### Aufgabe 7.7: Ein Geschwindigkeitsfeld auf Inkompressibilität prüfen

Ein inkompressibles Feld liegt vor, wenn die Divergenz des Vektorfelds null ist.

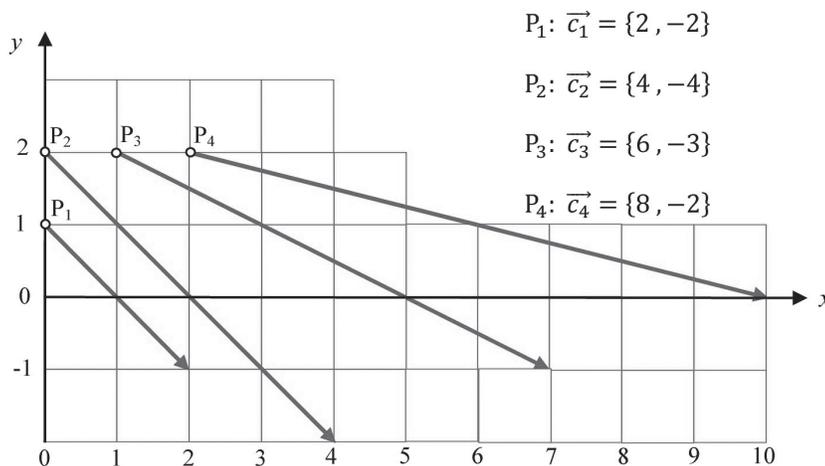
$$\text{div}(\vec{c}) = \frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z}$$

Mit den gegebenen Geschwindigkeitskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $w$  folgt:

$$\text{div}(\vec{c}) = \frac{\partial(A \cdot (x + y))}{\partial x} + \frac{\partial(x - 2 \cdot y)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{c}) = A + (-2) + 0 \quad \text{soll } 0 \text{ ergeben!}$$

Nur für  $A = 2$  wird das Feld inkompressibel. Die folgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeitsvektoren an ausgewählten Punkten.



**Abbildung 4:** Geschwindigkeitsvektoren an ausgewählten Stellen im Feld.



## 52 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 7.8: Wie schnell steigt der Wasserspiegel in einem Gefäß?

Wenn laufend mehr Wasser in den Tank einströmt als ausläuft, steigt der Wasserspiegel mit der Zeit an. Sie können diesen Sachverhalt durch eine zeitabhängige Massenbilanz formulieren.

$$\dot{m}_1 - \dot{m}_2 = \frac{dm}{dt}$$

Da  $\dot{m}_1$  und auch  $\dot{m}_2$  zeitlich konstant sind, ist die Zunahme der Wassermasse im Tank  $dm$  pro Zeiteinheit  $dt$  auch konstant, denn auf der linken Seite der Bilanz steht eine Konstante, also muss auch auf der rechten Seite eine stehen. Die Masse wird folgendermaßen ersetzt:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot h(t) \cdot A$$

$$\frac{d(\rho \cdot h(t) \cdot A)}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

Die Grundfläche des Tanks und die Dichte des Wassers sind konstant und dürfen deswegen vor den Ableitungsoperator ( $d/dt$ ) gezogen werden.

$$\rho \cdot A \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

Die sich ergebende Differenzialgleichung lautet:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\rho \cdot A}$$

Auf der rechten Seite stehen nur konstante Zahlen. Die Frage ist, welche Funktion  $h(t)$  ergibt abgeleitet eine Konstante? Natürlich wissen Sie, dass jede lineare Funktion bei der Ableitung eine Konstante liefert. Wenn Sie die beiden verbleibenden Variablen  $h$  und  $t$  trennen, also die Lösungsmethode für Differenzialgleichungen 1. Ordnung »Trennung der Variablen« anwenden, erhalten Sie

$$dh = \left( \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\rho \cdot A} \right) \cdot dt$$

Die Integration der Gleichung

$$\int dh = \left( \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\rho \cdot A} \right) \int dt$$

ergibt:

$$h = \left( \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\rho \cdot A} \right) \cdot t + C$$

$C$  ist die Integrationskonstante, die aufgrund der Anfangsbedingung  $h(t=0) = 0$  verschwindet. Die Höhe des Wasserspiegels ist durch die Gleichung

$$h = \left( \frac{\dot{m}_1 - \dot{m}_2}{\rho \cdot A} \right) \cdot t$$

## Lösungen und Lösungswege 53

bestimmt. Mit den gegebenen Daten folgt:

$$h = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t$$

Zum Beispiel lässt sich feststellen, dass nach 50 Sekunden der Wasserspiegel um 5 cm gestiegen ist.

### Aufgabe 7.9: Strömungsverzweigung in einer Arterie

Die Summe der Massen an den Stellen 2 und 3 muss mit der Masse an der Stelle 1 übereinstimmen, da zwischen den Stellen keine weiteren Verzweigungen vorhanden sind. Die Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse pro Zeiteinheit) lautet deshalb:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

Mit  $u = c =$  Geschwindigkeit und der Formel  $\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A$  gilt an jeder Stelle:

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 + \rho \cdot c_3 \cdot A_3$$

Die kreisrunden Querschnittsflächen an den Stellen 1, 2 und 3 können durch  $A = d^2 \cdot \pi/4$  errechnet werden.

$$\rho \cdot c_1 \cdot d_1^2 \frac{\pi}{4} = \rho \cdot c_2 \cdot d_2^2 \frac{\pi}{4} + \rho \cdot c_3 \cdot d_3^2 \frac{\pi}{4}$$

$$c_1 \cdot d_1^2 = c_2 \cdot d_2^2 + c_3 \cdot d_3^2$$

In dieser Gleichung sind vorerst  $c_2$  und  $c_3$  noch unbekannt. Es wird eine weitere Gleichung benötigt, damit zwei unabhängige Gleichungen für die beiden Unbekannten entstehen. Die Information, dass an den Stellen 2 und 3 im Blutkreislauf die Massenströme gleich sind, liefert die notwendige zweite Gleichung.

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

Daraus folgt:

$$c_2 \cdot d_2^2 = c_3 \cdot d_3^2 \quad \text{oder} \quad c_2 = \frac{c_3 \cdot d_3^2}{d_2^2}$$

Eingesetzt in die erste Gleichung zur Erhaltung der Massenströme ergeben sich schließlich die gesuchten Geschwindigkeiten.

$$c_1 \cdot d_1^2 = \left( \frac{c_3 \cdot d_3^2}{d_2^2} \right) \cdot d_2^2 + c_3 \cdot d_3^2 = 2 \cdot c_3 \cdot d_3^2$$

$$c_3 = \frac{c_1}{2} \cdot \left( \frac{d_1}{d_3} \right)^2 = \frac{1,2 \text{ m}}{2 \cdot \text{s}} \cdot \left( \frac{14 \text{ mm}}{11 \text{ mm}} \right)^2 = 0,9719 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c_2 = c_3 \cdot \left( \frac{d_3}{d_2} \right)^2 = 0,9719 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \left( \frac{11 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} \right)^2 = 1,176 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



## 54 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 7.10: Wasserstandsänderung in einem Tank

Nehmen Sie vorerst an, dass der Wasserspiegel im Behälter unverändert bleibt. Dann gilt aus Gründen der Kontinuität: Der zuströmende Massenstrom ist gleich dem abströmenden Massenstrom.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$\rho \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho \cdot c_2 \cdot A_2 + \rho \cdot c_3 \cdot A_3$$

$$\rho \cdot c_1 \cdot d_1^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \rho \cdot c_2 \cdot d_2^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \rho \cdot c_3 \cdot d_3^2 \cdot \frac{\pi}{4}$$

Sie können  $\rho \cdot \pi/4$  kürzen.

$$c_1 \cdot d_1^2 = c_2 \cdot d_2^2 + c_3 \cdot d_3^2$$

Mit den gegebenen Daten ergeben sich die Volumenströme des Wassers.

$$2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,080^2 \text{ m}^2 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,050^2 \text{ m}^2 + 1,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,100^2 \text{ m}^2$$

$$0,0160 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,00375 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} + 0,0120 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\underbrace{0,0160 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}_{\text{Zulauf}} = \underbrace{0,01575 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}_{\text{Ablauf}}$$

Der Vergleich der Volumenströme am Zulauf und an den Abläufen zeigt, dass mehr Volumen pro Zeiteinheit in den Behälter einströmt als ausströmt. Der Wasserspiegel steigt. Die Steiggeschwindigkeit des Wasserpegels erhalten Sie durch die Einbeziehung des Behälterdurchmessers  $d = 2$  m. Die Volumenstromänderung  $\Delta \dot{V} = (0,0160 - 0,01575) \text{ m}^3/\text{s} = 0,00025 \text{ m}^3/\text{s}$  wird im Behälter gespeichert und lässt den Wasserspiegel ansteigen.

$$\Delta \dot{V} = 0,00025 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Auch für die Zunahme der Wassermenge im Behälter gilt die Formel für den Volumenstrom  $\dot{V} = c \cdot A$ , wobei  $A$  die Behältergrundfläche ist. Daraus kann die Steiggeschwindigkeit  $c$  des Wasserspiegels berechnet werden.

$$c = \frac{4 \cdot \Delta \dot{V}}{d^2 \cdot \pi}$$

Mit  $d = 2$  m folgt  $c = 0,0000796 \text{ m/s} = 0,287 \text{ m/h}$ .

### Aufgabe 7.11: Beschleunigte Hochdruckströmung eines heißen Gases

Hier treffen Strömungsmechanik und Thermodynamik aufeinander. Dieses Fachgebiet nennt man Gasdynamik, deren Hauptanwendungsgebiet die Überschallströmung ist, bei der Dichteänderungen eine wesentliche Rolle spielen. Auch für Überschallströmungen gilt die Kontinuitätsgleichung.





## Lösungen und Lösungswege 55

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2$$

Die Zustandsgrößen  $\rho_1, \rho_2, A_1, A_2$  und  $c_1$  sind vorläufig noch unbekannt. Mithilfe der idealen Gasgleichung, die an jeder Rohrposition gilt, können die Dichten in der Kontinuitätsgleichung durch bekannte Zustandsgrößen aus der Thermodynamik ersetzt werden.

$$p_1 = \rho_1 \cdot R \cdot T_1 \quad \text{und} \quad p_2 = \rho_2 \cdot R \cdot T_2$$

$$\frac{p_1}{R \cdot T_1} \cdot c_1 \cdot A_1 = \frac{p_2}{R \cdot T_2} \cdot c_2 \cdot A_2$$

Die spezielle Gaskonstante ändert sich nicht, denn die Moleküle der Strömung ändern sich ja nicht. Da  $A_1$  gleich  $A_2$  ist, folgt für die Strömungsgeschwindigkeit  $c_1$ :

$$c_1 = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot c_2$$

$$c_1 = \frac{1 \text{ bar}}{8 \text{ bar}} \cdot \frac{(470 + 273,15) \text{ K}}{(380 + 273,15) \text{ K}} \cdot 220 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 31,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die strömende Luft im Rohr wird wegen der negativen Dichteänderung innerhalb des Rohrs immer schneller.

## Aufgabe 7.12: Volumenstrom eines Gases aus einer Erdgasquelle

Das hier betrachtete Erdgas besitzt zwei Zustände. In der Messstation sei der Zustand 1 und in den Gaskavernen tief in der Erde sei der Gaszustand 2. Die Kontinuitätsgleichung fordert, dass der Massestrom des Gases durch das senkrechte Bohrloch konstant ist.

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

Die Massenströme werden mithilfe der idealen Gasgleichung ausgedrückt:

$$\dot{m}_1 = \frac{p_1 \cdot \dot{V}_1}{R \cdot T_1} = \frac{p_2 \cdot \dot{V}_2}{R \cdot T_2} = \dot{m}_2$$

$$\dot{V}_2 = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \dot{V}_1$$

$$\dot{V}_2 = \frac{7 \text{ bar}}{74 \text{ bar}} \cdot \frac{(32 + 273,15) \text{ K}}{(24 + 273,15) \text{ K}} \cdot 1200 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = 116,57 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

Wenn an der Messstation  $1200 \text{ m}^3$  pro Stunde durch die Pipeline strömen, dann verliert das Gas in den Kavernen  $116,57 \text{ m}^3$  pro Stunde. Die Massenströme sind jedoch an den Positionen 1 und 2 gleich.





## 56 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 7.13: Wie schnell lässt sich ein Schwimmbecken füllen?

Der zuströmende Massenstrom  $\dot{m}$  dient nur zum Auffüllen des Beckens.

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

$$\rho \cdot \dot{V} = \frac{d(\rho \cdot V)}{dt} = \rho \frac{d(L \cdot B \cdot T)}{dt}$$

Die Dichte des inkompressiblen Wassers ist konstant und kann gekürzt werden. Auch Länge und Breite ändern sich nicht, wenn die zufließende Wassermenge den Boden des Pools bedeckt; sie können aus der zeitlichen Ableitung herausgezogen werden. Nur die Tiefe  $T$  ist eine Funktion der Zeit  $t$ .

$$\dot{V} = L \cdot B \cdot \frac{dT}{dt}$$

Die Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels ist die Tiefenänderung mit der Zeit  $dT/dt$ .

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\dot{V}}{L \cdot B} = 0,140625 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

Die Tiefe am Ende der Füllzeit ist 1600 mm. Geschwindigkeit ist Tiefe pro Zeit. Dann folgt für die Zeit:

$$t = \frac{1600 \text{ mm} \cdot \text{s}}{0,140625 \text{ mm}} = 11377,7 \text{ s} = 189,63 \text{ min}$$

Alternativer Weg: Wenn zum Beispiel in fünf Minuten ein Volumen von  $5 \cdot 60 \cdot 4,5$  Liter gleich 1350 Liter im Becken ist, verteilt sich diese Menge am Grund des Beckens, und es stellt sich eine Tiefe des Wassers von  $T = 42,1875$  mm ein. Mithilfe der Dreisatzrechnung können Sie auf die Zeit zum Füllen von 189,63 Minuten schließen.

Nach 5 min ist die Tiefe  $T = 42,1875$  mm.

1 mm Tiefe stellt sich in  $\frac{5}{42,1875}$  min ein.

1600 mm Tiefe stellen sich in  $\frac{5 \cdot 1600}{42,1875}$  min ein.

Die Zeit bis zum randvollen Auffüllen beträgt 189,63 Minuten.

### Aufgabe 7.14: In welcher Zeit wird ein Trichter mit Wasser gefüllt?

Die zuständige Massenbilanz ist wegen des fehlenden Ausflussmassenstroms einfach:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

$$\rho \cdot \dot{V} = \frac{d(\rho \cdot V)}{dt}$$



## Lösungen und Lösungswege 57

Die Dichte ist konstant; für den Trichter gibt es aus der Geometrie eine Formel für sein Volumen.

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Weil sich aber mit der Zeit  $t$  das mit Wasser gefüllte momentane Trichtervolumen mit der Höhe  $h$  und dem Radius  $r$  ändert, ist das Wasservolumen im Trichter  $V$  eine Zeitfunktion.

$$V(t) = \frac{(r(t))^2 \cdot \pi \cdot h(t)}{3}$$

Die beschreibende Differenzialgleichung lautet jetzt:

$$\rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{(r(t))^2 \cdot \pi \cdot h(t)}{3} \right)$$

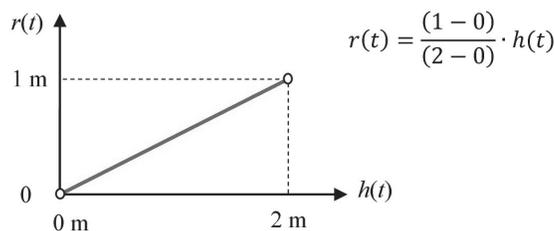
$$\dot{V} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{d}{dt} ((r(t))^2 \cdot h(t))$$

Der Radius  $r(t)$  hängt linear mit der Höhe  $h(t)$  zusammen, denn für  $t = 0$  Sekunden ist  $r = 0$  und  $h = 0$  und am Ende der Füllung, wenn  $t = t_E$  ist, betragen  $r(t_E) = 1$  m und  $h(t_E) = 2$  m.

Da die Beziehung  $r(t) = h(t)/2$  gilt, vereinfacht sich die Differenzialgleichung:

$$\dot{V} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{h^2(t)}{4} \cdot h(t) \right)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{d}{dt} (h^3(t))$$



**Abbildung 5:** Die lineare Funktion  $r(h(t))$  des Trichters.

Es ist eine gewöhnliche Differenzialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Höhe des Wasserkegels  $h(t)$  entstanden.

$$\frac{dh^3(t)}{dt} = \frac{12 \cdot \dot{V}}{\pi}$$

Die mathematische Lösung dieser Differenzialgleichung erhalten Sie etwas einfacher, wenn zum Beispiel die Umformung

$$3 \cdot h^2(t) \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \frac{12 \cdot \dot{V}}{\pi}$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi} \cdot \frac{1}{h^2(t)}$$



## 58 Lösungen und Lösungswege

vorgenommen wird. Die allgemeine Integration ergibt:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{12 \cdot \dot{V} \cdot \pi^2 \cdot t + C \cdot \pi^3}$$

Durch die Anfangsbedingung  $h(t = 0) = 0$  verschwindet die Integrationskonstante  $C$ , die Wasserhöhe  $h(t)$  folgt der Gleichung:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{12 \cdot \dot{V} \cdot \pi^2 \cdot t}$$

Berechnen Sie jetzt die Füllzeit  $t = t_E$ , die sich einstellt, wenn die Wasserhöhe  $h = 2$  m erreicht ist.

$$h(t = t_E) = 2 \text{ m} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{12 \cdot \dot{V} \cdot \pi^2 \cdot t_E}$$

$$t_E = \frac{2^3 \cdot \text{m}^3 \cdot \pi^3}{12 \cdot \dot{V} \cdot \pi^2} = \frac{8 \cdot \text{m}^3 \cdot \pi \cdot \text{min}}{12 \cdot 8 \cdot \text{Liter}} = \frac{1000 \cdot \pi}{12} \text{ min} = 261,8 \text{ min}$$

Innerhalb von 261,8 Minuten ist der Trichter mit Wasser gefüllt.

Alternative Rechnung: Wenn der Trichter randvoll ist, sind dort  $2,094395 \text{ m}^3$  Wasser vorhanden. Pro Minute sind  $8 \text{ Liter} = 0,008 \text{ m}^3$  Wasser geflossen. Um einen Kubikmeter Wasser aufzufangen, ist die Zeit von  $1/0,008$  gleich 125 Minuten erforderlich. Für das Volumen von  $2,094395 \text{ m}^3$  Wasser sind somit 261,8 Minuten nötig.

Warum haben wir dann die Rechnung über die Differenzialgleichung gemacht? Weil die Zusatzfrage hinsichtlich der Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels im Trichter noch nicht beantwortet ist. Der Anstieg des Wassersiegels pro Zeiteinheit ist  $dh(t)/dt$ . Mithilfe der Differenzialgleichung wurde  $h(t)$  bereits ermittelt.

$$\frac{d(h(t))}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{12 \cdot \dot{V} \cdot \pi^2 \cdot t} \right)$$

$$\frac{d(h(t))}{dt} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\dot{V} \cdot \pi \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{(\dot{V} \cdot \pi^2 \cdot t)^2}}$$

Mit  $\dot{V} = 0,008 \text{ m}^3/\text{min}$  folgt die Funktion der Wasserspiegeländerung  $dh/dt$  im Trichter.

$$\frac{d(h(t))}{dt} = \frac{0,10421}{\left[ \left( \frac{t}{\text{min}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Zum Beispiel ist die Pegelgeschwindigkeit bei  $t = 5 \text{ min}$  gleich  $0,0356 \text{ m/min}$ .

### Aufgabe 8.1: Vergleichsrechnung zwischen realem und idealem Gas

1) Ideale Gasgleichung: Die Dichte ist der Kehrwert des spezifischen Volumens.

$$\rho = \frac{1}{v}$$



## Lösungen und Lösungswege 59

Aus der idealen Gasgleichung der Form

$$p \cdot v = R \cdot T$$

folgt für die gesuchte Dichte:

$$\rho = \frac{p}{R \cdot T} = \frac{40 \text{ bar} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{188,9 \text{ J} \cdot (273,15 + 40) \cdot \text{K}} \cdot \frac{100000 \cdot \text{J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} = 67,620 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

2) Aus der Realgasgleichung

$$p \cdot v = z(\text{CO}_2, p, \vartheta) \cdot R \cdot T$$

ergibt sich wieder mit  $\rho = \frac{1}{v}$ :

$$\rho = \frac{p}{z(\text{CO}_2, p, \vartheta) \cdot R \cdot T}$$

Der Realgasfaktor  $z$  ist aus Abbildung 8.7 zu ermitteln. Er beträgt bei 40 bar Druck und einer Temperatur von 40 °C genau  $z = 0,8$ . Die Dichte ist dann:

$$\rho = \frac{40 \text{ bar} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{0,8 \cdot 188,9 \text{ J} \cdot (273,15 + 40) \text{ K}} \cdot \frac{100000 \cdot \text{J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} = 84,525 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Der Unterschied zwischen dem richtigen Wert 84,525 kg/m<sup>3</sup> und dem falschen Wert von 67,620 kg/m<sup>3</sup> beträgt 16,905 kg/m<sup>3</sup>. Das entspricht einem prozentualen Fehler von + 24,9 %:  $100(84,525 - 67,620)/67,620 = 24,9 \%$ . Die mit der idealen Gasgleichung berechnete Dichte ist also um 24,9 % kleiner als die richtige Dichte aus der Realgasgleichung.

Zusatzfrage: Wie groß ist der Dichteunterschied von CO<sub>2</sub>, wenn das Gas unter einem Druck von 3 MPa und einer Temperatur von 10 °C steht und die Berechnungen erst mit der idealen Gasgleichung und dann mit der Realgasgleichung vorgenommen werden? Lösung: 25 %.

### Aufgabe 8.2: Den Druck in einem Behälter bestimmen

Das Behältervolumen ist bekannt, deshalb empfiehlt es sich, mit  $v = V/m$  das Volumen in der Realgasgleichung einzuführen. Aus  $p \cdot v = z(p, \vartheta) \cdot R \cdot T$  folgt dann:

$$p \cdot V = z(p, \vartheta) \cdot m \cdot R \cdot T$$

In der Aufgabenstellung gibt es zwei Luftzustände. Der Index 1 kennzeichnet den Zustand der Luft bei  $p_1 = 60 \text{ bar}$ ,  $\vartheta_1 = 0 \text{ °C}$ ,  $T_1 = 273,15 \text{ K}$ . Daraus lässt sich die Masse der Luft  $m$  im Behälter bestimmen.

$$m = \frac{p_1 \cdot V}{z(p_1, \vartheta_1) \cdot R \cdot T_1}$$

$$m = \frac{60 \text{ bar} \cdot 0,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{z(p_1, \vartheta_1) \cdot 287,1 \text{ J} \cdot 273,15 \text{ K}}$$

Den Realgasfaktor entnehmen Sie dem Diagramm in Abbildung 8.4. Die genaue Ablesung dort ergibt:

$$z(60 \text{ bar}, 0 \text{ °C}) = 0,977$$



## 60 Lösungen und Lösungswege

Somit folgt für die Masse  $m$ :

$$m = \frac{60 \text{ bar} \cdot 0,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{0,977 \cdot 287,1 \text{ J} \cdot 273,15 \text{ K}} \cdot \frac{100000 \text{ J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3}$$

Der zweite Bruch auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung ist für die Umrechnung von bar in  $\text{J}/\text{m}^3$  notwendig. Dieser Bruch ergibt die Zahl 1, weil  $100000 \text{ J} = 1 \text{ bar} \cdot 1 \text{ m}^3$  ist.

$$m = 31,324 \text{ kg}$$

Weil keine Luft entnommen wird, bleibt die Masse konstant. Der zweite Luftzustand, versehen mit dem Index 2, kennzeichnet die erwärmte Luft bei der Temperatur  $\vartheta_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Für diesen Luftzustand ist der Druck  $p_2$  im Behälter gesucht. Auch für den zweiten Zustand gilt wieder die Realgasgleichung.

$$p_2 \cdot V = z(p_2, \vartheta_2) \cdot m \cdot R \cdot T_2$$

$$p_2 = \left( \frac{m \cdot R \cdot T_2}{V} \right) \cdot z(p_2, \vartheta_2)$$

Die hier notwendige Virialgleichung  $z(p_2, \vartheta_2 = 20 \text{ }^\circ\text{C})$  ist als Polynom fünften Grades gegeben. Der Druck  $p$  im angegebenen Polynom ist  $p_2$ .

$$p_2 = \left( \frac{31,324 \text{ kg} \cdot 287,1 \text{ J} \cdot (273,15 + 20) \text{ K}}{0,4 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}} \right) \cdot z(p_2, \vartheta_2)$$

$$p_2 = \left( \frac{6590833,1 \cdot \text{J}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{100000 \text{ J}} \right) \cdot z(p_2, \vartheta_2)$$

$$p_2 = (65,9083 \text{ bar}) \cdot z(p_2, \vartheta_2)$$

Darin ist die dimensionslose Funktion

$$z(p_2, \vartheta_2) = 1,0 - 2,490067 \times 10^{-4} p_2 + 1,7837443 \times 10^{-6} p_2^2 + \dots + 3,635653 \times 10^{-12} p_2^5$$

das gegebene Polynom.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass  $(m \cdot R \cdot T_2 / V)$ , die erste Klammer in der Gleichung für  $p_2$ , die Einheit bar besitzt. Damit ist klar, dass der Druck  $p_2$  auch die Einheit bar bekommt. Darüber hinaus ist in Abbildung 8.4 der Druck auf der Abszisse in bar angegeben, deshalb beziehen sich alle dimensionslosen Realgasfaktoren  $z$  auf die Vorgabe eines Drucks in der Einheit bar. Die Zahl  $z(p_2, \vartheta_2)$  können Sie aus dem Diagramm leider nicht ablesen, denn der Druck  $p_2$  ist unbekannt. Sie gehen daher einen anderen Weg bei der Bestimmung des Drucks  $p_2$ . Sie verwenden die gegebene Virialgleichung. Insgesamt muss die Zahlenwertgleichung

$$p_2 = 65,9083 (1 - 2,4900671 \times 10^{-4} p_2 + 1,7837443 \times 10^{-6} p_2^2 + \dots + 3,635653 \times 10^{-12} p_2^5)$$

nach  $p_2$  aufgelöst werden, was analytisch nicht geht. Die Fixpunktmethode ist hierfür bestens geeignet, obwohl die Zahlenwertgleichung auch als Nullstellenproblem behandelt werden kann.

Fixpunktmethode: Bei dieser Methode muss in der zu lösenden Gleichung nur die unbekannte Größe, hier  $p_2$ , links vom Gleichheitszeichen alleine stehen, was hier zufällig der Fall ist. Rechts vom Gleichheitszeichen darf irgendein Ausdruck, also eine beliebige Funktion der



## Lösungen und Lösungswege 61

Unbekannten  $p_2$ , stehen. Um den Überblick zu behalten, geben Sie den linken und rechten Seiten neue Namen. Zum Beispiel:

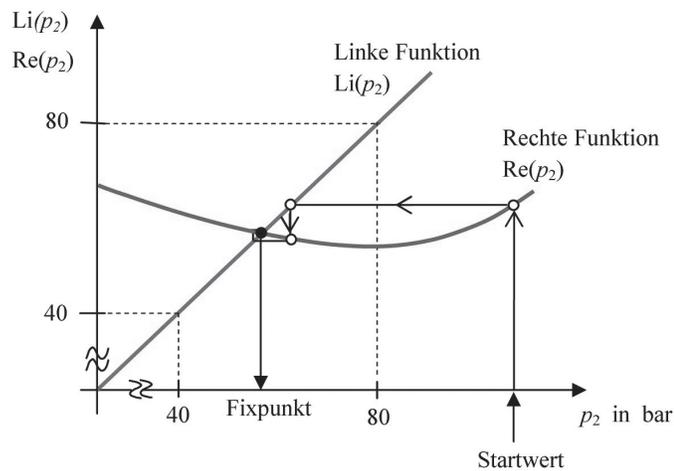
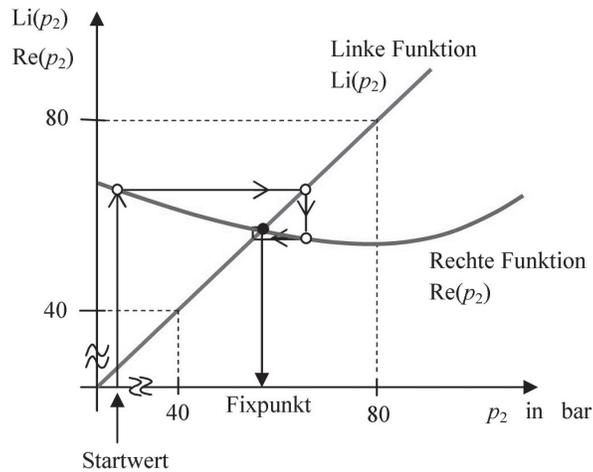
Linker Ausdruck:

$$\text{Li}(p_2) = p_2$$

Rechter Ausdruck:

$$\text{Re}(p_2) = 65,9083 (1 - 2,4900671 \times 10^{-4} p_2 + 1,7837443 \times 10^{-6} p_2^2 + \dots + 3,635653 \times 10^{-12} p_2^5)$$

Im nächsten Schritt werden beide Ausdrücke in einem gemeinsamen Diagramm mit der Abszisse Druck  $p_2$  in der festgelegten Einheit bar aufgenommen. Dabei kann Ihnen ein Computerprogramm nützlich sein.



**Abbildung 6:** Grafische Darstellung des Iterationsprozesses mit verschiedenen Startwerten



## 62 Lösungen und Lösungswege

Die linke Funktion  $Li$  ist immer eine Gerade mit dem Anstieg  $\tan(45^\circ)$ . Der Schnittpunkt zwischen  $Li$  und  $Re$  ergibt die gesuchte Lösung. Es können auch mehrere Schnittpunkte existieren, dann sind auch mehrere Lösungen möglich. In der Abbildung ist der Schnittpunkt der sogenannte Fixpunkt, der auf der Abszisse oder auf der Ordinate abgelesen werden kann. Für sehr grobe Berechnungen genügt die Ablesung aus der grafischen Darstellung. Jedoch soll hier der wirkliche Druck  $p_2$  mit einer Genauigkeit von einem Tausendstel Bar ermittelt werden. Das geschieht mittels eines Iterationsverfahrens, das immer aus der gleichen Prozedur besteht.

Sie suchen sich einen Startwert  $p_2$ , zum Beispiel schätzen Sie  $p_2 = 38$  bar. Dieser Wert wird als Argument in die rechte Funktion  $Re(p_2)$  eingesetzt und der sich ergebende Funktionswert muss mit dem Schätzwert verglichen werden. Nur ganz selten ist dann  $Li(p_2) = Re(p_2)$ , was schon die Lösung wäre! So viel Glück beim Schätzen haben die Wenigsten, deshalb folgen jetzt Iterationsschritte. Hierzu bitte nicht erneut schätzen, sondern mit dem Ergebnis  $Re(p_2)$  die Iterationsprozedur erfüllen. Das folgende Schema zeigt die einzelnen Schritte der Iteration.

Startwert:  $p_2 = 38$  (der Startwert ist immer eine Schätzung)

$$\begin{array}{l}
 \text{Es folgt:} \quad Li(p_2 = 38) = 38 \qquad Re(p_2 = 38) = 65,26915 \\
 \text{1. Iteration:} \quad Li(p_2 = 65,26915) = 65,26915 \quad Re(p_2 = 65,26915) = 65,01712 \\
 \text{2. Iteration:} \quad Li(p_2 = 65,01712) = 65,01712 \quad Re(p_2 = 65,01712) = 65,01812 \\
 \text{3. Iteration:} \quad Li(p_2 = 65,01812) = 65,01812 \quad Re(p_2 = 65,01812) = 65,01811 \\
 \text{4. Iteration:} \quad Li(p_2 = 65,01811) = 65,01811 \quad Re(p_2 = 65,01811) = 65,01811
 \end{array}$$

Nach vier Iterationen ist  $Li(p_2 = 65,018 \text{ bar}) = Re(p_2 = 65,018 \text{ bar}) = 65,018 \text{ bar}$ . Das ist die Lösung: Der Druck  $p_2$  steigt bei einer Temperaturerhöhung auf  $20^\circ\text{C}$  auf den Wert  $p_2 = 65,018$  bar. Das Sicherheitsventil am Behälter öffnet nicht bei der Temperatur von  $20^\circ\text{C}$ .

Wenn Sie mögen, können Sie die einzelnen Iterationsschritte in der Abbildung nachvollziehen und feststellen, dass der Schnittpunkt sozusagen von den einzelnen Iterationsschritten umfahren wird, bis schließlich bei der vierten Iteration der Schnittpunkt mit der geforderten Genauigkeit erreicht ist. Bitte versuchen Sie eine neue Berechnung mit einem anderen Startwert als 38 bar. Sie werden sehen, 65,018 bar wird wieder die Lösung sein.

### Aufgabe 8.3: Den Stoffstrom durch eine Gasleitung berechnen

Der Massenstrom wird mithilfe der Realgasgleichung bestimmt.

$$p \cdot \dot{V} = z \cdot \dot{m} \cdot R_{\text{CH}_4} \cdot T$$

Die spezielle Gaskonstante erhalten Sie aus Tabelle 3.1, der Realgasfaktor  $z$  wird zwischen den Kurven aus Abbildung 8.6 linear interpoliert.



## Lösungen und Lösungswege 63

Bei  $p = 0$  bar beträgt der Realgasfaktor  $z = 1,0$ . Bei  $p = 40$  bar ist  $z = 0,94$ . Die lineare Interpolation ergibt:  $z = 1 - 15(1 - 0,94)/40 = 0,978$ .

$$R_{\text{CH}_4} = 518,2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad z = 0,978$$

Aus der Realgasgleichung (Zustandsgleichung) folgt:

$$\dot{m} = \frac{p \cdot \dot{V}}{z \cdot R_{\text{CH}_4} \cdot T}$$

$$\dot{m} = \frac{15 \text{ bar} \cdot 12,670 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{h} \cdot 0,978 \cdot 518,2 \text{ J} \cdot (273,15 + 25) \text{ K}} = 0,00125776 \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}}{\text{h} \cdot \text{J}}$$

$$\dot{m} = 0,00125776 \frac{10^5 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{h} \cdot \text{J}} = 125,776 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

Der wirkliche Massenstrom in der Versorgungsleitung beläuft sich auf 125,776 kg pro Stunde.

Die Dichtebestimmung des Gases erfolgt mit der Gleichung

$$\rho = \frac{\dot{m}}{\dot{V}}$$

$$\rho = \frac{125,776 \text{ kg} \cdot \text{h}}{12,670 \text{ m}^3 \cdot \text{h}} = 9,927 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Der Stoffmengenstrom  $\dot{n}$  kann zum Beispiel die Einheit kmol/h besitzen. Damit ist die pro Zeiteinheit (1 Stunde) durch die Leitung strömende Stoffmenge  $n$  gemeint. Die einfachste Bestimmung des Stoffmengenstroms erfolgt mit der Formel:

$$\dot{n} = \frac{\dot{m}}{(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4}}$$

wobei  $m_{\text{Mol}}$  die Molmasse von  $\text{CH}_4$  ist. Sie kann aus Tabelle 3.2 entnommen werden oder mithilfe der relativen Atommassen aus dem Periodensystem der Elemente nachträglich errechnet werden.

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4} = 1 \cdot (m_{\text{Mol}})_{\text{C}} + 4 \cdot (m_{\text{Mol}})_{\text{H}_4}$$

$$(m_{\text{Mol}})_{\text{CH}_4} = 1 \cdot 12,011 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} + 4 \cdot 1,0079 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}} = 16,043 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

Der Stoffmengenstrom beläuft sich auf:

$$\dot{n} = \frac{125,776 \frac{\text{kg}}{\text{h}}}{16,043 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 7,84 \frac{\text{kmol}}{\text{h}}$$

Alternativ können Sie auf die Gleichung  $p \cdot \dot{V} = z \cdot \dot{n} \cdot \mathfrak{R} \cdot T$  ausweichen, wobei  $\mathfrak{R}$  die universelle Gaskonstante ist.



## 64 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 8.4: Wirkliche Dichteänderung eines strömenden Gases

Teil a) Methan sei ein ideales Gas. Der Massenstrom  $\dot{m}_1$  an der Stelle 1 ist bekannt, also gilt die ideale Gasgleichung der vierten Form an jeder Position.

$$p_1 \cdot \dot{V}_1 = \dot{m}_1 \cdot R \cdot T_1$$

Die Dichte des Gases an der Position 1 ist:

$$\rho_1 = \frac{\dot{m}_1}{\dot{V}_1} = \frac{p_1}{R \cdot T_1} = \frac{20 \text{ bar}}{518,2 \text{ J} \cdot (\frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{(273,15 - 25)\text{K}} \cdot \frac{10^5 \text{ J}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3})} = 15,553 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Aus der Gasgleichung kann der Volumenstrom an der Position 2 berechnet werden.

$$p_2 \cdot \dot{V}_2 = \dot{m}_2 \cdot R \cdot T_2$$

Wegen der Massenerhaltung pro Zeiteinheit (Kontinuitätsgleichung) gilt  $\dot{m}_1 = \dot{m}_2$  und infolge der reibungsfreien Strömung ist  $p_1 = p_2$ .

$$\dot{V}_2 = \frac{\dot{m}_1 \cdot R \cdot T_2}{p_1} = \frac{1,6 \text{ kg}}{\text{s}} \cdot \frac{518,2 \text{ J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \frac{(273,15 + 0) \text{ K}}{20 \text{ bar}}$$

$$\dot{V}_2 = 11 \, 323,71 \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{bar}} = 11 \, 323,71 \frac{\text{J} \cdot \text{m}^3}{\text{s} \cdot 10^5 \text{ J}} = 0,113 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rho_2 = \frac{\dot{m}_1}{\dot{V}_2} = \frac{1,6 \text{ kg} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 0,113 \text{ m}^3} = 14,159 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Teil b) Methangas wird durch die Realgasgleichung wirklichkeitsnäher beschrieben als mit der idealen Gasgleichung. Die wirkliche Dichte an der Stelle 1 ist berechenbar mit  $v = 1/\rho$  in Zusammenhang mit der Realgasgleichung.

$$p \cdot v = z(p, \vartheta) \cdot R \cdot T$$

$$p = \frac{1}{v} \cdot z(p, \vartheta) \cdot R \cdot T = \rho \cdot z(p, \vartheta) \cdot R \cdot T$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{z(p, \vartheta)_1 \cdot R \cdot T_1}$$

Sie benötigen den Realgasfaktor  $z_1$  für den Gaszustand 1 mit  $p_1 = 20 \text{ bar}$  und  $\vartheta_1 = -25 \text{ °C}$ . In Abbildung 8.6 lässt sich aus dem Diagramm der Realgasfaktor  $z_1 = 0,937$  ablesen.

$$\rho_1 = \frac{20 \text{ bar} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{0,937 \cdot 518,2 \text{ J} \cdot (273,15 - 25) \text{ K}} = 0,00016599 \frac{\text{bar} \cdot \text{kg}}{\text{J}}$$

Die Umrechnung der Einheiten von bar in Joule J gelingt mit der Beziehung  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ J/m}^3$ .

$$\rho_1 = 0,00016599 \frac{10^5 \cdot \text{J} \cdot \text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{J}} = 16,599 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Diese Dichte ist realistisch. Der prozentuale Fehler gegenüber dem Ergebnis aus der idealen Gasgleichung beträgt  $-6,3 \%$ .

$$\text{Dichtefehler} = 100 \frac{(15,553 - 16,599)}{16,599} \% = -6,3 \%$$



## Lösungen und Lösungswege 65

Die Dichteberechnung mithilfe der idealen Gasgleichung fällt 6,3 Prozent geringer aus verglichen mit der berechneten Dichte aus der Realgasgleichung.

Wie groß ist der wirkliche Volumenstrom an der Stelle 2? Die mit dem Realgasfaktor  $z$  modifizierte vierte Form der idealen Gasgleichung lautet:

$$p \cdot \dot{V} = z(p, \vartheta) \cdot \dot{m} \cdot R \cdot T$$

Deshalb gilt an der Position 2 (Gaszustand 2):

$$p_2 \cdot \dot{V}_2 = z(p, \vartheta)_2 \cdot \dot{m}_2 \cdot R \cdot T_2$$

Mit  $p_2 = p_1$  (reibungsfreie Strömung) und mit  $\dot{m}_2 = \dot{m}_1$  (Kontinuitätsgleichung) lässt sich der Volumenstrom bestimmen, wenn vorher der Realgasfaktor an der Stelle 2 aus dem Diagramm abgelesen wird.

$$z(p, \vartheta)_2 = z(p_2 = 20 \text{ bar}, \vartheta_2 = 0 \text{ °C}) = 0,958$$

$$\dot{V}_2 = \frac{z(p, \vartheta)_2 \cdot \dot{m}_1 \cdot R \cdot T_2}{p_1}$$

$$\dot{V}_2 = 0,958 \left( \frac{\dot{m}_1 \cdot R \cdot T_2}{p_1} \right) = 0,958 \cdot 0,113 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 0,108 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Die runde Klammer ist das Ergebnis aus dem ersten Teil ( $\dot{V}_2$ -Lösung). Der Volumenstrom  $0,108 \text{ m}^3/\text{s}$  ist sehr realistisch, da der Realgasfaktor aus genauen Messungen stammt. Der prozentuale Unterschied zum Ergebnis im Teil a beträgt für den Volumenstrom  $\dot{V}_2$  etwa  $+4,6 \%$ .

Die Dichte  $\rho_2$  an der Position 2 in der Versorgungsleitung ändert sich infolge der Wärmeaufnahme in der Rohrleitung.

$$\rho_2 = \frac{\dot{m}_2}{\dot{V}_2} = \frac{\dot{m}_1}{\dot{V}_2} = \frac{1,6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}{0,108 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 14,815 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Methan ist gegenüber der Position 1 leichter geworden, weil seine Temperatur bei einer isobaren Strömungsbewegung gestiegen ist.

### Aufgabe 9.1: Druckänderung eines idealen Gases infolge einer Temperatur- und Volumenänderung

Gesucht wird das totale Differenzial  $dp$  des Gases, das der idealen Gasgleichung  $p \cdot v = R \cdot T$  folgt. Die spezielle Gaskonstante ist konstant. Wenn Sie die Gasgleichung nach  $p$  umstellen, ist  $p$  eine Funktion der unabhängigen Variablen  $v$  und  $T$ .

$$p = \frac{R \cdot T}{v} \rightarrow p = f(v, T)$$

Das totale Differenzial der Funktion  $p = p(v, T)$  lautet:

$$dp = \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_T \cdot dv + \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \cdot dT$$



## 66 Lösungen und Lösungswege

Nebenrechnungen:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{R \cdot T}{v}\right) = R \cdot T \cdot \frac{-1}{v^2}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R \cdot T}{v}\right) = \frac{R}{v}$$

Somit folgt:

$$dp = \frac{-R \cdot T}{v^2} \cdot dv + \frac{R}{v} dT$$

Kennt man die Anfangstemperatur  $T$ , die Temperaturänderung  $dT$ , das spezifische Volumen am Anfang der Zustandsänderung  $v$  und die Änderung  $dv$ , so folgt aus dem totalen Differenzial die Druckänderung  $dp$ . Natürlich sollen die Änderungen  $dv$  und  $dT$  klein sein, damit der Gesamtfehler als vernachlässigbar akzeptiert werden kann.

### Aufgabe 9.2: Volumenänderung eines Van-der-Waals-Gases infolge einer Temperaturänderung

Gesucht wird die Ableitung  $dV(T)/dT$  eines beliebigen Van-der-Waals-Gases, das allgemein der Zustandsgleichung

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$

folgt. Der universelle Zusammenhang fordert, dass als Ausgangsbasis eine implizite Zustandsgleichung vorliegen muss. Diese muss zunächst formuliert werden.

$$f(p, V, T) = \left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) - n \cdot \mathfrak{R} \cdot T = 0$$

Für jedes bestimmte Van-der-Waals-Gas sind die Größen  $a$ ,  $b$  und auch die universelle Gaskonstante  $\mathfrak{R}$  konstant. Die Größe  $n$  ist die Stoffmenge des Gases und die soll ebenfalls konstant bleiben. Bestimmen Sie die Volumenänderung  $dV$ , wenn sich die Temperatur um  $dT$  ändert und der Druck  $p$  konstant bleibt.

Gesucht wird  $(dV(T)/dT)_p$  und diese partielle Ableitung ist in der Gleichung des universellen Zusammenhangs aufgeführt.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp(V)}{dV}\right)_T \cdot \left(\frac{dT(p)}{dp}\right)_v \cdot \left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p &= -1 \\ \left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p &= \frac{-1}{\left(\frac{dp(V)}{dV}\right)_T \cdot \left(\frac{dT(p)}{dp}\right)_v} \\ \left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p &= \frac{-1}{\left(\frac{-\frac{\partial}{\partial V} f(V, p(V))}{\frac{\partial}{\partial p} f(V, p(V))}\right)_T \cdot \left(\frac{-\frac{\partial}{\partial p} f(p, T(p))}{\frac{\partial}{\partial T} f(p, T(p))}\right)_V} \end{aligned}$$



## Lösungen und Lösungswege 67

Beginnen Sie mit der Bildung der vier Ableitungen in der impliziten Form, die danach in die vorstehende Gleichung einzusetzen sind.

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} f(V, p(V))\right)_T = \frac{-2 \cdot a \cdot n^2 \cdot (V - n \cdot b)}{V^3} + p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} f(V, p(V))\right)_T = V - b \cdot n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} f(V, p(V))\right)_V = V - b \cdot n$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} f(V, p(V))\right)_V = -n \cdot \mathfrak{R}$$

Die gesuchte Ableitung lautet:

$$\left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p = \frac{-1}{\left[\frac{-\left(\frac{-2 \cdot a \cdot n^2 \cdot (V - b \cdot n)}{V^3} + p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right)}{V - b \cdot n}\right] \cdot \left(\frac{V - b \cdot n}{n \cdot \mathfrak{R}}\right)}$$

$$\left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V^3}{2 \cdot n^3 \cdot a \cdot b - a \cdot n^2 \cdot V + p \cdot V^3}$$

Im letzten Schritt wird die universelle Gaskonstante durch die Einführung der Van-der-Waals-Zustandsgleichung ersetzt, um die Temperatur in der Gleichung zu haben.

$$\left(\frac{dV(T)}{dT}\right)_p = \frac{p \cdot V^4 - n \cdot p \cdot b \cdot V^3 + a \cdot n^2 \cdot V^2 - a \cdot n^3 \cdot b \cdot V}{T \cdot (2 \cdot n^3 \cdot a \cdot b - a \cdot n^2 \cdot V + p \cdot V^3)}$$

Möchte man wissen, wie sich das Volumen eines Van-der-Waals-Gases infolge einer Temperaturerhöhung bei konstantem Druck ändert, so lässt sich mit  $dV(T)/dT$  die Änderung des Volumens berechnen.

### Aufgabe 9.3: Messfehler mit totalen Differenzialen abschätzen

Aus Kapitel 6 übernehmen Sie die Formel für die Dichte der Münze.

$$\rho_{\text{Münze}} = \rho_W \cdot \frac{M_1}{M_1 - M_2}$$

Die Dichte der Münze hängt von der Dichte des Wassers und von den Messungen  $M_1$  und  $M_2$  ab. Das sind die unabhängigen Größen, sodass man schreiben kann:

$$\rho_{\text{Münze}} = f(\rho_W, M_1, M_2)$$

Das totale Differenzial kann daraufhin leicht angegeben werden.

$$d\rho_{\text{Münze}} = \frac{\partial f}{\partial \rho_W} \cdot d\rho_W + \frac{\partial f}{\partial M_1} \cdot dM_1 + \frac{\partial f}{\partial M_2} \cdot dM_2$$

Die Funktion  $f$  ist hier  $f = \rho_W \cdot \frac{M_1}{M_1 - M_2}$ .



## 68 Lösungen und Lösungswege

In der Fachsprache werden die drei partiellen Ableitungen als Empfindlichkeiten der Funktion hinsichtlich der Variablen bezeichnet. Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \rho_W} &= \frac{M_1}{M_1 - M_2} \\ \frac{\partial f}{\partial M_1} &= \frac{\rho_W}{M_1 - M_2} - \frac{\rho_W \cdot M_1}{(M_1 - M_2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial M_2} &= \frac{\rho_W \cdot M_1}{(M_1 - M_2)^2}\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Grundform des totalen Differenzials ergibt sich:

$$d\rho_{\text{Münze}} = \frac{M_1 \cdot d\rho_W}{M_1 - M_2} - \frac{\rho_W \cdot M_2 \cdot dM_1}{(M_1 - M_2)^2} + \frac{\rho_W \cdot M_1 \cdot dM_2}{(M_1 - M_2)^2}$$

Die Differenziale  $d\rho_W$ ,  $dM_1$ ,  $dM_2$  sind die zufälligen Fehler, die durch zufällig vorhandene Einwirkungen entstehen und deshalb eine statistische Bedeutung haben. Solche Fehler sind Ablesefehler bei Anzeigen, die nicht vermeidbar sind und geschätzt werden müssen. Sie schätzen also, dass die Dichte des Wassers mit einem Fehler von  $0,004 \text{ kg/m}^3$  behaftet ist. Dann wäre  $d\rho_W = 0,004 \text{ kg/m}^3$ . Sie vermuten, dass bei den Gewichtsbestimmungen der Münze in der Luft der Ablesefehler von  $dM_1 = \pm 0,01 \text{ N}$  und bei der Messung vom  $M_2$  in Wasser der Fehler  $dM_2 = 0,005 \text{ N}$  beträgt. Der maximale Fehler bewegt sich in einem gewissen Bereich, der durch das totale Differenzial so angegeben wird:

$$|d\rho_{\text{Münze}}| = \frac{M_1}{M_1 - M_2} \cdot |d\rho_W| + \frac{\rho_W \cdot M_2}{(M_1 - M_2)^2} \cdot |dM_1| + \frac{\rho_W \cdot M_1}{(M_1 - M_2)^2} \cdot |dM_2|$$

Es werden Beträge bei den zufälligen Fehlern eingeführt und alle Glieder zusammengezählt, um den maximalen Gesamtfehler  $|d\rho_{\text{Münze}}|$  angeben zu können, mit dem die Messungen behaftet sind. Für die Dichte der Münze gilt dann:

$$\rho_{\text{Münze}} = \rho_W \cdot \frac{M_1}{M_1 - M_2} \pm |d\rho_{\text{Münze}}|$$

Falls sichergestellt ist, dass die Dichte des verwendeten Wassers exakt bekannt ist, dann ist  $d\rho_W = 0$ . Der Gesamtfehler fällt geringer aus, nämlich:

$$|d\rho_{\text{Münze}}| = \rho_W \cdot \frac{M_2 \cdot |dM_1| + M_1 \cdot |dM_2|}{(M_1 - M_2)^2}$$

Neben zufälligen Fehlern gibt es noch systematische Fehler, die durch erkennbare einseitige Messabweichungen bei mehreren Messungen entstehen und deshalb vermeidbar sind.

### Aufgabe 9.4: Die Änderung der inneren Energie eines Van-der-Waals-Gases infolge einer Verdichtung des Gases

Sie haben bereits im Beispiel in Kapitel 9 die Formel für die differenzielle Änderung der spezifischen inneren Energie kennengelernt:

$$du = c_v \cdot dT + \left( T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) \cdot dv$$



## Lösungen und Lösungswege 69

Jetzt muss die Gleichung nur noch auf das Van-der-Waals-Gas angewendet werden. Hierzu ist die Van-der-Waals-Zustandsgleichung notwendig, denn der Gradient  $\partial p/\partial T$  lässt sich nur aus der entsprechenden expliziten Gasgleichung bestimmen.

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - b \cdot n) = n \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$

Zuerst sollten Sie mit der gegebenen Masse  $m = 0,4 \text{ kg}$  die Stoffmenge  $n$  des Argons bestimmen.

$$n = \frac{m}{m_{\text{Mol}}} = \frac{0,4 \text{ kg}}{39,948 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = 0,01001 \text{ kmol}$$

Zudem ist es vorteilhaft, die Gasgleichung nach  $p$  aufzulösen, sodass Sie die Ableitung  $\partial p/\partial T$  berechnen können.

$$p = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot T}{(V - b \cdot n)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{n \cdot \mathfrak{R}}{(V - b \cdot n)}$$

Berechnen Sie jetzt den Ausdruck  $\left(T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right) - p\right)$ .

$$T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot T}{(V - b \cdot n)}$$

$$T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} - p = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot T}{(V - b \cdot n)} - \left(\frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot T}{(V - b \cdot n)} - \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right)$$

$$T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} - p = \frac{a \cdot n^2}{V^2}$$

Eingesetzt in die Gleichung für die differenzielle innere Energie  $du$  ergibt sich:

$$du = c_v \cdot dT + \left(\frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot dv$$

Zwischen dem Volumen  $V$  und dem spezifischen Volumen  $v$  gilt die Beziehung:

$$v = \frac{V}{m}$$

Daraus folgt mit  $m = \text{konstant}$ :

$$dv = \frac{1}{m} dV$$

Schließlich liefert die Integration vom Anfangszustand 1 bis zum Endzustand 2 die gesuchte spezifische innere Energieänderung  $u_2 - u_1$ .

$$\int_1^2 du = \int_1^2 c_v \cdot dT + \int_1^2 \frac{a \cdot n^2}{m \cdot V^2} dV$$



## 70 Lösungen und Lösungswege

Mit  $n = m/m_{\text{Mol}}$  und  $c_v = \text{konstant}$  folgt weiter:

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) + \frac{a \cdot m}{(m_{\text{Mol}})^2} \cdot \left( \frac{V_2 - V_1}{V_1 \cdot V_2} \right)$$

$$u_2 - u_1 = 0,3122 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 52 \text{ K} \\ + 1,355 \frac{\text{bar} \cdot \text{dm}^6}{\text{mol}^2} \cdot \frac{0,4 \text{ kg} \cdot \text{kmol}}{39,948 \text{ kg}} \cdot \left( \frac{0,05 - 0,08}{0,05 \cdot 0,08} \right) \frac{\text{m}^3}{\text{m}^6}$$

$$u_2 - u_1 = 15,9797 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$U_2 - U_1 = m \cdot (u_2 - u_1) = 0,4 \text{ kg} \cdot 15,9797 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 6,3919 \text{ kJ}$$

Der erste Term  $c_v \cdot (T_2 - T_1)$  ergibt 16,2344 kJ/kg und für  $\frac{a \cdot m}{(m_{\text{Mol}})^2} \cdot \left( \frac{V_2 - V_1}{V_1 \cdot V_2} \right)$  erhalten Sie nur -0,2547 kJ/kg. Auf die Einheit kJ/kmol umgerechnet folgt für  $u_2 - u_1$ :

$$u_2 - u_1 = 15,9797 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot m_{\text{Mol}} = 638,357 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}$$

Sie haben bestimmt erkannt, dass Druckangaben für die Berechnung der inneren Energieänderung nicht notwendig sind.

### Aufgabe 9.5: Die spezifische innere Energieänderung eines idealen Gases bestimmen

Verwenden Sie die Formel aus Aufgabe 9.4 und finden Sie heraus, warum für ein ideales Gas die Größe  $du = c_v \cdot dT$  ist. Die universelle Gleichung für die allgemeine Änderung der inneren Energie eines beliebigen realen oder idealen Gases ist:

$$du = c_v \cdot dT + \left( T \cdot \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) \cdot dv$$

Im Falle eines idealen Gases vereinfacht sich diese Gleichung erheblich. Die ideale Gasgleichung lautet:

$$p \cdot v = R \cdot T$$

Sie benötigen die Änderung des Drucks infolge einer Änderung der Temperatur, also  $\partial p / \partial T$ . Aus der idealen Gasgleichung folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$$

Diesen Ausdruck können Sie in die Gleichung für  $du$  einsetzen.

$$du = c_v \cdot dT + \left( T \cdot \frac{R}{v} - p \right) \cdot dv$$





## Lösungen und Lösungswege 71

Sofort erkennen Sie, dass  $T \cdot R/v$  nichts anderes ist als der Druck  $p$  aus der idealen Gasgleichung. Die Klammer verschwindet, und das Ergebnis für alle idealen Gase ist:

$$du = c_v \cdot dT$$

Bei kleinen Temperaturänderungen (bis etwa 80 °C Temperaturunterschied) können Sie  $c_v$  als Konstante behandeln, bei größeren Unterschieden zwischen Anfangs- und Endzustand ist  $c_v = c_v(T)$  jedoch eine Funktion der Temperatur. In der gegebenen Aufgabe ist die Wärmekapazität bei konstantem Volumen konstant. Die Integration liefert:

$$\int_1^2 du = \int_1^2 c_v \cdot dT$$

$$u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1) = 34,60 \text{ kJ/kg}$$

$$U_2 - U_1 = m \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1) = 12,11 \text{ kJ}$$

Mit den gegebenen Daten erhalten Sie:  $(u_2 - u_1) = 34,60 \text{ kJ/kg}$  und  $(U_2 - U_1) = 12,11 \text{ kJ}$ . Die spezifische innere Energie, also der spezifische Energieinhalt des idealen Gases, hat während des Verdichtungsprozesses um 34,6 kJ/kg zugenommen, weil  $u_2$  größer ist als  $u_1$ . Absolut gesehen sind nach Erreichen des Endzustands im Gas 12,11 kJ Energie mehr gespeichert als zu Beginn des Verdichtungsprozesses.

## Aufgabe 10.1: Industrieller Luftherhitzer

Leistungsdaten (88 W und 800 W) zeigen an, dass der erste Hauptsatz als Leistungsbilanz benutzt werden muss. Die Systemgrenze ist die innere Oberfläche des Kanals. Die Anpassung des Hauptsatzes an das System ergibt:

$$(q_{irr})_{12} = 0 \quad \text{Wärmedämmung}$$

$$\dot{m} \cdot (w_t)_{12} = (P_{el})_1 + (P_{el})_2$$

$$\dot{m} \cdot (w_R)_i = 0 \quad \text{aufgrund der reibungsfreien Strömung}$$

$$z_2 = z_1 \quad \text{horizontaler Kanal}$$

In der Leistungsbilanz verbleiben nur die folgenden Glieder:

$$(P_{el})_1 + (P_{el})_2 = \dot{m} \cdot (h_2 - h_1) + \dot{m} \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) \quad \text{1. Hauptsatz als Leistungsbilanz}$$

In der spezifischen Enthalpie  $h_2$  ist die gesuchte Temperatur  $T_2$  verborgen. Die zweite Unbekannte ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $c_2$  am Austritt des Kanals. Aufgrund der Annahme, Luft sei ein ideales Gas, gilt:

$$h_2 - h_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$





## 72 Lösungen und Lösungswege

Die Kontinuitätsgleichung liefert zusammen mit der idealen Gasgleichung den Massenstrom.

$$\rho_1 \cdot c_1 \cdot A = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A \quad \rightarrow \quad c_2 = c_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A \quad \text{und} \quad \rho_1 = \frac{p}{R \cdot T_1} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \frac{p}{R \cdot T_2}$$

Werden diese Beziehungen im 1. Hauptsatz berücksichtigt, entsteht die folgende Gleichung für  $T_2$ , in der alle gegebenen Größen vorkommen.

$$\frac{((P_{el})_1 + (P_{el})_2) \cdot 2}{\rho_1 \cdot c_1 \cdot A} + 2 \cdot c_p \cdot T_1 + c_1^2 = 2 \cdot c_p \cdot T_2 + c_1^2 \underbrace{\left( \frac{\rho_1^2 \cdot R^2 \cdot T_2^2}{p^2} \right)}_{(T_2/T_1)^2}$$

Entstanden ist eine quadratische Gleichung für  $T_2$ , die nur eine reelle Lösung besitzt. Die einzelnen Terme sind:

$$\rho_1 = \frac{p}{R \cdot T_1} = 1,20878 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$2 \cdot \frac{(P_{el})_1 + (P_{el})_2}{\rho_1 \cdot c_1 \cdot A} = 54416,551 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

$$2 \cdot c_p \cdot T_1 + c_1^2 = 579181,5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} + 36 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$2 \cdot c_p \cdot T_2 = 2010 \cdot T_2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$c_1^2 \left( \frac{\rho_1^2 \cdot R^2 \cdot T_2^2}{p^2} \right) = 4,3357602 \times 10^{-4} \cdot T_2^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{K}^2}$$

Da die Einheit  $\text{m}^2/\text{s}^2$  gleich  $\text{J}/\text{kg}$  ist, muss die gesuchte Temperatur die Einheit Kelvin haben. Eine Zahlenwertgleichung für  $T_2$  ist entstanden.

$$544416,551 + 579181,5 + 36 = 2010 \cdot T_2 \frac{1}{\text{K}} + 4,3357602 \times 10^{-4} \cdot T_2^2 \frac{1}{\text{K}^2}$$

Um eine reine Zahlenwertgleichung zu bekommen, ist folgender Ansatz üblich:

$$T_2 = x \cdot \text{K}$$

$$544416,51 + 579181,5 + 36 = 2010 \cdot x + 4,3357602 \times 10^{-4} \cdot x^2$$

Die Gleichung ist erfüllt für  $x = 315,219$ . Somit ist die Temperatur am Kanalende  $T_2 = 315,22 \text{ K}$ , was etwa einer Temperatur von  $\vartheta_2 = 42 \text{ }^\circ\text{C}$  entspricht. Am Kanalende ist die Dichte der Luft  $\rho_2 = 1,10498 \text{ kg}/\text{m}^3$ , die mittlere Strömungsgeschwindigkeit  $c_2 = 6,563 \text{ m}/\text{s}$  und der Volumenstrom beträgt  $\dot{V}_2 = 0,0295 \text{ m}^3/\text{s}$ . An der Stelle 1 ist der Volumenstrom infolge der kleineren Geschwindigkeit etwas kleiner:  $\dot{V}_1 = 0,027 \text{ m}^3/\text{s}$ . Allerdings beträgt der gerundete Massenstrom an jeder Stelle im Kanal  $\dot{m} = 0,03264 \text{ kg}/\text{s}$ .





## Aufgabe 10.2: Wasserturbine

Unter der Annahme, dass nur die Leistung der potenziellen Energie des Wassers zur Verfügung steht, folgt aus dem 1. Hauptsatz:

$$\underbrace{(\dot{W}_t)_{12}}_{1 \text{ MW}} + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^I (\dot{W}_R)_i \right)_{12}}_{15000 \text{ W}} = \dot{m} \cdot g \cdot \underbrace{(z_2 - z_1)}_{100 \text{ m}}$$

Der Massenstrom wird gesucht.

$$\dot{m} = \frac{10^6 \text{ W} + 15000 \text{ W}}{g \cdot (z_2 - z_1)}$$

$$\dot{m} = \frac{1015000 \text{ W} \cdot \text{s}^2}{9,81 \text{ m} \cdot 100 \text{ m}} = 1034,658 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = 1034,658 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Angenommen, die Dichte des Wassers ist  $1000 \text{ kg/m}^3$ , dann verlässt ein Volumenstrom von etwa  $1,0347 \text{ m}^3$  Wasser pro Sekunde die Turbinenaustrittsöffnung.

## Aufgabe 10.3: Die Reibungsarbeit in einer Strömung ermitteln

Der erste Hauptsatz für dieses offene System vereinfacht sich etwas, weil das Fluid keine technische Arbeit (keine Pumpe oder dergleichen ist vorhanden) leistet und kein irreversibler Wärmeaustausch vorliegt.

$$\underbrace{(q_{\text{irr}})_{12}}_{=0} + \underbrace{(w_t)_{12}}_{=0} + \left( \sum_{i=1}^I (w_R)_i \right)_{12} = (h_2 - h_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) + g \cdot (z_2 - z_1)$$

Wasser ist inkompressibel und infolge dessen bleibt die Dichte  $\rho$  und das spezifische Volumen  $v = 1/\rho$  konstant.

$$h_2 = c_p \cdot T + p_2 \cdot v \quad \text{und} \quad h_1 = c_p \cdot T + p_1 \cdot v$$

Eine Spiegelabsenkungsgeschwindigkeit an der Stelle 1 des großen Tanks gibt es nicht und infolge dessen ist  $c_1 = 0$ . An der Stelle 1 herrscht der Druck  $p_1 = 1 \text{ bar}$ . Mit den festen Abmessungen am Versuchsstand  $z_1 = 3,5 \text{ m}$ ,  $z_2 = 0,4 \text{ m}$ ,  $L = 4 \text{ m}$  können aus den beiden Gleichungen

$$\dot{V} = c_2 \cdot d^2 \cdot \pi / 4$$

$$\left( \sum_{i=1}^I (w_R)_i \right)_{12} = v \cdot (p_2 - p_1) + \frac{c_2^2}{2} + g \cdot (z_2 - z_1)$$





## 74 Lösungen und Lösungswege

die Größen  $c_2$  und die Reibungsarbeit bestimmt werden.

$$\left( \sum_{i=1}^I (w_R)_i \right)_{12} = \frac{1}{\rho} \cdot (p_2 - p_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot d^2} \right)^2 + g \cdot (z_2 - z_1)$$

$$\left( \sum_{i=1}^I (w_R)_i \right)_{12} = (9,2156 + 8,7204 - 30,441) \frac{\text{J}}{\text{kg}} = -12,505 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

Das Fluid verliert pro Kilogramm Wasserdurchsatz die Energie von 12,5 J zur Überwindung der Reibungseffekte am Einlauf zum waagerechten Rohr und im Rohr der Länge  $L = 4$  m. Würde man etwas entfernt vom Einlauf, dort, wo die Einlaufstörungen im Geschwindigkeitsprofil ausgeglichen sind, ein zweites Druckmessgerät im waagerechten Rohr anordnen, könnte man in neuen Versuchen den Reibungseffekt nur im Rohr zwischen den Drucksensoren ermitteln.

### Aufgabe 10.4: Die Leistung einer Wasserpumpe berechnen

Es handelt sich um ein offenes System. Die Systemgrenze beginnt am Wasserspiegel 1 im unteren Tank A, sie wird durch die vom Wasser benetzten Innenwände gebildet und endet am Wasserspiegelniveau 2 im oberen Tank B. Der erste Hauptsatz in integraler Form lautet allgemein:

$$\underbrace{(q_{\text{irr}})_{12}}_{=0} + (w_t)_{12} + \left( \sum_{i=1}^I (w_R)_i \right)_{12} = (h_2 - h_1) + \left( \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right) + g \cdot (z_2 - z_1)$$

Für jedes Medium gilt für die spezifische Enthalpie an den Stellen 1 und 2:

$$h_2 = (c_p)_2 \cdot T_2 + p_2 \cdot v_2 \quad \text{und} \quad h_1 = (c_p)_1 \cdot T_1 + p_1 \cdot v_1$$

Kein Wärmeaustausch bedeutet  $T_1 = T_2$ ; für das inkompressible Wasser ist  $\rho_1 = \rho_2$ , somit ist  $v_1 = 1/\rho_1 = 1/\rho_2 = 1/\rho$ . In den großen Tanks gibt es keine Spiegelabsenkungen, deshalb ist an den Stellen 1 und 2 die Geschwindigkeit des Wassers null. In den Rohrleitungen beträgt die mittlere Geschwindigkeit  $c$  des Wassers jedoch:

$$c = \frac{4 \cdot \dot{V}}{d^2 \cdot \pi}$$

Jedes Kilogramm transportiertes Wasser muss gegen die Schwerkraft  $g$  in den oberen Tank B befördert werden und erhält die spezifische potenzielle Energie  $g \cdot (z_2 - z_1)$  mit  $z_1 = 0$  m und  $z_2 = H$ .

Auf der linken Seite des ersten Hauptsatzes fällt die irreversible Wärme fort, denn aufgrund einer guten Wärmedämmung an den wasserführenden Teilen des Systems gibt es keinen Wärmeaustausch. Die Rohnetzberechnung verläuft so, dass ein Rohrsystem aufgeteilt wird in gerade Rohrstrecken und in Fittings (Einbauteile), die zusammen den Druckverlust durch Reibung ausmachen. Wenn die Geschwindigkeit des Fluids bekannt ist, lässt sich für jedes gerade Rohrstück mit vorgegebenem Rohrdurchmesser und Länge sowie mit der kinematischen Zähigkeit des Fluids die Reynoldszahl der Rohrströmung im Rohrstück ermitteln.



## Lösungen und Lösungswege 75

Kennt man außerdem die relative Rauigkeit der Innenwände der Rohre, so kann man aus einem speziellen Rohrreibungsdiagramm (Moody-Diagramm) den Rohrreibungsbeiwert  $\lambda$  für dieses Rohrstück bestimmen. Diese Prozedur muss für jedes einzelne Rohrstück durchgeführt werden, wenn es in der Länge, in der Rauigkeit oder im Durchmesser verändert ist. Ingenieure für Strömungsmechanik ermitteln außerdem aus Tabellen oder Diagrammen noch die Summe der Widerstandsbeiwerte  $\zeta$  der benutzten Fittings im System und beschreiben so den Druckverlust in der Anlage, der in die folgende Rechnung als Reibungsarbeit zwischen den Punkten 1 und 2 der Anlage eingeht.

$$-\left(\sum_{i=1}^I (w_R)_i\right)_{12} = \underbrace{\sum_{i=1}^I \lambda_i \cdot \frac{L_i}{D_i} \cdot \frac{c_i^2}{2}}_{\text{Rohrreibung}} + \underbrace{\sum_{j=1}^J \zeta_j \cdot \frac{c_j^2}{2}}_{\text{Reibung durch Einbauteile}}$$

Mit dem Laufindex  $i$  und  $j$  werden die Rohrstücke und die einzelnen Einbauten durchgezählt. Für diese Aufgabe gilt:

$$-\left(\sum_{i=1}^I (w_R)_i\right)_{12} = \lambda \cdot \frac{4 \cdot (L1 + L2) \cdot c^2}{d^2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2} + \zeta \frac{c^2}{2}$$

Die Daten für alle Glieder des ersten Hauptsatzes liegen vor. Weil die Gesamtformel zu lang ist, verglichen mit der Breite dieser Buchseite, werden die einzelnen Glieder ausgerechnet.

$$c = 7,9577 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = c \cdot A = 40 \text{ kg/s}$$

$$h_2 - h_2 = \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} = -150 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$g \cdot (z_2 - z_1) = 323,73 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$-\left(\sum_{i=1}^I (w_R)_i\right)_{12} = 345,917 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Daraus ergeben sich die spezifische technische Arbeit und die Leistung.

$$(w_t)_{12} = 529,937 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$(\dot{W}_t)_{12} = \dot{m} \cdot (w_t)_{12} = 21197,5 \text{ W}$$

Die Leistung der technischen Arbeit wird an den Schaufeln der Pumpe benötigt, um das Wasser in den oberen Tank zu transportieren und um die Reibungsarbeit zu kompensieren.

Falls im unteren Behälter A der Druck des Luftpolsters sich bei 1 bar = 100 kPa einstellt, muss die Pumpenleistung erhöht werden auf 27197,5 Watt, denn der Vordruck des Luftpolsters hilft dann nicht, die Flüssigkeit ein Stück in das Ansaugrohr zu schieben.



## 76 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 11.1: Isobare Expansion eines idealen Gases

Die Arbeit, die bei der Ausdehnung der Luft außen am System abgenommen werden kann, ist die (absolute) thermodynamische Arbeit  $W_{12}$  in der Einheit kJ.

$$W_{12} = m \cdot w_{12}$$

Die spezifische thermodynamische Arbeit ist:

$$w_{12} = - \int_{v_1}^{v_2} p(v) \cdot dv,$$

wobei  $p$  konstant sein soll und deshalb vor das Integral gezogen werden kann.

$$w_{12} = -p \int_{v_1}^{v_2} dv = -p \cdot (v_2 - v_1)$$

Somit gilt für  $W_{12}$ :

$$W_{12} = -m \cdot p \cdot (v_2 - v_1)$$

Die ideale Gasgleichung bringt die Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  ins Spiel:

$$v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{R \cdot T_2}{p}$$

$$W_{12} = -m \cdot p \cdot \left( \frac{R \cdot T_2}{p} - \frac{R \cdot T_1}{p} \right) = -m \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = -m \cdot R \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

Gesucht ist die Temperatur  $T_2$  im Endzustand des Systems.

$$\vartheta_2 = \frac{-W_{12}}{m \cdot R} + \vartheta_1$$

Achtung: Beim Einsetzen der Daten an die Vorzeichenregelung für die Arbeit denken. Die thermodynamische Arbeit wird vom System abgegeben, verringert also die innere Energie des Systems und muss deshalb negativ eingesetzt werden.

$$\vartheta_2 = \frac{-(-30 \text{ kJ}) \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{2,2 \text{ kg} \cdot 0,2871 \text{ kJ}} + 22 \text{ °C} = 69,49 \text{ °C}$$

Der isobare Expansionsvorgang mit der Abgabe der Volumenänderungsarbeit erreicht bei 69,5 °C Lufttemperatur im Zylinder den Endzustand 2.

### Aufgabe 11.2: Mischungstemperatur und Gleichgewichtsdruck einer Gasmischung

Dieser Mischvorgang von  $\text{CO}_2$ -Gasen führt auf die Mischungstemperatur aus Kapitel 4, die jetzt aus dem ersten Hauptsatz für geschlossene Systeme abgeleitet werden soll. Es sind drei Gaszustände vorhanden.



## Lösungen und Lösungswege 77

Folgende Indizes werden gesetzt:

**Gaszustand 1:** Im Tank A bekommt das Gas den Index 1 für seinen Anfangszustand bei geschlossener Verbindungsleitung zum anderen Tank.

**Gaszustand 3:** Im Tank B bekommt das Gas den Index 3 für seinen Anfangszustand bei geschlossener Verbindungsleitung zum anderen Tank.

**Gaszustand 2:** Im Tank A bekommt das Gas den Index 2 für seinen Endzustand bei offener Verbindungsleitung zum anderen Tank nach dem Ausgleichsvorgang. Im Tank B erhält das Gas auch den Index 2 nach dem Ausgleichsvorgang. Beide Tanks haben dann denselben Gaszustand; denselben Index 2.

Erster Hauptsatz nur für das geschlossene System Tank A, zwischen Gaszustand 1 und 2:

$$m_A \cdot (q_{\text{rev}})_{12} + m_A \cdot w_{12} = m_A \cdot u_2 - m_A \cdot u_1$$

Erster Hauptsatz nur für das geschlossene System Tank B, zwischen Gaszustand 3 und 2:

$$m_B \cdot (q_{\text{rev}})_{32} + m_B \cdot w_{32} = m_B \cdot u_2 - m_B \cdot u_3$$

Wenn keine reversible Wärme durch die Wärmeisolierung der beiden Tanks gelangt und keine thermodynamische Arbeit im Spiel ist, gilt:  $(q_{\text{rev}})_{12} = 0$ ,  $(q_{\text{rev}})_{32} = 0$ ,  $w_{12} = 0$  und  $w_{32} = 0$ . Die Hauptsätze lauten jetzt:

$$\begin{array}{ccc} m_A \cdot u_2 - m_A \cdot u_1 = 0 & \text{und} & m_B \cdot u_2 - m_B \cdot u_3 = 0 \\ \underbrace{m_A \cdot c_v \cdot T_2 - m_A \cdot c_v \cdot T_1 = 0}_{\substack{\text{Änderung der inneren Energie} \\ \text{im Tank A zwischen 1 und 2}}} & \text{und} & \underbrace{m_B \cdot c_v \cdot T_2 - m_B \cdot c_v \cdot T_3 = 0}_{\substack{\text{Änderung der inneren Energie} \\ \text{im Tank B zwischen 3 und 2}}} \end{array}$$

Die Änderung der inneren Energie nach der Mischung im Tank A bedeutet, dass das Gas im Tank A diesen Energiebetrag gewinnt, falls  $T_2$  größer ist als  $T_1$ , oder verliert, wenn  $T_2$  kleiner ist als  $T_1$ . Ähnlich sind die Verhältnisse im Tank B. Die Änderung der inneren Energie im Tank B tritt als Energieverlust an das Gas des Tanks A hervor, wenn seine Temperatur  $T_3$  größer ist als die später sich einstellende Mischtemperatur  $T_2$ . Die Mischtemperatur ist aber momentan noch unbestimmt.

Mit anderen Worten: Wenn die innere Energie eines Gases bei der Mischung abnimmt, dann muss dieser Energiebetrag die innere Energie des anderen Gases erhöhen. Im Endeffekt darf keine innere Energie verloren gehen, da infolge der wärmegeprägten Wände (adiabate Wände) und der nicht vorhandenen Arbeit die innere Energie konstant bleibt. Da das System (Tank A und Tank B) adiabatisch ist, müssen sich die Änderungen der inneren Energien in den einzelnen Tanks nach dem Mischprozess aufheben. Das heißt, die Änderungen der inneren Energien müssen zusammengezählt null ergeben.

$$(m_A \cdot c_v \cdot T_2 - m_A \cdot c_v \cdot T_1) + (m_B \cdot c_v \cdot T_2 - m_B \cdot c_v \cdot T_3) = 0$$

Es ist eine Bestimmungsgleichung für die Mischtemperatur  $T_2$  entstanden.

$$\begin{aligned} m_A \cdot c_v \cdot T_2 + m_B \cdot c_v \cdot T_2 &= m_A \cdot c_v \cdot T_1 + m_B \cdot c_v \cdot T_3 \\ T_2 &= \frac{m_A \cdot c_v \cdot T_1 + m_B \cdot c_v \cdot T_3}{m_A \cdot c_v + m_B \cdot c_v} \quad \text{Mischungstemperatur} \end{aligned}$$



## 78 Lösungen und Lösungswege

Weil angenommen wird, dass die spezifische Wärmekapazität  $c_v$  im Temperaturbereich  $30^\circ\text{C}$  bis  $65^\circ\text{C}$  konstant ist, darf  $c_v$  gekürzt werden. Bei größeren Temperaturunterschieden sollte geprüft werden, ob der dadurch entstehende Fehler akzeptiert werden kann.

$$T_2 = \frac{m_A \cdot T_1 + m_B \cdot T_3}{m_A + m_B} = \frac{2 \text{ kg} \cdot (273,15 + 30) \text{ K} + 4 \text{ kg} \cdot (273,15 + 65) \text{ K}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}}$$

$$T_2 = 326,483 \text{ K}$$

$$\vartheta_2 = \frac{m_A \cdot \vartheta_1 + m_B \cdot \vartheta_3}{m_A + m_B} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 30^\circ\text{C} + 4 \text{ kg} \cdot 65^\circ\text{C}}{2 \text{ kg} + 4 \text{ kg}} = 53,33^\circ\text{C}$$

Der Druck nach der Mischung und die Volumina der Tanks werden mithilfe der idealen Gasgleichung ermittelt.

$$V_A = \frac{m_A \cdot R \cdot T_1}{p_1} = 0,382 \text{ m}^3$$

$$V_B = \frac{m_B \cdot R \cdot T_3}{p_3} = 0,511 \text{ m}^3 \quad \text{und} \quad V_{\text{ges}} = 0,893 \text{ m}^3$$

$$p_2 \cdot (V_1 + V_2) = (m_1 + m_2) \cdot R \cdot T_2$$

$$p_2 = 4,144 \text{ bar}$$

Wenn Sie mögen, können Sie nochmals die Temperatur  $T_2$  mit den temperaturabhängigen spezifischen Wärmekapazitäten  $c_v(T)$  berechnen. Sie benötigen hierzu die folgende Tabelle der  $c_v(T)$ -Werte. Als Lösung ergibt sich gerundet die Temperatur  $T_2 = 53,72^\circ\text{C}$ .

$\vartheta^\circ\text{C}$	$T \text{ K}$	$c_v \text{ kJ}/(\text{kg K})$
30	303,15	0,6615
35	308,15	0,6665
40	313,15	0,6715
45	318,15	0,6764
50	323,15	0,6813
55	328,15	0,6861
65	228,15	0,6957

Daten der spezifischen Wärmekapazität  $c_v(T)$  des Gases  $\text{CO}_2$

### Aufgabe 11.3: Nutzungsgrad eines Prozesses

Der Mikrowellenofen ist ein geschlossenes System, das Wasser in der Schale ist das Untersuchungsobjekt. Die Mikrowellenstrahlung regt die Wassermoleküle an, stärker zu schwingen; so erhöht sich die innere Energie des Wassers. Arbeit wird in der Mikrowelle nicht geleistet. Der erste Hauptsatz als Energiebilanz ist hierfür zuständig, das können Sie aus der gegebenen Leistungsangabe  $1200 \text{ W}$  schließen.

$$\underbrace{\frac{(Q_{\text{rev}})_{12}}{\Delta t}}_{1200 \text{ W}} + \underbrace{\frac{W_{12}}{\Delta t}}_{=0} = \frac{U_2}{\Delta t} - \frac{U_1}{\Delta t}$$





## Lösungen und Lösungswege 79

Mit  $W_{12} = 0$  und der Prozesszeit  $\Delta t = 132$  s folgt:

$$U_2 = m \cdot c_p \cdot T_2 \quad \text{und} \quad U_1 = m \cdot c_p \cdot T_1$$

$$(\dot{Q}_{\text{rev}})_{12} = \frac{m}{\Delta t} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Auf der linken Seite steht die Leistung der Mikrowellenstrahlung von 1200 Watt, die insgesamt vom Strahler in den Mikrowellenraum abgegeben wird. Allerdings erwärmt nur ein Teil davon das Wasser in der Schale. Es verging die Zeit von 132 Sekunden, bis sich die Temperatur des Wassers von 10 °C auf 50 °C erhöht hat. Das heißt, Sie müssen auf der linken Seite noch einen Faktor einführen, den Nutzungsgrad  $\eta$ , der kleiner als 1 sein muss, da Sie nur die Energie bestimmen wollen, die das Wasser aufgenommen hat.

$$\eta \cdot (\dot{Q}_{\text{rev}})_{12} = \frac{m}{\Delta t} \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Wärmeenergie, die das Wasser in der Schale aufgenommen hat. Der Sinn des Prozesses ist, die Temperatur des Wassers zu erhöhen. Jetzt ist die Leistungsbilanz in Ordnung und der Nutzungsgrad (entspricht hier dem Wirkungsgrad)  $\eta$  kann ermittelt werden.

$$\eta = \frac{m \cdot c_p \cdot (T_2 - T_1)}{\Delta t \cdot (\dot{Q}_{\text{rev}})_{12}} = 0,53 \quad \text{oder} \quad \eta = 53 \%$$

Sicherlich fragen Sie sich, warum in der Formel die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  steht, obwohl die innere Energie mit  $c_v$  gebildet wird. Nur bei idealen Gasen gilt  $u = c_v \cdot T$ , bei allen Flüssigkeiten und Festkörpern gilt jedoch  $c_v = c_p$ .

### Aufgabe 11.4: Kaltes und heißes Wasser mischen

Es kann der erste Hauptsatz für geschlossene Systeme benutzt werden. Das am Anfang kalte Wasser erhält den Index 1, das warme Wasser den Index 2 und die fertige Mischung den Index 3. Es gibt drei Wasserzustände. Arbeit wird nicht geleistet! Reibung wird vernachlässigt. Die irreversible Wärme ist dann die reversible Wärme.

Das kalte Wasser nimmt bei der Mischung die Wärme  $Q_{\text{zu}}$  auf. Eine Wärmeaufnahme dient zur Erhöhung der eigenen inneren Energie; also ist der Wärmebeitrag positiv.

$$\underbrace{m_1 \cdot q_{\text{rev}}}_{Q_{\text{zu}}} = m_1 \cdot c_v \cdot (T_3 - T_1)$$

Das warme Wasser gibt bei der Mischung die Wärme  $Q_{\text{ab}}$  an das kalte Wasser ab und verringert seine innere Energie; also ist der Beitrag negativ.

$$\underbrace{m_2 \cdot (-q_{\text{rev}})}_{Q_{\text{ab}}} = m_2 \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

Wenn keine weitere Wärme entweicht, wovon Sie ausgehen können, ist der abgegebene Wärmebeitrag  $Q_{\text{ab}}$  gleich dem aufgenommenen Wärmebeitrag  $Q_{\text{zu}}$ .

$$-m_2 \cdot c_v \cdot (T_3 - T_2) = m_1 \cdot c_v \cdot (T_3 - T_1)$$





## 80 Lösungen und Lösungswege

Temperaturdifferenzen in Kelvin entsprechen Temperaturdifferenzen in °C.

$$-m_2 \cdot c_v \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_2) = m_1 \cdot c_v \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_1) \quad \text{Gleichung für die Mischungstemperatur}$$

In dieser Beziehung gibt es zwei Unbekannte, eine weitere Gleichung ist also notwendig, um die Aufgabe zu lösen. Nehmen Sie die Gleichung zur Erhaltung der Masse.

$$m_3 = m_1 + m_2$$

Somit gibt es zwei Gleichungen für die Unbekannten  $m_1$  und  $m_2$ . Mit den Daten:  $\vartheta_2 = 70$  °C,  $\vartheta_1 = 10$  °C,  $c_v = 4,18$  kJ/(kg K),  $\vartheta_3 = 40$  °C folgt:

$$-m_2 \cdot c_v \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_2) = (m_3 - m_2) \cdot c_v \cdot (\vartheta_3 - \vartheta_1)$$

$$m_2 = \frac{m_3}{2} = 45 \text{ Liter} \quad \text{und} \quad m_1 = \frac{m_3}{2} = 45 \text{ Liter}$$

Konnten Sie diese Zahlen erraten? Probieren Sie diese Aufgabe mit den gleichen Zahlen, jedoch mit einer Mischtemperatur von 38 °C. Lösung: 4,8 Liter Kaltwasser und 4,2 Liter Warmwasser ergeben 9,0 Liter bei 38 °C.

## Aufgabe 11.5: Adiabate Expansion eines idealen Gases

Eine adiabate Entspannung eines idealen Gases wird durch die Adiabatengleichung beschrieben:

$$p \cdot v^\kappa = \text{konstant}$$

Die Gleichung gilt zwischen dem gegebenen Anfangszustand 1 und dem Endzustand 2.

$$p_1 \cdot v_1^\kappa = p_2 \cdot v_2^\kappa = \text{konstant}$$

Während des Prozesses bleibt die eingeschlossene Masse  $m$  des Gases konstant. Deshalb folgt mit  $V = m \cdot v$ :

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa$$

Mithilfe dieser Gleichung können Sie  $V_2$  bestimmen:

$$V_2 = V_1 \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\kappa} = 0,026 \text{ m}^3 \cdot \left( \frac{12}{1} \right)^{5/7} = 0,1534 \text{ m}^3$$

Die thermodynamische Arbeit wird am einfachsten mithilfe der in Tabelle 11.3 angegebenen Formel ermittelt.

$$w_{12} = \frac{v_1 \cdot p_1}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{\kappa-1}{\kappa} \right)} - 1 \right)$$



## Lösungen und Lösungswege 81

Wenn diese Gleichung mit der Masse  $m$ , die nicht bekannt sein muss, multipliziert wird, erhält man  $W_{12}$  und  $V_1$ .

$$m \cdot w_{12} = \frac{m \cdot v_1 \cdot p_1}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{\kappa-1}{\kappa} \right)} - 1 \right)$$

$$W_{12} = \frac{V_1 \cdot p_1}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{\kappa-1}{\kappa} \right)} - 1 \right) = \frac{0,026 \text{ m}^3 \cdot 12 \text{ bar}}{0,4} \left( \left( \frac{1}{12} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} - 1 \right)$$

$$W_{12} = -0,3965 \text{ m}^3 \cdot \text{bar} = -39,65 \text{ kJ}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Arbeit  $W_{12}$  von 39,65 kJ von der Maschine abgegeben wird. Bitte überzeugen Sie sich, dass auch die beiden folgenden Formeln zum Ergebnis führen.

$$W_{12} = \frac{V_1 \cdot p_1}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right)$$

Man erhält  $W_{12}$  durch das Ersetzen des Druckverhältnisses  $p_2/p_1$  mithilfe der Adiabatengleichung. Alternativ können Sie auch folgende Gleichung benutzen:

$$W_{12} = \frac{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1}$$

### Aufgabe 12.1: Entropieproduktion eines expandierenden idealen Gases

Die spezifische Entropieänderung  $ds$  kann mithilfe einer passenden Gleichung aus Tabelle 12.2 berechnet werden. Da das Volumen  $V = m \cdot v$  und die Temperatur im Anfangszustand gegeben sind, wird die Gleichung

$$ds = \frac{c_v}{T} \cdot dT + \frac{R}{v} \cdot dv$$

ausgewählt. Der Ausdehnungsvorgang ist isotherm und somit ist  $dT = 0$ . Die Integration zwischen Anfangszustand 1 und Endzustand 2 ergibt formal:

$$\int_1^2 ds = R \cdot \int_1^2 \frac{dv}{v}$$

Gegeben sind  $V_1$  und  $V_2$  und nicht die spezifischen Volumina  $v_1$  und  $v_2$ . Also müssen  $V_1$  und  $V_2$  mithilfe der allgemeinen Beziehung  $V = m \cdot v$  eingeführt werden.

$$s_2 - s_1 = R \cdot \int_{v=v_1}^{v=v_2} \frac{m \cdot dv}{m \cdot v} = R \cdot \int_{v=v_1}^{v_2} \frac{d(m \cdot v)}{V} = R \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$



## 82 Lösungen und Lösungswege

Die Masse des Gases bleibt konstant. Mit den Daten des Anfangszustands erhält man die spezielle Gaskonstante  $R$ .

$$R = \frac{p_1 \cdot V_1}{m \cdot T_1}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{m \cdot T_1} \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$m \cdot (s_2 - s_1) = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$S_2 - S_1 = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{3 \text{ bar} \cdot 0,6 \text{ m}^3}{300 \text{ K}} \cdot \ln \left( \frac{0,77}{0,6} \right) = 0,001497 \frac{\text{bar} \cdot \text{m}^3}{\text{K}}$$

Mit der Umrechnungsbeziehung  $1 \text{ bar} = 100000 \text{ J/m}^3$  folgt die positive Entropieänderung:

$$S_2 - S_1 = 149,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Die Entropie  $S_2$  im Endzustand muss größer sein als  $S_1$ . Im System wurde Entropie erzeugt, weil ihr Betrag um  $149,7 \text{ J/K}$  gestiegen ist. Sie können auch sagen, dass Unordnung während des Prozesses geschaffen wurde. Der Druck  $p_2$  wird mithilfe der idealen Gasgleichung berechnet.

$$p_2 = \frac{m \cdot R \cdot T_1}{V_2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{V_2} = 2,337 \text{ bar}$$

Wenn Sie das Beispiel umdrehen und einen Verdichtungsprozess von  $0,77 \text{ m}^3$  bis  $0,6 \text{ m}^3$  untersuchen, erhalten Sie eine negative Entropieänderung, die die Gasteilchen zusammenrücken lässt; dadurch entsteht mehr Ordnung im System.

### Aufgabe 12.2: Ist die reversible Wärme $\delta q_{\text{rev}}(T, v)$ eine Zustandsgröße?

Wenn in der Thermodynamik eine Funktion  $f(x, y)$  ein totales Differenzial  $df$  besitzt, dann ist  $f$  eine Zustandsfunktion. Für  $f(x, y)$  muss dann der Satz von Schwarz erfüllt sein. Nehmen wir vorübergehend an, dass der Ausdruck

$$\delta q_{\text{rev}} = c_v \cdot dT + \frac{R \cdot T}{v} \cdot dv$$

ein totales Differenzial der Funktion  $q_{\text{rev}} = f(T, v)$  ist. Dann muss die Form

$$\delta q_{\text{rev}} = \left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial v} \right)_T dv$$

bestätigt werden können. Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial T} \right)_v = c_v \quad \text{und} \quad \left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial v} \right)_T = \frac{R \cdot T}{v}$$





## Lösungen und Lösungswege 83

Andererseits muss der Satz von Schwarz erfüllt sein. Er lautet für diese Aufgabe (mit  $f = q_{\text{rev}}$ ,  $x = T$  und  $y = v$ ):

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial q_{\text{rev}}}{\partial v} \right)$$

Die ersten Ableitungen sind schon durch den Koeffizientenvergleich festgelegt.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial v}(c_v)}_0 = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{R \cdot T}{v} \right)$$

Also gilt:

$$0 \neq \frac{R}{v} \quad \text{Der Satz von Schwarz ist nicht erfüllt!}$$

Die linke Seite ist ungleich der rechten Seite. Die spezifische Wärmekapazität  $c_v$  hängt bei einem idealen Gas nicht von  $v$  ab. Die gemachte Annahme, dass  $\partial q_{\text{rev}}$  ein totales Differenzial sei, war nicht richtig!

### Aufgabe 12.3: Ist die Entropie $ds$ eine Zustandsfunktion?

Wenn die Entropie  $s(T, v)$  eine Zustandsgröße sein soll, dann muss der Satz von Schwarz erfüllt sein, denn nur dann gilt das totale Differenzial  $ds$  als Zeichen einer Zustandsfunktion in der Thermodynamik.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial s(T, v)}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial s(T, v)}{\partial v} \right) \quad \text{Satz von Schwarz}$$

$$ds = \frac{\partial s(T, v)}{\partial T} \cdot dT + \frac{\partial s(T, v)}{\partial v} \cdot dv \quad \text{totales Differenzial}$$

Zuerst wird ein Koeffizientenvergleich zwischen der gegebenen Gleichung in der Aufgabenstellung und dem totalen Differenzial durchgeführt.

$$\frac{\partial s(T, v)}{\partial T} = \frac{c_v}{T} \quad \text{und} \quad \frac{\partial s(T, v)}{\partial v} = \frac{R}{v}$$

Diese Terme gehen als innere Ableitungen in den Satz von Schwarz ein.

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{c_v}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{R}{v} \right)$$

$$0 = 0$$

Der Satz von Schwarz ist erfüllt, die Entropie  $s(T, v)$  ist eine Zustandsgröße. Ihr Wert im Endzustand eines beliebigen Prozesses ist nicht vom Prozessweg (nicht von der Prozessführung) abhängig. Ausgehend vom Anfangszustand eines Prozesses ist es egal, wie der Endzustand erreicht wird.





## 84 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 12.4: Ist der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt?

Für das Gesamtsystem müssen die Kontinuitätsgleichung, der erste Hauptsatz und der zweite Hauptsatz erfüllt sein, sodass es keinen Widerspruch zu den thermodynamischen Gesetzen gibt. Das Gesamtsystem wird in zwei Teilsysteme zerlegt: Das erste Teilsystem umfasst den Anfangszustand 1 ( $p_1 = 6$  bar) und den Endzustand 2 ( $p_2 = 1,5$  bar,  $T_2 = (273,15 - 14)$  K). Das zweite Teilsystem wird auch vom Anfangszustand 1 ( $p_1 = 6$  bar) versorgt und endet im Zustand 3 ( $p_3 = 2$  bar,  $T_3 = (273,15 + 70)$  K). Aus der Kontinuitätsgleichung folgt:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$

$$\dot{m}_1 = 0,4 \cdot \dot{m}_1 + \dot{m}_3$$

Für den Massenstrom  $\dot{m}_3$  folgt sofort:

$$\dot{m}_3 = 0,6 \cdot \dot{m}_1$$

Der erste Hauptsatz als Leistungsbilanz für offene Systeme mit einer einzigen Eintrittsöffnung  $I = 1$  und  $J = 2$  Austrittsöffnungen lautet:

$$(\dot{Q}_{\text{rev}})_{12} + (\dot{W}_I)_{12} = \sum_{j=1}^{J=2} \dot{H}_2 - \sum_{i=1}^{I=1} \dot{H}_1 + \sum_{j=1}^{J=2} \frac{\dot{m}_j \cdot c_2}{2} - \sum_{i=1}^{I=1} \frac{\dot{m}_i \cdot c_1}{2} + g \cdot \left( \sum_{j=1}^{J=2} \dot{m}_j \cdot z_2 - \sum_{i=1}^{I=1} \dot{m}_i \cdot z_1 \right)$$

Infolge des adiabaten Gesamtsystems ist die reversible Wärme null. Keine technische Arbeit durchdringt die Systemgrenze, die potenzielle Energien sind wegen  $z_1 = z_2 = z_3$  nicht vorhanden. Alle Fluidgeschwindigkeiten in den zu- und abführenden Leitungen an den Positionen 1, 2 und 3 sind gleich. Der erste Hauptsatz vereinfacht sich erheblich.

$$0 = \sum_{j=1}^{J=2} \dot{H}_2 - \sum_{i=1}^{I=1} \dot{H}_1$$

$$0 = \underbrace{(\dot{H}_2)_{j=1}}_{\substack{\text{Stelle} \\ 2 \\ \text{Endzustand}}} + \underbrace{(\dot{H}_2)_{j=2}}_{\substack{\text{Stelle} \\ 3 \\ \text{Endzustand}}} - \underbrace{(\dot{H}_1)_{i=1}}_{\substack{\text{Stelle} \\ 1 \\ \text{Anfangs-} \\ \text{zustand}}}$$

Mit  $j = 1$  wurde hier die Austrittsstelle 2 willkürlich festgelegt. Dann verbleibt für die Austrittsöffnung 3 der Zähler  $j = 2$ .

$$0 = \dot{H}_2 + \dot{H}_3 - \dot{H}_1 \quad \text{oder} \quad \dot{H}_1 = \dot{H}_2 + \dot{H}_3$$

Folgende Massenströme sind an den einzelnen Positionen vorhanden:

Eintrittsstelle 1:  $\dot{m}_1$ , Austrittsstelle 2:  $\dot{m}_2 = 0,4 \cdot \dot{m}_1$ , Austrittsstelle 3:  $\dot{m}_3 = 0,6 \cdot \dot{m}_1$ .

$$\dot{m}_1 \cdot h_1 = \dot{m}_2 \cdot h_2 + \dot{m}_3 \cdot h_3$$



## Lösungen und Lösungswege 85

$$\dot{m}_1 \cdot h_1 = 0,4 \cdot \dot{m}_1 h_2 + 0,6 \cdot \dot{m}_1 \cdot h_3$$

$$h_1 = 0,4 \cdot h_2 + 0,6 \cdot h_3$$

$$h_1 = 0,4 \cdot c_p \cdot T_2 + 0,6 \cdot c_p \cdot T_3$$

$$h_1 = 0,4 \cdot 1,004 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 259,15 \text{ K} + 0,6 \cdot 1,004 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 343,15 \text{ K} = 310,79 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Hieraus folgt die Temperatur des idealen Gases an der Eintrittsstelle 1:

$$T_1 = \frac{h_1}{c_p} = 309,55 \text{ K oder } \vartheta_1 = 36,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

Die Prüfung, ob der zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt ist, besteht im Nachweis einer positiven Gesamtentropie.

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{1.\text{TS}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{2.\text{TS}}$$

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \dot{m}_2 \cdot (s_2 - s_1)_{1.\text{TS}} + \dot{m}_3 \cdot (s_2 - s_1)_{2.\text{TS}}$$

Bitte sehen Sie in Tabelle 12.2 nach und übernehmen Sie die passende Formel für die Entropieänderungen ( $s_2 - s_1$ ) der Teilsysteme. Die mittleren spezifischen Wärmekapazitäten in den Formeln werden durch die gegebenen Wärmekapazitäten ersetzt.

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \dot{m}_2 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) \right)_{1.\text{TS}} + \dot{m}_3 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_3}{p_1} \right) \right)_{2.\text{TS}}$$

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = 0,4 \cdot \dot{m}_1 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{259,15 \text{ K}}{309,55 \text{ K}} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{1,5 \text{ bar}}{6 \text{ bar}} \right) \right)_{1.\text{TS}} + 0,6 \cdot \dot{m}_1 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{343,15 \text{ K}}{309,55 \text{ K}} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{2 \text{ bar}}{6 \text{ bar}} \right) \right)_{2.\text{TS}}$$

Mit den Daten für  $\dot{m}_1$ ,  $c_p$  und  $R$  ergibt sich die Rate der erzeugten Gesamtentropieänderung des Systems:

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = 0,09 \frac{\text{kJ}}{\text{s} \cdot \text{K}}$$

Die zeitliche Änderung der Gesamtentropie ist positiv und somit ist der zweite Hauptsatz erfüllt.

### Aufgabe 12.5: Den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik anwenden

Das Gesamtsystem erfüllt den zweiten Hauptsatz, wenn die Gesamtentropie  $\Delta \dot{S}_{\text{ges}} > 0$  ist. Drei Teilsysteme lassen sich hier trennen. Das erste Teilsystem ist der kalte Sauerstoffstrom an der Eintrittsöffnung 1 bis zum Ausgang 3. Das zweite Teilsystem beinhaltet den anfangs warmen Sauerstoffstrom von der Eintrittsstelle 2 bis zum Ausgang 3. Am Ausgang 3 haben sich die Stoffströme vermischt und besitzen dieselben Zustandsdaten. Das dritte Teilsystem



## 86 Lösungen und Lösungswege

ist die Umgebung des Mischkastens. Dort herrscht eine konstante Temperatur  $\vartheta_U = 18^\circ\text{C}$ . Die zeitliche Änderung der Gesamtentropie wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{1.\text{TS}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{2.\text{TS}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Umgebung}} \quad \begin{array}{l} \text{allgemeine} \\ \text{Formel} \end{array}$$

Die allgemeine Formel für  $\Delta \dot{S}_{\text{ges}}$  muss an den gegebenen Verhältnissen angepasst werden. Mit den Massenströmen an den Eingangsstellen folgt:

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \dot{m}_1 \cdot \underbrace{(s_2 - s_1)_{1.\text{TS}}}_{\substack{\text{Zustand} \\ 1 \text{ nach } 3}} + \dot{m}_2 \cdot \underbrace{(s_2 - s_1)_{2.\text{TS}}}_{\substack{\text{Zustand} \\ 2 \text{ nach } 3}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Umgebung}}$$

Die spezifischen Entropieänderungen lassen sich mit den passenden Formeln aus Tabelle 12.2 ausdrücken. Werden die Zustandsbezeichnungen aus der Abbildung eingeführt, nimmt die Gleichung folgende Form an.

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \dot{m}_1 \cdot (s_3 - s_1)_{1.\text{TS}} + \dot{m}_2 \cdot (s_3 - s_2)_{2.\text{TS}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Umgebung}}$$

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \dot{m}_1 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_1} \right) - \underbrace{R \cdot \ln \left( \frac{p_i}{p_i} \right)}_0 \right)_{1.\text{TS}} + \dot{m}_2 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) - 0 \right)_{2.\text{TS}} + \frac{\dot{Q}_{\text{irr}}}{T_U}$$

Der Umgebung wird die irreversible Wärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{irr}} = 120 \text{ kJ/min}$  bei der Umgebungstemperatur  $T_U$  zugeführt. Überall an den Öffnungen zur Mischkammer ist der Druck  $p_i = 2 \text{ bar}$ . Der Massenstrom an der Eintrittsstelle 2 muss noch errechnet werden. Die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

alleine genügt nicht, weil in ihr zwei Unbekannte vorkommen. Der erste Hauptsatz für offene Systeme in Form einer Leistungsbilanz ergänzt sie. Nach der Abbildung gibt es zwei Eingänge  $i = 1, 2$  und einen Ausgang  $j = 1$ . Allgemein lautet der erste Hauptsatz mit mehreren Ein- und Ausgängen:

$$(\dot{Q}_{\text{irr}})_{12} + \sum (\dot{W}_R)_{12} + (\dot{W}_t)_{12} = \sum_{j=1}^{J=1} \dot{H}_2 - \sum_{i=1}^{I=2} \dot{H}_1 + \sum_{j=1}^{J=2} \frac{\dot{m}_j \cdot c_2}{2} - \sum_{i=1}^{I=1} \frac{\dot{m}_i \cdot c_1}{2} + g \cdot \left( \sum_{j=1}^{J=2} \dot{m}_j \cdot z_2 - \sum_{i=1}^{I=1} \dot{m}_i \cdot z_1 \right).$$

Die gegebenen Größen vereinfachen den ersten Hauptsatz.

$$(\dot{Q}_{\text{irr}})_{12} = \sum_{j=1}^{J=1} \dot{H}_2 - \sum_{i=1}^{I=2} \dot{H}_1 = (\dot{H}_2)_{j=1} - [(\dot{H}_1)_{i=1} + (\dot{H}_1)_{i=2}]$$



## Lösungen und Lösungswege 87

Sie erinnern sich sicher noch an die Vereinbarung, dass im allgemeinen Hauptsatz die Indizes 1 und 2 den Anfangszustand und Endzustand symbolisieren. Werden die in der Abbildung festgelegten Positionen 1, 2 und 3 im ersten Hauptsatz berücksichtigt, folgt:

$$(\dot{Q}_{\text{irr}})_{12} = \dot{H}_3 - [\dot{H}_1 + \dot{H}_2] = (\dot{m}_1 + \dot{m}_2) \cdot h_3 - \dot{m}_1 \cdot h_1 - \dot{m}_2 \cdot h_2$$

Diese Gleichung beschreibt das vorgestellte System »Mischkammer«, das die Wärmeleistung  $(\dot{Q}_{\text{irr}})_{12} = \dot{Q}_{\text{irr}}$  verliert, sodass sie negativ in den Hauptsatz eingeht. Somit drehen sich die Vorzeichen um.

$$\dot{Q}_{\text{irr}} = -(\dot{m}_1 + \dot{m}_2) \cdot h_3 + \dot{m}_1 \cdot h_1 + \dot{m}_2 \cdot h_2$$

Die spezifische Enthalpie eines idealen Gases ist einfach zu bestimmen:  $h = c_p \cdot T$ .

$$\dot{Q}_{\text{irr}} = -(\dot{m}_1 + \dot{m}_2) \cdot c_p \cdot T_3 + \dot{m}_1 \cdot c_p \cdot T_1 + \dot{m}_2 \cdot c_p \cdot T_2$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung  $\dot{m}_1 + \dot{m}_2 = \dot{m}_3$  haben Sie zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten  $\dot{m}_2$  und  $\dot{m}_3$ .

$$\dot{m}_2 = \frac{\dot{m}_1 \cdot c_p \cdot (T_1 - T_3) - \dot{Q}_{\text{irr}}}{c_p \cdot (T_3 - T_2)} = 4,365 \frac{\text{kg}}{\text{min}} \quad \text{und} \quad \dot{m}_3 = 6,464 \frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Schließlich lässt sich die zeitliche Änderung der Gesamtentropie (des Universums) bestimmen.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{S}_{\text{ges}} &= \dot{m}_1 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_1} \right) \right)_{1,\text{TS}} + \dot{m}_2 \cdot \left( c_p \cdot \ln \left( \frac{T_3}{T_2} \right) \right)_{2,\text{TS}} + \frac{\dot{Q}_{\text{irr}}}{T_U} \\ \Delta \dot{S}_{\text{ges}} &= \left[ 2,1 \cdot 0,922 \cdot \ln \left( \frac{295,15}{278,15} \right) + 4,365 \cdot 0,922 \cdot \ln \left( \frac{295,15}{333,15} \right) + \frac{120}{291,15} \right] \frac{\text{kJ}}{\text{min} \cdot \text{K}} \\ \Delta \dot{S}_{\text{ges}} &= 0,039 \frac{\text{kJ}}{\text{min} \cdot \text{K}} > 0 \end{aligned}$$

Die Änderung der Gesamtentropie ist positiv. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wurde nicht verletzt.

## Aufgabe 12.6: Wärmeleitung durch eine Wand

Bei einer eindimensionalen Wärmeleitung durch eine feste Wand wird vorausgesetzt, dass es einen riesigen warmen Wärmespeicher der Temperatur  $T_w$  und einen riesigen kalten Wärmespeicher der Temperatur  $T_k < T_w$  gibt und die wärmedurchlässige feste Wand die beiden Wärmespeicher trennt. Dabei sollen die beiden Wärmespeicher so groß sein, dass ihre Temperaturen  $T_k$  und  $T_w$  zeitlich konstant bleiben. Die Speicher merken den Wärmefluss nicht! Der warme Wärmespeicher liefert die Wärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{in}}$  an die feste Wand; dort gilt für die reduzierte Wärmeleistung der Ausdruck  $\dot{Q}_{\text{in}}/T_w$ . Falls keine Wärmespeicherung in der Wand erfolgt, wird die aufgenommene Wärmeleistung weitergeleitet zur gegenüberliegenden Seite und dort wird aus  $\dot{Q}_{\text{in}}$  die Größe  $(-\dot{Q}_{\text{out}})$ . Die Übergabe an den kälteren Wärmespeicher bei der kälteren Temperatur  $T_k$  wird also von der reduzierten Wärmeleistung  $-\dot{Q}_{\text{out}}/T_k$  begleitet. Der vom kälteren Wärmespeicher pro Zeiteinheit aufgenommene Wärmebetrag erhöht seine innere Energie aufgrund seiner Größe nur geringfügig (nicht messbar).



## 88 Lösungen und Lösungswege

Bei jedem stationären Wärmeleitungsprozess, das heißt, bei sehr großen kalten und warmen Wärmespeichern, sind die Wandtemperaturen  $T_w$  und  $T_k$  zeitlich konstant, und die zeitliche Gesamtentropieänderung ist null. Achtung, nur die Änderung der Gesamtentropie ist null, nicht die Gesamtentropie selbst; sie bleibt während des Übertragungsprozesses konstant.

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \frac{dS_{\text{ges}}}{dt} = 0$$

Mit der allgemeinen Gleichung für die Gesamtentropieänderung und der Betrachtung von 3 Teilsystemen, warmer Speicher, Wand und kalter Speicher folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{S}_{\text{ges}} &= (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{1,\text{TS}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{3,\text{TS}} \\ 0 &= \frac{\dot{Q}_{\text{in}}}{T_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + \frac{-\dot{Q}_{\text{out}}}{T_k} \quad \text{mit} \quad |\dot{Q}_{\text{in}}| = |\dot{Q}_{\text{out}}| = \dot{Q} \\ (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} &= \frac{-\dot{Q}}{T_w} + \frac{\dot{Q}}{T_k} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{T_w - T_k}{T_w \cdot T_k} \right) \\ (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} &= \frac{-800 \text{ W}}{293 \text{ K}} + \frac{800 \text{ W}}{273 \text{ K}} \\ (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} &= -2,73 \frac{\text{W}}{\text{K}} + 2,93 \frac{\text{W}}{\text{K}} = 0,20 \frac{\text{W}}{\text{K}} = 0,20 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

In der Wand wird ein Entropiestrom von  $0,20 \text{ W/K}$  infolge der Temperaturdifferenz  $T_w - T_k$  erzeugt.

### Aufgabe 12.7: Entropieproduktion beim Wärmedurchgang durch eine Wand

In jedem Teilsystem wird Entropie erzeugt. Da sich die Temperaturen an keiner Stelle im System mit der Zeit ändern, liegt ein stationärer Wärmetransport vor. Es gibt keine zeitliche Gesamtentropieänderung.

$$\Delta \dot{S}_{\text{ges}} = \frac{dS_{\text{ges}}}{dt} = 0$$

Die eigentliche Grundgleichung für die Gesamtentropieänderung des Systems besteht hier aus fünf Teilentropien.

$$\begin{aligned} \Delta \dot{S}_{\text{ges}} &= \frac{\dot{Q}_{\text{in}}}{T_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_k} + \frac{-\dot{Q}_{\text{out}}}{T_k} \\ 0 &= \frac{800 \text{ W}}{293 \text{ K}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_k} + \frac{-800 \text{ W}}{273 \text{ K}} \end{aligned}$$

Die warmen und kalten Grenzschichten  $\text{GS}_w$ ,  $\text{GS}_k$  und die Wand zusammen erzeugen den folgenden Entropiestrom:

$$\begin{aligned} (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_k} &= \frac{\dot{Q}_{\text{out}}}{T_k} - \frac{\dot{Q}_{\text{in}}}{T_w} = \frac{800 \text{ W}}{273 \text{ K}} - \frac{800 \text{ W}}{293 \text{ K}} \\ (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{Wand}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{\text{GS}_k} &= 0,20 \frac{\text{W}}{\text{K}} \end{aligned}$$





## Lösungen und Lösungswege 89

Bitte vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem von Aufgabe 12.6. Die gegebenen Grunddaten haben sich nicht geändert. Eine alternative Lösung ist:

$$(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{Wand} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_k} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} \cdot T_{\min}} \right)$$

Die Temperaturen  $T_{\max}$  und  $T_{\min}$  an den Rändern der betrachteten Schichten (hier links von  $GS_w$  und rechts von  $GS_k$ ) sind gegeben. Mit  $T_{\max} = 293$  K und  $T_{\min} = 273$  K folgt:

$$(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{Wand} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_k} = 800 \cdot \left( \frac{293 - 273}{293 \cdot 273} \right) \frac{W}{K} = 0,20 \frac{W}{K}$$

Als Nächstes wird der Entropiestrom durch die warme Temperaturschicht  $GS_w$  berechnet.

$$(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_w} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} \cdot T_{\min}} \right)_{GS_w} = 800 \cdot \left( \frac{293 - 288}{293 \cdot 288} \right) \frac{W}{K} = 0,0474 \frac{W}{K}$$

Die Berechnung des Entropiestroms durch die Wand erfolgt analog:

$$(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{Wand} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} \cdot T_{\min}} \right)_{Wand} = 800 \cdot \left( \frac{288 - 279}{288 \cdot 279} \right) \frac{W}{K} = 0,08961 \frac{W}{K}$$

Das vierte Teilsystem ist die Temperaturschicht  $GS_k$  mit der maximalen (warmen) Temperatur  $T_{\max} = 279$  K an der linken Seite der Schicht und der minimalen (kalten) Temperatur  $T_{\min} = 273$  K an der rechten Seite. Der Entropiestrom durch die kalte Temperaturschicht  $GS_k$  beträgt:

$$(\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_k} = \dot{Q} \cdot \left( \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} \cdot T_{\min}} \right)_{GS_k} = 800 \cdot \left( \frac{279 - 273}{279 \cdot 273} \right) \frac{W}{K} = 0,06302 \frac{W}{K}$$

Insgesamt beläuft sich der Entropiestrom durch die drei inneren Schichten (Teilsysteme 2 + 3 + 4) auf  $(0,0474 + 0,08961 + 0,06302) \text{ W/K} = 0,20 \text{ W/K}$ . Dieser Wert wird durch die irreversible Wärmeübertragung durch die drei Schichten  $GS_w$ , Wand und  $GS_k$  infolge der dort herrschenden Temperaturunterschiede erzeugt.

Prüfung: Ist die zeitliche Entropieänderung  $\Delta \dot{S}_{ges} = 0$ ?

$$\Delta \dot{S}_{ges} = \frac{800 \text{ W}}{293 \text{ K}} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_w} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{Wand} + (\dot{S}_2 - \dot{S}_1)_{GS_k} + \frac{-800 \text{ W}}{273 \text{ K}}$$

$$\Delta \dot{S}_{ges} = \frac{800 \text{ W}}{293 \text{ K}} + 0,0474 \frac{W}{K} + 0,08961 \frac{W}{K} + 0,06302 \frac{W}{K} + \frac{-800 \text{ W}}{273 \text{ K}} = 0$$

## Aufgabe 12.8: Erfüllt der Betrieb eines Axialkompressors den zweiten Hauptsatz?

Der Axialkompressor ist thermodynamisch gesehen ein offenes System. Das ideale Gas Luft wird angesaugt und stationär verdichtet. Es ist der erste Hauptsatz anzuwenden, um eine zweite Zustandsgröße am Austritt berechnen zu können. Erst danach kann mit der Gesamtentropie der zweite Hauptsatz für die Axialmaschine überprüft werden. Der erste Hauptsatz für offene Systeme in integraler Form lautet:

$$(q_{rev})_{12} + (w_t)_{12} = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2}$$





## 90 Lösungen und Lösungswege

Für alle idealen Gase gilt:  $h = c_p \cdot T$ .

$$(q_{\text{rev}})_{12} + (w_t)_{12} = c_p \cdot T_2 - c_p \cdot T_1 + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2}$$

Alle Größe bis auf die Temperatur  $T_2$  sind bekannt Somit lässt sich die mittlere Temperatur an der Austrittsebene 2 bestimmen.

$$T_2 = \frac{1}{c_p} \left( (q_{\text{rev}})_{12} + (w_t)_{12} + c_p \cdot T_1 - \frac{c_2^2}{2} + \frac{c_1^2}{2} \right)$$

Die an die Umgebung abgegebene Wärme  $(q_{\text{rev}})_{12}$  verlässt das System (strömendes Medium) und muss negativ angesetzt werden.

$$T_2 = \frac{\text{kg} \cdot \text{K}}{1,007 \text{ kJ}} \left( \frac{-26 \text{ kJ}}{\text{kg}} + \frac{127 \text{ kJ}}{\text{kg}} + \frac{1,007 \text{ kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 290 \text{ K} - \frac{1,4^2 \text{ m}^2}{2 \text{ s}^2} + \frac{0,8^2 \text{ m}^2}{2 \text{ s}^2} \right)$$

Es gilt die Umrechnungsbeziehung  $1 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 0,001 \text{ kJ/kg}$ .

$$T_2 = 390,3 \text{ K}$$

Zusammen mit den Wertepaaren  $p_2, T_2$  und  $p_1, T_1$ , lässt sich die spezifische Gesamtentropie des Axialkompressors bestimmen. Es gibt zwei Teilsysteme: Die strömende Luft ist das Medium im eigentlichen technischen System, die Umgebung, aus der die eingesaugte Luft kommt, das zweite Teilsystem. Die Formel für die spezifische Gesamtentropieänderung lautet:

$$\Delta s_{\text{ges}} = (s_2 - s_1)_{\text{1.TS}} + (s_2 - s_1)_{\text{Umgebung}}$$

A) Berechnung der spezifischen Entropieänderung des 1. Teilsystems. Aus Tabelle 12.2 wird die passende Formel ausgewählt.

$$(s_2 - s_1)_{\text{1.TS}} = c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

Der Index 1 steht für den Anfangszustand und 2 für den Endzustand des 1. Teilsystems. Alle Temperaturen sind in Kelvin einzusetzen. Der Logarithmus kann nur von einer dimensionslosen Zahl berechnet werden.

$$(s_2 - s_1)_{\text{1.TS}} = 1,007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \left( \frac{390,3 \text{ K}}{290 \text{ K}} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{3,6 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right) = -0,0686 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

B) Berechnung der spezifischen Entropieänderung in der Umgebung. Die Umgebung erhält +26 kJ/kg Wärme bei einer Oberflächentemperatur am Kompressor von 44 °C.

$$(s_2 - s_1)_{\text{Umgebung}} = \frac{(q_{\text{rev}})_{12}}{T_U} = \frac{26 \text{ kJ}}{\text{kg} (273,15 + 44) \text{ K}} = 0,08198 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Somit erhält man für das Gesamtsystem:

$$\Delta s_{\text{ges}} = -0,0686 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + 0,08198 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = 0,0133 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Die Gesamtentropieänderung ist positiv; deshalb ist der zweite Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt. Der funktionierende Axialkompressor erzeugt eine Entropie von 0,0133 kJ



## Lösungen und Lösungswege 91

pro kg Durchsatz und Kelvin. Je größer der positive Wert  $\Delta s_{\text{ges}}$  ist, desto stärker ist die Annahme berechtigt, dass am technischen System »Axialkompressor« noch energetische Verbesserungen denkbar sind.

Wenn Sie diese Aufgabe nochmals durchrechnen und zum Beispiel die reversible Wärmeabgabe an die Umgebung mit einer Wärmedämmung um die Hälfte auf 13 kJ/kg reduzieren, so steigt die Temperatur  $T_2$  auf 402,3 K und die Entropieänderung des Gesamtsystems sinkt auf +0,0051 kJ/(kg K). Eine Verbesserung des Prozesses ist immer anzustreben.

Auf der anderen Seite können Sie die an den Schaufeln übertragene technische Arbeit um 10 % auf 114,3 kJ/kg reduzieren und erneut den Prozess betrachten. Der erste Hauptsatz liefert Ihnen dann die Temperatur  $T_2 = 377,7$  K. Der zweite Hauptsatz liefert dann eine negative Gesamtentropieänderung,  $\Delta s_{\text{ges}} = -0,0197$  kJ/(kg K), was zum Versagen der Anlage führt. Der zweite Hauptsatz ist in diesem Fall verletzt, der gewünschte Druck  $p = 3,6$  bar am Ausgang des Axialkompressors kann nicht eingehalten werden. Erst wenn Sie den gewünschten Druck von 3,6 bar auf 3,35 bar reduzieren, ist die Gesamtentropieänderung wieder positiv.

### Aufgabe 12.9: Die Entropieänderung bestimmt die Strömungsrichtung

Dieses System besitzt nur ein einziges Teilsystem. Infolge der Wärmedämmung wird die Umgebung ausgeklammert. Die Gesamtentropieänderung bestimmt die Strömungsrichtung. Aus den leicht zu messenden Daten Druck und Temperatur kann mit einer passenden Gleichung aus Tabelle 12.2 die Gesamtentropie bestimmt werden. Wir wissen, dass ein Vorgang in Natur und Technik nur möglich ist, wenn  $\Delta s_{\text{ges}}$  größer als null ist; wenn Gesamtentropie erzeugt wird.

$$\Delta s_{\text{ges}} = c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

Hier müssen unter Umständen zwei Fälle durchgerechnet werden. Es ist aus der Strömungsmechanik bekannt, dass sich Fluidteilchen vom Hochdruck zum Niederdruck bewegen, wenn die Temperatur des Mediums konstant ist. Weil hier die Aufgabe sonderbar erscheint, nehmen wir das Gegenteil an: Die Strömung im Rohr bewegt sich von A nach B. Die Nachprüfung erfolgt mit  $\Delta s_{\text{ges}}$ .

Der Anfangszustand ist  $T_A$  und  $p_A$ , der Endzustand dann  $T_B$  und  $p_B$ .

$$\Delta s_{\text{ges}} = c_p \cdot \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_B}{p_A} \right)$$

$$\Delta s_{\text{ges}} = 1,010 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \left( \frac{(120 + 273,15)\text{K}}{(110 + 273,15)\text{K}} \right) - 0,2871 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln \left( \frac{1,62 \text{ bar}}{1,48 \text{ bar}} \right)$$

$$\Delta s_{\text{ges}} = 0,00007 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} > 0$$

Der positive Entropiewert sagt aus, dass die getroffene Annahme richtig war! Die Strömung verläuft von A nach B, gegen den höheren Druck.



## 92 Lösungen und Lösungswege

Sind die Temperaturen im Rohr gleich, setzt eine Strömung von B nach A ein. In die Gleichung für die Entropieänderung gehen nur  $R$  und die Drücke ein, und  $\Delta s_{\text{ges}} = 0,026 \text{ kJ}/(\text{kg K})$  wird positiv. Sind dagegen die Drücke an den Stellen A und B gleich und die Temperaturen unterschiedlich,  $T_B > T_A$ , dann strömt die Luft von A nach B.

### Aufgabe 12.10: Eine Flüssigkeit mit einem Quirl erwärmen

Es handelt sich um ein geschlossenes System, in dem bei konstantem Druck eine Wasssererwärmung stattfindet. Die Endtemperatur wird mithilfe des ersten Hauptsatzes bestimmt.

$$\underbrace{(Q_{\text{irr}})_{12}}_{=0} + \sum_{=0} (W_R)_{12} + W_{12} = m \cdot c_v \cdot T_2 - m \cdot c_v \cdot T_1$$

$$T_2 = \frac{W_{12}}{m \cdot c_v} + T_1 = \frac{120 \text{ kJ} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{2 \text{ kg} \cdot 4,203 \text{ kJ}} + (273,15 + 10) \text{ K} = 297,4 \text{ K}$$

Die Gesamtentropieänderung entspricht der im System erzeugten Entropie. Die Umgebung spielt aufgrund der adiabaten Wände keine Rolle.

$$\Delta S_{\text{ges}} = m \cdot (s_2 - s_1)_{\text{System}}$$

$$\Delta S_{\text{ges}} = m \cdot c_p \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 2 \text{ kg} \cdot 4,203 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \ln\left(\frac{297,4 \text{ K}}{(273,15 + 10) \text{ K}}\right) = 0,413 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

Das Medium ist Wasser; daher ist  $c_p = c_v$ ,  $R = 0$  und außerdem gilt  $p_1 = p_2$ . Der zweite Hauptsatz ist erfüllt; durch Zufuhr von Arbeit erhöht sich die innere Energie  $U$  des Wassers. Dies kann durch Temperaturmessungen überprüft werden.

### Aufgabe 13.1: Aus einer Druckflasche entweicht Sauerstoff

Mit den gegebenen Daten lässt sich der Joule-Thomson-Koeffizient im Anfangszustand 1 ( $p_1 = 30 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ) berechnen.

$$\mu_{\text{JT}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_1} - b - 3 \cdot \frac{a \cdot b \cdot p_1}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_1^2} \right)$$

$$\mu_{\text{JT}} = 0,2482 \text{ K/bar}$$

Erinnern Sie sich, dass der Joule-Thomson-Koeffizient durch die partielle Ableitung

$$\mu_{\text{JT}} = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_h$$

definiert ist. Die partielle Ableitung kann durch geeignete Differenzen näherungsweise ersetzt werden.

$$0,2482 \frac{\text{K}}{\text{bar}} \cong \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T_2 - T_1}{p_2 - p_1}$$





## Lösungen und Lösungswege 93

Gesucht ist die angenäherte Temperatur  $T_2$ .

$$T_2 - T_1 \cong 0,2482 \frac{\text{K}}{\text{bar}} \cdot (p_2 - p_1)$$

$$T_2 \cong 0,2482 \frac{\text{K}}{\text{bar}} \cdot (1 \text{ bar} - 30 \text{ bar}) + 300 \text{ K} = 292,8 \text{ K}$$

Die Temperatur des expandierten Gases ist bei einem Druckgefälle von 29 bar von 300 K auf etwa 292,8 K gefallen. Bei größeren Druckdifferenzen zwischen Anfangs- und Endzustand sollte zwischen 1 und 2 integriert werden, dann entfallen Ansätze für die Differenzen  $\Delta T$  und  $\Delta p$ .

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p}{\mathfrak{R}^2 \cdot T^2} \right)$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = T_2 - T_1 = \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p}{\mathfrak{R}^2 \cdot T^2} \right) dp$$

Zu beachten ist, dass die Temperatur vom Druck abhängig ist, denn bei jedem kleinen Expansionsschritt auf der Druckachse ändert sich auch die Temperatur. Allerdings ist die Enthalpie  $h = \text{konstant}$ , und damit erfolgt die Expansion längs der Isenthalpen im  $T$ - $p$ -Diagramm.

## Aufgabe 13.2: Isenthalpe Expansion eines Gases bei hohem Druck

Hilfestellung: Die isenthalpe Expansion verläuft über einen großen Druckbereich, deshalb müssen Zwischenschritte mit Gleichgewichtszuständen beachtet werden. Ein Druckintervall von 25 bar ist mit hinreichender Genauigkeit geeignet für derartige Untersuchungen. Also erfolgt die Unterteilung in Zwischenschritten von  $p_1 = 425 \text{ bar}$  bis  $400 \text{ bar}$ , von  $400 \text{ bar}$  bis  $375 \text{ bar}$  und so weiter bis zum letzten Schritt  $25 \text{ bar}$  bis  $p_2 = 1 \text{ bar}$ . In jedem Schritt wird angenommen, dass die Expansion den Gleichgewichtszustand beibehält.

Der Kurvenverlauf der Isenthalpen im  $T$ - $p$ -Diagramm wird durch den Gradienten beziehungsweise durch den Joule-Thomson-Koeffizienten und den Anfangszustand ( $p_1 = 425 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 293 \text{ K}$ ) bestimmt.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \mu_{JT}$$

Sauerstoff verhält sich wie ein Van-der-Waals-Gas. Deshalb ist der Joule-Thomson-Koeffizient aus der Van-der-Waals-Zustandsgleichung zu ermitteln.

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p}{\mathfrak{R}^2 \cdot T^2} \right)$$

In jedem Druckintervall wird der Gradient  $\partial T / \partial p$  durch den Differenzenquotienten  $\Delta T / \Delta p$  ersetzt, der wiederum durch die Grenzen der Zwischenintervalle ausgedrückt wird.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = \frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T_j - T_{j+1}}{p_j - p_{j+1}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)$$





## 94 Lösungen und Lösungswege

Der Index  $j = 1$  bezeichnet den Anfangszustand von Druck und Temperatur ( $T_{j=1} = 293 \text{ K}$ ,  $p_{j=1} = 425 \text{ bar}$ ), der Index  $j+1$  das linke Ende des 1. Druckintervalls ( $T_{j+1=2} = ? \text{ K}$ ,  $p_{j+1=2} = 400 \text{ bar}$ ), wobei  $T_{j+1}$  noch zu bestimmen ist. Jeder Index  $j$  gibt sozusagen einen Zustandspunkt im  $T$ - $p$ -Diagramm an. Gleichzeitig bezeichnet  $j$  die laufende Nummer der definierten Druckintervalle. Beachten Sie, dass der Überströmvorgang im  $T$ - $p$ -Diagramm vom hohen Druck  $425 \text{ bar}$  ( $j = 1$ ) zum Atmosphärendruck  $1 \text{ bar}$  ( $j = 19$ ) verläuft. Der momentan betrachtete Endzustand im ersten Intervall ist  $p_{j=2} = 400 \text{ bar}$ ; hierfür ist die Temperatur  $T_{j=2}$  gesucht. Mithilfe der oben genannten Gleichung finden Sie die Lösung im 1. Druckintervall aus folgender Gleichung:

$$T_{j=2} = \frac{-1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot 293 \text{ K}} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot 425 \text{ bar}}{\mathfrak{R}^2 \cdot (293 \text{ K})^2} \right) \cdot (425 - 400) \text{ bar} + 293 \text{ K}$$

$$j = 2: \frac{294,13 \text{ K} - T_3}{400 \text{ bar} - 375 \text{ bar}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot 294,13 \text{ K}} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot 400 \text{ bar}}{\mathfrak{R}^2 \cdot (294,13 \text{ K})^2} \right)$$

Es handelt sich um das zweite Druckintervall ( $j = 2$ ) und gesucht ist die Temperatur  $T_3$ .

$$T_3 = 294,75 \text{ K}$$

Mit diesen Methoden können Sie weitere Temperaturen für die definierten Druckintervalle bestimmen.

Der Index  $j = 1$  kennzeichnet den Anfangszustand von Druck und Temperatur ( $T_{j=1} = 293 \text{ K}$ ,  $p_{j=1} = 425 \text{ bar}$ ) und der Index  $j+1$  das linke Ende des 1. Druckintervalls ( $T_{j+1=2} = ? \text{ K}$ ,  $p_{j+1=2} = 400 \text{ bar}$ ), wobei  $T_{j+1}$  noch zu bestimmen ist. Der Index  $j$  gibt jeweils einen Zustandspunkt im  $T$ - $p$ -Diagramm an (vergleiche das folgende  $T$ - $p$ -Diagramm weiter unten). Gleichzeitig bezeichnet  $j$  die laufende Nummer der definierten Druckintervalle. Beachten Sie, dass der Überströmvorgang im  $T$ - $p$ -Diagramm vom hohen Druck von  $425 \text{ bar}$  ( $j = 1$ ) zum Atmosphärendruck von  $1 \text{ bar}$  ( $j = 19$ ) verläuft. Der momentan betrachtete Endzustand im ersten Intervall hat den Druck  $p_{j=2} = 400 \text{ bar}$  und hierfür ist die entsprechende Temperatur  $T_{j=2}$  gesucht. Mithilfe der oben genannten Gleichung finden Sie die Lösung im 1. Druckintervall mit folgender Gleichung:

$$\text{Startpunkt } j = 1: \frac{T_j - T_{j+1}}{p_j - p_{j+1}} = \frac{1}{C_p} \underbrace{\left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)}_{\mu_T \text{ am Punkt } j=1}$$

Für die Temperatur  $T_1$  in dieser Gleichung ist die gegebene Temperatur  $T_{j=1} = 293 \text{ K}$  einzusetzen und für  $p_{j=1}$  gilt der Wert von  $425 \text{ bar}$ . Daraus erhalten Sie die Temperatur  $T_{j+1} = T_2$  des Sauerstoffs bei einem Druck von  $p_{j+1} = 400 \text{ bar}$ .

$$j = 1:$$

$$T_{j+1} = T_2 = \frac{-1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot 293 \text{ K}} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot 425 \text{ bar}}{\mathfrak{R}^2 \cdot (293 \text{ K})^2} \right) \cdot (425 - 400) \text{ bar} + 293 \text{ K}$$



## Lösungen und Lösungswege 95

Mit den gegebenen Daten  $a$ ,  $b$  und  $\mathfrak{R}$  ergibt sich am linken Ende des 1. Druckintervalls die Temperatur beim Druck  $p = p_2 = 400$  bar:

$$T_{j+1} = T_2 = 294,13 \text{ K}$$

Die Temperatur hat sich im ersten Druckintervall erhöht, weil der Joule-Thomson-Koeffizient dort negativ ist ( $\mu_{JT} = -0,04502 \text{ K/bar}$ ).

Hoffentlich sind Sie mit den Indizes  $j$  an den Druck- und Temperaturwerten und dem Anfangszustand 1 nicht durcheinander gekommen. Beachten Sie das sich das zweite Druckintervall vom Druckpunkt  $p_{j=2} = 400$  bar bis zum Druckpunkt  $p_{j=3} = 375$  bar erstreckt. Der Index steht bei  $j = 2$ . Die rechte Intervallgrenze ist aus der Rechnung im ersten Intervall bekannt, denn die zum bekannten Druck  $p_2 = 400$  bar gehörige Temperatur  $T_2 = 294,13 \text{ K}$  haben Sie bereits ermittelt. Der Startpunkt liegt jetzt bei  $j = 2$  und für die gesuchte Temperatur  $T_{j+1} = T_3$  gilt wieder die entsprechende Gleichung aus dem 1. Intervall.

$$\text{Startpunkt } j = 2: \quad \frac{T_j - T_{j+1}}{p_j - p_{j+1}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)$$

$$j = 2: \quad \frac{294,13 \text{ K} - T_3}{400 \text{ bar} - 375 \text{ bar}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot 294,13 \text{ K}} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot (294,13 \text{ K})^2} \right)$$

Die Auswertung liefert die gesuchte Temperatur  $T_3$  an der linken Grenze des zweiten Intervalls (Punkt  $j = 3$ ).

$$T_3 = 294,75 \text{ K}$$

$T_3$  gehört zum Druck  $p_3 = 375$  bar. Wieder ist die Temperatur gestiegen, da auch im zweiten Intervall der Joule-Thomson-Koeffizient am Punkt  $j = 2$  negativ ist ( $\mu_{JT} = -0,0251 \text{ K/bar}$ ). Beachten Sie die Regel, dass jeder Startpunkt rechts von der Inversionstemperatur zu einer Erwärmung des expandierenden Gases führt.

Behandeln Sie das dritte Intervall. Das Druckintervall ist begrenzt von den Drücken  $p_3 = 375$  bar und  $p_4 = 350$  bar. Sie benötigen die eben bestimmte Temperatur  $T_3 = 294,75 \text{ K}$ . Aus der Gleichung

$$\text{Startpunkt } j = 3: \quad \frac{T_j - T_{j+1}}{p_j - p_{j+1}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)$$

$$j = 3: \quad \frac{T_3 - T_4}{p_3 - p_4} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_3} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_3}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_3^2} \right)$$

lässt sich  $T_4$  bestimmen.

$$T_4 = 294,89 \text{ K}$$

Somit ist der Zustandspunkt  $j = 4$  im  $T$ - $p$ -Diagramm gegeben ( $p_4 = 350$  bar,  $T_4 = 294,89 \text{ K}$ ). Die Daten werden für die folgende Rechnung im 4. Druckintervall gebraucht. Wieder ist die Temperatur des expandierenden Sauerstoffs leicht gestiegen. Wenn Sie den Joule-Thomson-Koeffizienten am Punkt  $j = 3$  untersuchen, erhalten Sie den Wert:  $\mu_{JT} = -0,0058 \text{ K/bar}$ .



## 96 Lösungen und Lösungswege

Das 4. Druckintervall mit  $p_4 = 350$  bar,  $T_4 = 294,89$  K und  $p_5 = 325$  bar liefert die Temperatur  $T_5$ . Die zuständige Rekursionsformel ist wieder:

$$\text{Startpunkt } j = 4: \quad \frac{T_j - T_{j+1}}{p_j - p_{j+1}} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)$$

$$j = 4: \quad \frac{T_4 - T_5}{p_4 - p_5} = \frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_4} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_4}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_4^2} \right)$$

Alle Daten, ausgenommen die Temperatur  $T_5$ , sind bekannt. Die Umstellung nach  $T_5$  ergibt:

$$T_5 = T_4 - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_4} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_4}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_4^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j=4} \cdot (p_4 - p_5)$$

$$T_5 = 294,57 \text{ K}$$

Die Sauerstofftemperatur kühlt leicht ab im Vergleich zu  $T_4$ . Sie haben die Inversionstemperatur  $T_i$  für diesen Drosselvorgang unterschritten. Später werden wir  $T_i$  noch genau bestimmen. Zurzeit können Sie nur sagen, dass sie zwischen 294,57 K und 294,89 K liegt. Der Joule-Thomson-Koeffizient am Zustandspunkt  $j = 4$  ist positiv geworden:  $\mu_{JT} = +0,01311$  K/bar. Die Enthalpiekurve  $h = \text{konstant}$  fällt zum ersten Mal leicht ab!

Nach  $j = 4$  kommt  $j = 5$ , das fünfte Druckintervall an die Reihe. Die jetzt gültigen Daten sind:  $p_5 = 325$  bar,  $T_5 = 294,57$  K,  $p_6 = 300$  bar.  $T_6$  wird gesucht! Die zuständige Rekursionsformel lautet allgemein:

$$\text{Startpunkt } j = 5: \quad T_{j+1} = T_j - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j} \cdot (p_j - p_{j+1})$$

Infolgedessen ergibt sich für den Zustandspunkt  $j = 5$  die Auswerteformel:

$$j = 5: \quad T_6 = T_5 - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_5} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_5}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_5^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j=5 \text{ ist } 0,031817 \text{ K/bar}} \cdot (p_5 - p_6)$$

$$T_6 = 293,77 \text{ K}$$

Die Gastemperatur im 5. Druckintervall der Expansion ist von  $T_5 = 294,57$  K auf die Temperatur  $T_6 = 293,77$  K gefallen. Der Joule-Thomson-Koeffizient besitzt am Punkt  $j = 5$  einen positiven Wert:  $\mu_{JT} = 0,03182$  K/bar.

Es geht weiter mit den Druckintervallen  $j = 6, 7, 8, \dots, 16, 17$  und schließlich das letzte Intervall mit der Nummer  $j = 18$ . Sie sollten die Intervallnummern nacheinander durcharbeiten. Die Vorgehensweise sollte beibehalten werden.

Druckintervall  $j = 6$ . Am Startpunkt  $j = 6$  wird die Temperatur  $T_7$  berechnet:

Daten:  $p_6 = 300$  bar,  $T_6 = 293,77$  K,  $p_7 = 275$  bar.



## Lösungen und Lösungswege 97

$$\text{Allgemein: } T_{j+1} = T_j - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j} \cdot (p_j - p_{j+1})$$

$$j = 6: \quad T_7 = T_6 - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_6} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_6}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_6^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j=6 \text{ ist } 0,050499 \text{ K/bar}} \cdot (p_6 - p_7)$$

$$T_7 = 292,51 \text{ K}$$

Druckintervall  $j = 7$ . Am Startpunkt  $j = 7$  wird die Temperatur  $T_8$  berechnet:

Daten:  $p_7 = 275 \text{ bar}$ ,  $T_7 = 292,51 \text{ K}$ ,  $p_8 = 250 \text{ bar}$ .

$$\text{Allgemein: } T_{j+1} = T_j - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_j} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_j}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_j^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j} \cdot (p_j - p_{j+1})$$

$$j = 7: \quad T_8 = T_7 - \underbrace{\frac{1}{C_p} \left( \frac{2 \cdot a}{\mathfrak{R} \cdot T_7} - b - 3 \frac{a \cdot b \cdot p_7}{\mathfrak{R}^2 \cdot T_7^2} \right)}_{\mu_{JT} \text{ am Punkt } j=7 \text{ ist } 0,069332 \text{ K/bar}} \cdot (p_7 - p_8)$$

$$T_8 = 290,78 \text{ K}$$

Druckintervall  $j = 8$ . Am Startpunkt  $j = 8$  wird  $T_9$  berechnet:

Daten:  $p_8 = 250 \text{ bar}$ ,  $T_8 = 290,78 \text{ K}$ ,  $p_9 = 225 \text{ bar}$

Es folgt:  $T_9 = 288,56 \text{ K}$ ,  $\mu_{JT} = 0,08849 \text{ K/bar}$

Die weiteren Daten werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Intervall-Nummer	Druck bar	Temperatur K	Druck bar	Temperatur K	$\mu_{JT}$ K/bar
8	$p_8 = 250$	$T_8 = 290,78$	$p_9 = 225$	$T_9 = 288,56$	0,088493
9	$p_9 = 225$	$T_9 = 288,56$	$p_{10} = 200$	$T_{10} = 285,86$	0,10817
10	$p_{10} = 200$	$T_{10} = 285,86$	$p_{11} = 175$	$T_{11} = 282,64$	0,12857
11	$p_{11} = 175$	$T_{11} = 282,64$	$p_{12} = 150$	$T_{12} = 278,89$	0,14992
12	$p_{12} = 150$	$T_{12} = 278,89$	$p_{13} = 125$	$T_{13} = 274,58$	0,17249
13	$p_{13} = 125$	$T_{13} = 274,58$	$p_{14} = 100$	$T_{14} = 269,67$	0,19661
14	$p_{14} = 100$	$T_{14} = 269,67$	$p_{15} = 75$	$T_{15} = 264,10$	0,22268
15	$p_{15} = 75$	$T_{15} = 264,10$	$p_{16} = 50$	$T_{16} = 257,82$	0,25120
16	$p_{16} = 50$	$T_{16} = 264,10$	$p_{17} = 25$	$T_{17} = 250,75$	0,28285
17	$p_{17} = 25$	$T_{17} = 250,75$	$p_{18} = 1$	$T_{18} = 243,10$	0,31851

Temperaturen  $T_j$  der einzelnen Rechenschritte



## 98 Lösungen und Lösungswege

Mit dem Ergebnis  $T_{j=18} = 243,1$  K ist die Rechnung beendet.  $T_{18}$  entspricht dem physikalischen Endzustand 2 der isenthalpen Expansion. Der Abkühleffekt von der Anfangstemperatur  $T_1$  bis zur Temperatur im Endzustand  $T_2$  (entspricht  $T_{j=18}$ ) wird durch die Temperaturänderung  $T_2 - T_1$  ausgedrückt.

$$T_2 - T_1 = 243,10 \text{ K} - 293 \text{ K} = -49,9 \text{ K}$$

Einen weiteren Einblick in die Sachlage der isenthalpen Expansion kann durch den Verlauf der konstanten Isenthalpen aus der folgenden Abbildung erlangt werden. Als Nächstes ist die Inversionstemperatur  $T_i$  zu bestimmen.

Zur Ermittlung der Inversionstemperatur suchen Sie das Temperaturmaximum der Isenthalpen in der Abbildung auf und bestimmen dort den Wert. Sie wissen aus der durchgeführten Rechnung, in welchen Temperaturbereich das Maximum zu suchen ist. Die Ablesung aus der Kurve ist eine gute Schätzung, die in den meisten Fällen genügend genau ist. Ein anderer Weg ist der Folgende: Mit den Daten der einzelnen Rechnungen verfügen Sie über die Zustandsdaten  $p_j$  und  $T_j$  für  $j = 1 \dots 18$ . Sie könnten eine Approximationsfunktion  $T(p)$  errechnen. Das ist Extraarbeit, aber vielleicht haben Sie Erfahrung mit nichtlinearen Approximationen. Meine nichtlineare Approximation für diese Aufgabe ergab:

$$T(p) = 243,0910528 + 0,3178471832 p - 0,00055546329 p^2 + 0,1971632617 \times 10^{-6} p^3$$

Das Temperaturmaximum erhalten Sie mit der Bedingung  $dT/dp = 0$ . Bei welchem Druck nimmt die Ableitung der Approximationsfunktion den Wert null an?

$$dT/dp = 0,317847471832 - 0,00111092658 p + 0,591489785 \times 10^{-6} p^2$$

Durch die Nullsetzung ergibt sich der Druck  $p$ , der zur Inversionstemperatur  $T_i$  gehört.

$$0 = 0,317847471832 - 0,00111092658 p + 0,591489785 \times 10^{-6} p^2$$

Im Druckintervall von 1 bar bis 425 bar erfüllt der Druckwert  $p = 352,13$  bar die gewünschte Bedingung. Schließlich ist mithilfe der Approximationsfunktion  $T_i = T(p = 352,13 \text{ bar})$  gleich 294,7 K. Am Zustandspunkt mit den Koordinaten  $p = 352,13$  bar, Inversionstemperatur  $T_i = 294,7$  K ist der Joule-Thomson-Koeffizient null.

Zum Schluss gehen wir der Frage nach, wie groß die konstante Enthalpie längs der Expansionskurve in der Abbildung ist? Hierzu wird ein Bezugspunkt der Enthalpie benötigt. Mehrere Möglichkeiten bieten sich an. Beziehen Sie sich auf den Bezugspunkt eines idealen Gases, so ist die spezifische Enthalpie am absoluten Nullpunkt gleich null.

$$h(T = 0 \text{ K}) = 0 \text{ kJ/kg}$$

Für das ideale Gas Sauerstoff wird in der Chemie der Referenzwert im Standardzustand ( $p = 1,01325$  bar,  $T = 298,15$  K) als Standardenthalpie definiert, weil meistens die Abweichungen vom Standardzustand interessieren.

$$h(p = 1,01325 \text{ bar}, T = 298,15 \text{ K}) = 0 \text{ kJ/kg}$$

Manche Autoren schließen sich der neuesten Empfehlung aus der Chemie an, den Standardzustand am Druckpunkt  $p = 1$  bar bei der Temperatur 298,15 K (25 °C), festzulegen.



## Lösungen und Lösungswege 99

Jedoch die meisten Tabellenwerke verbleiben bei der Atmosphäre  $1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar}$ . Die Unterschiede in den Tabellen sind normalerweise klein und können oft vernachlässigt werden. In diesem Buch ist der Bezugsdruck für den Norm- und Standardzustand eine Atmosphäre,  $p = 1,01325 \text{ bar}$ .

Damit die Vielfalt der Referenzwerte (Bezugswerte) weiter steigt, wählen wir für das »reale Gas Sauerstoff« am Zustandspunkt  $p = 1 \text{ bar}$ ,  $T = 298,15 \text{ K}$  ( $25 \text{ }^\circ\text{C}$ ) den Bezugswert:

$$H(p = 1 \text{ bar}, T = 298,15 \text{ K}) = -9,44 \frac{\text{J}}{\text{mol}}$$

Die Aufgabe behandelt das reale Gas Sauerstoff. Deshalb sollten Sie den aus realen Messungen stammenden realen Sauerstoffbezugswert der Enthalpie bei  $1 \text{ bar}$  und  $298,15 \text{ K}$  gutheißen. Die Anpassung an die Daten dieses Beispiels ist am einfachsten am Punkt  $j = 18$  möglich, weil dort der Druck  $1 \text{ bar}$  ist. Wenn bei  $p = 1 \text{ bar}$  und  $T = 298,15 \text{ K}$  die Enthalpie  $H = -9,44 \text{ J/mol}$  ist, wie groß ist dann  $H$  am Zustandspunkt  $j = 18$ , bei  $p = 1 \text{ bar}$  und  $T = 243,10 \text{ K}$  ( $= T_{18}$ )? Hierfür benötigen Sie die Enthalpietabelle des realen Gase  $\text{O}_2$ . Im folgenden Tabellenauszug, der nur für  $p = 1 \text{ bar}$  gilt, darf linear interpoliert werden.

Druck bar	Temperatur $\vartheta$ $^\circ\text{C}$	H J/mol
1	-50	-2186,8
1	-25	-1480,8
1	0	-742,14
1	25	-9,44

Absolute Enthalpie des realen Gases Sauerstoff. Der reale Bezugswert bei  $p = 1 \text{ bar}$ , Temperatur  $= 25 \text{ }^\circ\text{C}$  ist  $H = -9,44 \text{ J/mol}$ . Man geht davon aus, dass dort noch kein ideales Gas vorliegt, da dort der Realgasfaktor  $z = 0,99$  beträgt.

Interpoliert ergibt sich die  $H$  bei der Temperatur  $T_{18} = 243,10 \text{ K}$  ( $\vartheta = -30,05 \text{ }^\circ\text{C}$ ) zu:

$$H = -1623,4 \frac{\text{J}}{\text{mol}} = -1623,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}$$

Mit der Molmasse von  $\text{O}_2$ ,  $m_{\text{Mol}} = 31,999 \text{ kg/kmol}$ , folgt weiter:

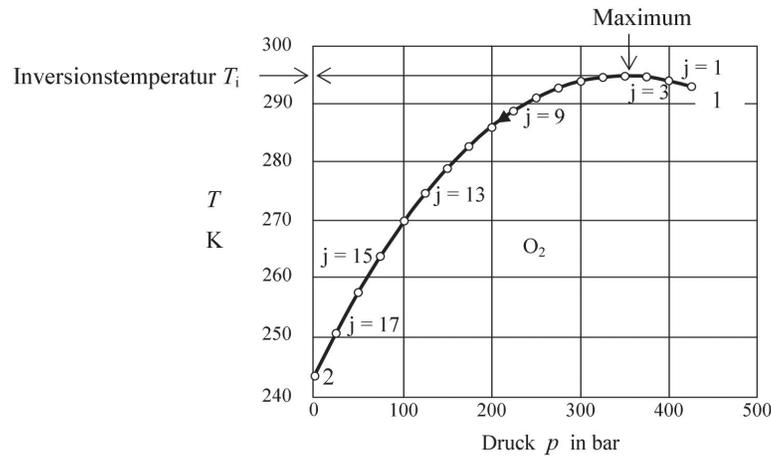
$$H = \frac{-1623,4 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}}}{31,999 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}} = -50,73 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Sie können hiermit sagen, dass längs der Isenthalpen in Abbildung 7 die Enthalpie  $H = -50,73 \text{ kJ/kg}$  konstant ist. Der verwendete Bezugswert ( $p = 1 \text{ bar}$  und  $T = 298,15 \text{ K}$ ) sollte dabei erwähnt werden.

Aus den berechneten Temperaturen wurde das  $T$ - $p$ -Diagramm erstellt. Vom Anfangszustand 1 ( $j = 1$ ) bis zum Endzustand 2 des Sauerstoffs ( $j = 18$ ) fällt die Temperatur des Sauerstoffs um  $49,9 \text{ }^\circ\text{C}$  ab, obwohl am Anfang eine geringe Temperaturzunahme bis zur Inversionstemperatur von  $294,7 \text{ K}$ , zu verzeichnen war.



## 100 Lösungen und Lösungswege



**Abbildung 7:** Der Temperaturverlauf der Expansion. Das Maximum der Kurve kennzeichnet die Inversionstemperatur.

### Aufgabe 14.1: Entropieänderung einer polytropen Zustandsänderung

Bei einer polytropen Zustandsänderung lässt sich das Druckverhältnis  $p_2/p_1$  in der Gleichung für die Entropieänderung

$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

ersetzen durch

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Man erhält die Lösung:

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \ln \left\{ \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right\} \\ &= c_p \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \cdot \left( \frac{n}{n-1} \right) \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \\ &= \left\{ c_p - (c_p - c_v) \cdot \left( \frac{n}{n-1} \right) \right\} \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \quad \text{mit} \quad c_p = \kappa \cdot c_v \\ &= c_v \cdot \left\{ \kappa \cdot \left( 1 - \frac{n}{n-1} \right) + \frac{n}{n-1} \right\} \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \\ s_2 - s_1 &= c_v \cdot \left( \frac{n - \kappa}{n - 1} \right) \cdot \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \end{aligned}$$



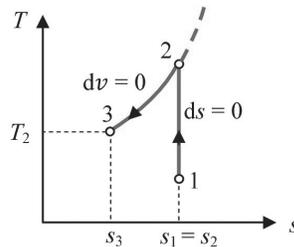
Die Entropieänderung hängt nur von der Art des Gases und von den Temperaturen an den Zustandspunkten 1 und 2 ab.

## Aufgabe 14.2: Übertragung der Prozessfunktionen $ds = 0$ und $dv = 0$ aus dem $p$ - $v$ -Diagramm in das $T$ - $s$ -Diagramm

Die Isentrope im  $T$ - $s$ -Diagramm ist eine senkrechte Linie zwischen den Zustandspunkten 1 und 2. Der Zustandspunkt 1 liegt unten bei der kleineren Temperatur, denn das Temperaturverhältnis einer Isentropen

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

sagt aus, dass mit  $\kappa = 1,4$  und  $p_1/p_2 < 1$  das Temperaturverhältnis  $T_1/T_2$  auch kleiner als 1 bleibt. Somit ist  $T_2$  größer als  $T_1$ . Der Richtungspfeil zeigt im  $p$ - $v$ -Diagramm von 1 nach 2 und diese Richtungsinformation bleibt im  $T$ - $s$ -Diagramm unverändert.



**Abbildung 8:** Die Prozessverläufe  $ds = 0$  und  $dv = 0$  im  $T$ - $s$ -Diagramm.

Vom Zustandspunkt 2 nach 3 gilt die Prozessfunktion  $dv = 0$ , die im  $T$ - $s$ -Diagramm die Form einer Parabel besitzt. Im  $p$ - $v$ -Diagramm ist  $p_3$  kleiner als  $p_2$  und mit der Gleichung einer Isochoren eines idealen Gases

$$\frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{p_2}$$

die an dieses Beispiel angepasst werden muss, folgt:

$$\frac{T_2}{p_2} = \frac{T_3}{p_3} \quad \text{oder} \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} > 1$$

Somit ist  $T_2$  größer als  $T_3$ . Der Kurvenverlauf  $dv = 0$  knickt am Zustandspunkt 2 nach unten zum Punkt 3 ab und steigt nicht weiter an. Der Richtungspfeil zeigt unverändert von 2 nach 3. Die Projektion dieses Pfeils auf die  $s$ -Achse gibt die Information preis, dass  $s_3$  kleiner ist als  $s_2$ , was Wärmeabfuhr bedeutet. Der Betrag der spezifischen Wärmeabfuhr  $q_{23}$  wird durch die Fläche unter der Kurve  $dv = 0$  von  $s_3$  bis  $s_2$  repräsentiert. Das  $T$ - $s$ -Diagramm ist erstellt; es hilft oft, den Überblick zu behalten.



## 102 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 14.3: Sind Änderungen der inneren Energie wegunabhängig?

Weg A: Zuerst wird die Änderung der inneren Energie  $u_3 - u_1$  längs des Prozessweges A bestimmt. Die Rechnung gelingt mithilfe des ersten Hauptsatzes für geschlossene Systeme, weil dort die innere Energie vorkommt.

$$q_{13} + w_{13} = u_3 - u_1$$

Aufgrund der zwei Zustandsfunktionen  $dT = 0$  und  $dp = 0$  setzt sich die reversible Wärme  $q_{13}$  formal aus den Anteilen  $q_{12}$  und  $q_{23}$  zusammen. Das gleiche gilt auch für die spezifische thermodynamische Arbeit  $w_{13} = w_{12} + w_{23}$ .

$$u_3 - u_1 = q_{12} + q_{23} + w_{12} + w_{23}$$

Nebenrechnungen: Für  $q_{12}$  und  $w_{12}$  ist die Zustandsänderung isotherm.

$$q_{12} = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)$$

$$w_{12} = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right)$$

Nebenrechnungen: Für  $q_{23}$  und  $w_{23}$  ist die Zustandsänderung isobar. Anfangs- und Endzustand werden mit den Bezeichnungen 2 und 3 versehen.

$$q_{23} = c_p \Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \cdot (T_3 - T_2)$$

$$w_{23} = -R \cdot (T_3 - T_2)$$

Für die Differenz der inneren Energien folgt weiter:

$$u_3 - u_1 = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) + c_p \Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \cdot (T_3 - T_2) + p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) - R \cdot (T_3 - T_2)$$

$$u_3 - u_1 = \underbrace{p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) - p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right)}_{=0} + c_p \Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \cdot (T_3 - T_2) - R \cdot (T_3 - T_2)$$

$$u_3 - u_1 = (c_p \Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} - R) \cdot (T_3 - T_2)$$

$$u_3 - u_1 = c_v \Big|_{\vartheta_2}^{\vartheta_3} \cdot (T_3 - T_2)$$

Die spezifische Änderung der inneren Energie längs des Prozessweges A kann mit den gegebenen Daten berechnet werden.

Weg B: Dieser Prozessweg besteht nur aus der Polytropen mit dem Polytropenexponenten  $n = 1,536$  zwischen Zustand 1 und 3. Aus der Auflistung aller Polytropengleichungen im Abschnitt »Polytrope Zustandsänderung« in Kapitel 14 kann eine entsprechende Gleichung ausgewählt werden. Leider ist keine direkte Gleichung für  $u_3 - u_1$  dabei. Also wählen Sie



## Lösungen und Lösungswege 103

wieder, ähnlich wie Weg A, den ersten Hauptsatz für geschlossene Systeme, denn dort kommt die innere Energie vor.

$$u_3 - u_1 = q_{13} + w_{13}$$

Nebenrechnungen: Für  $q_{13}$  und  $w_{13}$  ist die Zustandsänderung polytrop.

$$q_{13} = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} \cdot w_{13}$$

$$w_{13} = \frac{R}{n - 1} \cdot (T_3 - T_1)$$

Die Gleichung für die Änderung der spezifischen inneren Energie ist einfacher geworden.

$$u_3 - u_1 = \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} \cdot w_{13} + w_{13} = \left( \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} + 1 \right) \cdot w_{13}$$

$$u_3 - u_1 = \left( \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} + \frac{\kappa - 1}{\kappa - 1} \right) \frac{R}{n - 1} \cdot (T_3 - T_1)$$

$$u_3 - u_1 = \left( \frac{n - 1}{\kappa - 1} \right) \frac{R}{n - 1} \cdot (T_3 - T_1)$$

$$u_3 - u_1 = \frac{R}{\kappa - 1} \cdot (T_3 - T_1), \quad \text{wobei} \quad \frac{R}{\kappa - 1} = c_v = c_v|_{\theta_1}^{\theta_3} \quad \text{ist}$$

$$u_3 - u_1 = c_v|_{\theta_1}^{\theta_3} \cdot (T_3 - T_1), \quad \text{wobei} \quad T_1 = T_2 \quad \text{ist}$$

Die spezifische Änderung der inneren Energie längs des Prozessweges B unterscheidet sich nicht vom Ergebnis aus der Prozessführung A. Somit kann gesagt werden, dass die Änderung der spezifischen inneren Energie  $u_3 - u_1$  (und damit auch die innere Energie  $U_3 - U_1$ ) nicht vom Prozessweg abhängt, unabhängig davon, wie der Weg von 1 nach 3 verläuft. Die innere Energie ist eine Zustandsgröße, die ein totales Differenzial vorweisen kann.

Als Abschluss soll noch der Zahlenwert für  $u_3 - u_1$  ermittelt werden. Das Prozessmedium ist das ideale Gas »Luft«; die ausschlaggebenden Daten sind  $c_v|_{\theta_2}^{\theta_3}$ ,  $T_1$  und  $T_3$ . Die ideale Gasgleichung gilt natürlich an jeder Stelle im  $p$ - $v$ -Diagramm. Sie benötigen die Temperatur am Zustandspunkt 3. Der Druck  $p_3$  entspricht  $p_2$ .

Am Zustandspunkt 1 gilt:

$$v_1 = \frac{R \cdot T_1}{p_1} = 0,8613 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Am Zustandspunkt 2 lässt sich der Druck  $p_2$  berechnen.

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = 8,613 \text{ bar}$$

Längs der Polytropen gibt es die Polytropenfunktion  $p(v)$  als Zahlenwertgleichung, die aus der Polytropengleichung  $p \cdot v^n = \text{konstant}$  an allen Punkten der Polytropen ermittelt werden kann. Am Punkt 1 sind die Daten bekannt.

$$p_1 \cdot v_1^n = \text{konst.}$$

$$1 \cdot 0,8613^{1,536} = \text{konst.} = 0,79506$$



## 104 Lösungen und Lösungswege

An jeder Stelle längs der Polytropen gilt die Zahlenwertgleichung:

$$p = \frac{0,79506}{v^{1,536}}$$

in der  $v$  als reine Zahl eingesetzt werden darf, um  $p$  als reine Zahl zu erhalten. Die richtige Einheit von  $p$  ist bar. Wenn  $p = 8,613$  eingesetzt wird, befinden Sie sich am Punkt 3 und können dort  $v_3$  aus der Zahlenwertgleichung berechnen.

$$8,613 = \frac{0,79506}{v_3^{1,536}} \quad \text{oder} \quad v_3 = \left( \frac{0,79506}{8,613} \right)^{\frac{1}{1,536}} = 0,212$$

Das spezifische Volumen am Punkt 3 ist:  $v_3 = 0,212 \text{ m}^3/\text{kg}$ . Aus der idealen Gasgleichung am Zustandspunkt 3 folgt schließlich die gesuchte Temperatur  $T_3$ .

$$T_3 = p_3 \cdot \frac{v_3}{R} = \frac{8,613 \text{ bar} \cdot 100 \text{ kJ}}{\text{bar} \cdot \text{m}^3} \cdot \frac{0,212 \text{ m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{\text{kg} \cdot 0,2871 \text{ kJ}} = 636 \text{ K}$$

Mit  $T_1$  und  $T_3$  folgt  $\vartheta_1 = 26,85 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $\vartheta_3 = 362,85 \text{ }^\circ\text{C}$ , sowie  $c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3} = 1,027 \text{ kJ}/(\text{kg K})$ .

$$c_v|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3} = c_p|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3} - R = 0,7399 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Die Änderung der inneren Energie beläuft sich auf:

$$u_3 - u_1 = c_v|_{\vartheta_1}^{\vartheta_3} \cdot (T_3 - T_1) = 0,7399 \cdot (636 - 300) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 248,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Der Energieinhalt des Systems  $u_3$  hat im Zustand 3 gegenüber dem Zustand  $u_1$  um  $248,6 \text{ kJ/kg}$  Masse der Luft zugenommen. Dabei ist es egal, welcher Prozessweg gewählt wird, um vom Gaszustand 1 zum Gaszustand 3 zu gelangen.

## Aufgabe 15.1: Ein rechtsläufiger Carnot-Kreisprozess

Ausgehend von der Zustandsfolge, wie sie in Abbildung 15.7 dargestellt ist, gilt zwischen 2 und 3 und zwischen 4 und 1 jeweils die Isentropengleichung der Form:

$$p_2 \cdot v_2^\kappa = p_3 \cdot v_3^\kappa \quad \text{und} \quad p_4 \cdot v_4^\kappa = p_1 \cdot v_1^\kappa$$

An jeder Stelle auf den Prozessfunktionen gilt außerdem die ideale Gasgleichung, mit der sich der Druck in den Isentropengleichungen eliminieren lässt.

$$p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_2 \quad \text{und} \quad p_3 \cdot v_3 = R \cdot T_3$$

$$p_4 \cdot v_4 = R \cdot T_4 \quad \text{und} \quad p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

$$\frac{R \cdot T_2}{v_2} \cdot v_2^\kappa = \frac{R \cdot T_3}{v_3} \cdot v_3^\kappa \quad \text{und} \quad \frac{R \cdot T_4}{v_4} \cdot v_4^\kappa = \frac{R \cdot T_1}{v_1} \cdot v_1^\kappa$$

Die Temperaturverhältnisse sind:

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{v_3^{\kappa-1}}{v_2^{\kappa-1}} \quad \text{und} \quad \frac{T_1}{T_4} = \frac{v_4^{\kappa-1}}{v_1^{\kappa-1}}$$



## Lösungen und Lösungswege 105

Da beim Carnot-Kreisprozess für die Temperaturen  $T_1 = T_2$  und  $T_3 = T_4$  gilt, folgt für die spezifischen Volumina:

$$\frac{v_3^{\kappa-1}}{v_2^{\kappa-1}} = \frac{v_4^{\kappa-1}}{v_1^{\kappa-1}}$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_4}{v_1} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}$$

### Aufgabe 15.2: Maximale reversible Arbeit zwischen zwei Temperaturen

Die beste reversible Wärmekraftmaschine ist der rechteckige Carnot-Kreisprozess, der die 1000 kJ Wärme aufnimmt, um Nutzarbeit abgeben zu können. Dies ist aber nur möglich, wenn der Kreisprozess auch eine gewisse Wärmemenge an den kälteren Wärmespeicher abführt. In Tabelle 15.1 sind die Gleichungen für den reversiblen Carnot-Kreisprozess aufgeführt. Der thermische Wirkungsgrad beträgt hier mit  $T_w = T_3$  und  $T_k = T_1$ :

$$\eta_{\text{th}} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{81 \text{ K}}{373,15 \text{ K}} = 0,217 \quad \text{oder} \quad \eta_{\text{th}} = 21,7 \%$$

Auf der anderen Seite gilt auch die allgemeine Formel

$$\eta_{\text{th}} = \frac{-\oint p \cdot dv}{q_{\text{zu}}},$$

mit der die Nutzarbeit bestimmt werden kann.

$$-\oint p \cdot dv = 0,217 \cdot 1000 \text{ kJ} = 217 \text{ kJ}$$

Von den 1000 kJ können 783 kJ nicht in Arbeit umgewandelt werden. Der thermische Wirkungsgrad wird auch als Carnot-Faktor bezeichnet, weil er eine grundsätzliche Bedeutung bei der Umwandlung von Wärme in maximale Arbeit besitzt.

### Aufgabe 15.3: Wahr oder falsch: Zum Betrieb einer Wärmekraftmaschine

Der Wirkungsgrad der Maschine ist anhand der Nutzenarbeit und dem notwendigen Aufwand an Wärme berechenbar.

$$\eta = \frac{\text{Nutzenarbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{210 \text{ kJ/kg}}{600 \text{ kJ/kg}} = 0,35 \text{ oder } 35 \%$$

Andererseits ist die allerbeste Wärmekraftmaschine nur mit dem rechtsläufigen Carnot-Kreisprozess denkbar. Sein thermischer Wirkungsgrad ist unabhängig von der Art des Arbeitsgases, sondern hängt nur von der maximalen und minimalen Temperatur im System



## 106 Lösungen und Lösungswege

ab. Wäre die angebotene Maschine ein rechtsläufiger Carnot-Kreisprozess, dann wäre sein thermischer Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{th}} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{450 \text{ K} - 310 \text{ K}}{450 \text{ K}} = 0,311 \text{ oder } 31,1 \%$$

Es kann keine Maschine geben, die besser ist als der Carnot-Kreisprozess. Bei den vorgelegten Daten der Firma zu dieser Maschine stimmt etwas nicht!

### Aufgabe 15.4: Ein theoretischer Kreisprozess zum Üben

Mit den Parameterfunktionen

$$p(t) = 2 \cdot \sin(t) + 3$$

$$v(t) = 2 \cdot \cos(t) + 3$$

kann ein rechtsläufiger Kreisprozess erzeugt werden. Die Konstruktion des Kurvenverlaufes erfolgt mit dem Parameter  $t$ . Für  $t = 0$  sind  $p(t = 0) = 3$  und  $v(t = 0) = 5$ . Im  $p$ - $v$ -Diagramm entsteht ein einzelner Punkt. Der Parameter  $t$  wird um einen Schritt  $\Delta t = 1$  erhöht, dann werden wieder  $p(t = 1)$  und  $v(t = 1)$  berechnet. Ein zweiter Punkt entsteht im Diagramm. Weitere  $\Delta t$ -Schritte erzeugen schließlich einen rechtsläufigen Kreis mit dem Radius  $r = 2$ , den Sie als einen rechtsläufigen Kreisprozess betrachten.

Bei Parameterdarstellungen ist folgende Formel für die Ermittlung der eingeschlossenen Fläche (Nutzarbeit) zu verwenden:

$$-\oint p \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \{v(t) \cdot dp - p(t) \cdot dv\}$$

Anhand der Parameterfunktionen  $p(t)$  und  $v(t)$  müssen zuerst die Änderungen  $dp$  und  $dv$  und danach die Nutzarbeit bestimmt werden.

$$\frac{dp}{dt} = 2 \cdot \cos(t) \quad \text{und} \quad dp = 2 \cdot \cos(t) \cdot dt$$

$$\frac{dv}{dt} = -2 \cdot \sin(t) \quad \text{und} \quad dv = -2 \cdot \sin(t) \cdot dt$$

$$-\oint p \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \{ [2 \cdot \cos(t) + 3] \cdot [2 \cdot \cos(t) \cdot dt] - [2 \cdot \sin(t) + 3] \cdot [-2 \cdot \sin(t) \cdot dt] \}$$

$$-\oint p \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \{ [2 \cdot \cos(t) + 3] \cdot [2 \cdot \cos(t)] - [2 \cdot \sin(t) + 3] \cdot [-2 \cdot \sin(t)] \} \cdot dt$$

$$-\oint p \cdot dv = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{t=2\cdot\pi} \{ 6 \cdot \cos(t) + 6 \cdot \sin(t) + 4 \} \cdot dt$$





$$-\oint p \cdot dv = 4 \cdot \pi$$

Selbstverständlich ist die Kreisfläche  $4\pi$ . Werden die entsprechenden Einheiten von  $p$  und  $v$  berücksichtigt, gilt für die Nutzarbeit:

$$-\oint p \cdot dv = 4 \cdot \pi \cdot \text{bar} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 400 \cdot \pi \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

## Aufgabe 16.1: Zum Betrieb eines Überhitzers und einer Dampfturbine

Lösung: Im Zustand 1 liegt Sattdampf vor. Sattdampf liegt immer auf der Taulinie ( $x = 1$ ). Bei 40 bar Druck ist seine Temperatur nach der Drucktafel  $\vartheta_1 = 250,33 \text{ °C}$  und sein Wärmehalt ist  $h_1 = h'' = 2800,3 \text{ kJ/kg}$ . Im Dampfzustand 2 hat der Sattdampf im Überhitzer pro Kilogramm 622 kJ aufgenommen. Somit beträgt  $h_D = (2800,3 + 622) = 3422,3 \text{ kJ/kg}$ . Dieser überhitzte Dampf, in der Kraftwerkstechnik auch Frischdampf genannt, strömt in die Dampfturbine und leistet dort technische Arbeit. Im Dampfzustand 2 tritt somit überhitzter Dampf mit  $p_2 = p_D = 40 \text{ bar}$  und  $h_2 = h_D = 3422,3 \text{ kJ/kg}$  auf. Aus Tafel III, Tabelle 16.13, lässt sich zwischen den Temperaturen 450 °C und 500 °C die Temperatur  $\vartheta_2 = 490 \text{ °C}$  interpolieren.

$\vartheta$ in °C	$h$ in kJ/kg
450	3331,2
?	3422,3
500	3445,0

Daten zur  $\vartheta_2$ -Interpolation aus Tabelle 16.13, Druck = 40 bar

$$\vartheta_2 = 450 \text{ °C} + \frac{500 - 450}{3445 - 3331,2} \cdot (3422,3 - 3331,2) \text{ °C} = 490 \text{ °C}$$

Sie können sofort auch die spezifische Entropie  $s_2$  in Tabelle 16.3 ermitteln. Mit  $p_2 = 40 \text{ bar}$  und  $\vartheta_2 = 490 \text{ °C}$  ergibt die Interpolation  $s_2 = (s_D)_2 = 7,06048 \text{ kJ/(kg K)}$ .

Am Ausgang der Dampfturbine werden der Druck  $p_3 = 3 \text{ bar}$  und die Temperatur  $\vartheta_3 = 180 \text{ °C}$  gemessen. Aus Tabelle 16.7 geht hervor, dass bei einem Druck von 3 bar bei 180 °C der Zustandspunkt im Gebiet des überhitzten Dampfs liegt. Die Interpolation liefert eine spezifische Enthalpie von  $h_3 = 2823,46 \text{ kJ/kg}$ .

Der erste Hauptsatz beschreibt die Enthalpiedifferenz  $h_3 - h_2$ , die vom überhitzten Dampf aufgebracht wird, um den spezifischen Wärmedurchgang durch die wärme gedämmte Systemgrenze der Dampfturbine ( $q_{\text{irr}})_{23}$ , die Reibungsarbeit innerhalb der Dampfturbine ( $w_R)_{23}$  und die abgegebene spezifische Arbeit ( $w_t)_{23}$  abzudecken.

$$(q_{\text{irr}})_{23} + (w_R)_{23} + (w_t)_{23} = h_3 - h_2 = (2823,46 - 3422,3) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = -598,84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$





## 108 Lösungen und Lösungswege

Ist der Dampfturbinenprozess von Zustand 2 nach 3 ideal, also ohne Wärmeverluste ( $(q_{\text{irr}})_{23} = 0$ ) und ohne Reibung ( $(w_{\text{R}})_{23} = 0$ ), dann handelt es sich um eine reversibel arbeitende Dampfturbine und  $(q_{\text{rev}})_{23} = (q_{\text{irr}})_{23} + (w_{\text{R}})_{23}$  ist null. Mit  $(q_{\text{rev}})_{23} = 0$  ist aber die Entropieänderung zwischen 2 und 3 auch null. Dies bedeutet, dass die abzugebende technische Arbeit die maximale mögliche reversible Arbeit ist. Für diesen Fall wäre der thermische Wirkungsgrad, besser auch als Gütegrad bezeichnet, 100 %. Genau für diesen theoretischen Fall wurde zusätzlich der Zustandspunkt 4 ins  $h$ - $s$ -Diagramm aufgenommen. Hierfür gilt  $s_3 = s_4$ . Die maximale reversible technische Arbeit ist somit durch  $(w_t)_{24}$  bestimmt und ihr Zahlenwert entspricht einem Gütegrad von 100 %.

Am Zustandspunkt 4 ist der Druck  $p_4 = 3$  bar und die spezifische Entropie  $s_4$  gleich  $s_2$ .

$$s_4 = s_2 = 7,06048 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

Gesucht wird die spezifische Enthalpie  $h_4$ . Als Erstes prüfen Sie in Tabelle 16.7 nach, ob Punkt 4 bei  $p = 3$  bar noch im überhitzten Gebiet liegt. Die spezifische Entropie  $s_4$  liegt zwischen den Temperaturen 140 und 150 °C. Die Temperatur auf der Taulinie bei 3 bar ist 133,54 °C, also deutlich unterhalb von  $\vartheta_4$ . Sie benötigen aber die spezifische Enthalpie  $h_4$  und wissen jetzt, dass Tabelle 16.7 (Tafel III) bei  $p_4 = 3$  bar hierfür zuständig ist. Wieder ist eine Interpolation zwischen  $s$  und  $h$  notwendig.

$s$ in kJ/(kg K)	$h$ in kJ/kg
7,0254	2738,8
7,06048	?
7,0771	2760,4

Daten zur  $h_4$ -Interpolation. Auszug aus Tabelle 16.7, Druck = 3 bar.

$$h_4 = 2738,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + \frac{2760,4 - 2738,8}{7,0771 - 7,0254} \cdot (7,06048 - 7,0254) \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 2753,296 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Der erste Hauptsatz, der den reversiblen Dampfturbinenprozess zwischen 2 und 4 beschreibt, lautet:

$$(w_t)_{24} = h_4 - h_2 = 2753,296 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} - 3422,3 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = -669,00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Dieser Betrag entspricht einem Gütegrad von 100 %. Wie groß ist der Gütegrad bei der wirklichen Enthalpiedifferenz  $h_3 - h_2$ ? Der Dreisatz bringt die Lösung:

$$|h_4 - h_2| = 669,00 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \text{entspricht 100 \% Gütegrad}$$

$$|h_3 - h_2| = 598,84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \text{entspricht } \eta \% \text{ Gütegrad}$$

Der Gütegrad der Dampfturbine beträgt:

$$\eta = \frac{100}{669,00} \cdot 598,84 = 89,5 \%$$







## 110 Lösungen und Lösungswege

Aus der Wasserdampf tabel III, Tabelle 16.6, Atmosphärendruck  $p = 1$  bar, erhalten Sie die spezifische Enthalpie  $h_1 = 42,05$  kJ/kg (interpoliert) und  $h_2 = 335,0$  kJ/kg.

$$\eta = \frac{5 \text{ kg} \cdot (335 - 42,05) \text{ kJ}}{1620 \text{ kJ} \cdot \text{kg}} = 0,9042 \quad \text{oder} \quad \eta = 90,42 \%$$

Alternative Rechnung: Stellen Sie sich vor, Sie legen eine neue Systemgrenze um den Kochtopf mit Inhalt, sodass durch die Systemgrenze keine Wärme fließen kann. Sie hätten dann eine adiabate Systemgrenze, die einen sehr großen Raum einschließt. Das neue System ist dann ein abgeschlossenes System und die Wärme, die nicht in den 5 kg Wasser bei 80 °C vorhanden ist, befindet sich im Innern des neuen Systems. Insgesamt wird die Wärme  $Q_{\text{zu}} = 1620$  kJ zugeführt. Im Wasser sind aber nur  $m \cdot (h_2 - h_1)$  angekommen. Wo ist der Rest der Energie? In Verbindung mit dem Hauptsatz muss sich der Rest als Irreversibilität  $Q_{\text{Verlust}}$  innerhalb der neuen Systemgrenze befinden. Dieser Rest ist aber  $(1 - \eta) \cdot Q_{\text{zu}}$  und genau dieser Betrag wurde vom Wasser bei seiner Erwärmung nicht aufgenommen. Man kann auch sagen, dass das Wasser diese Irreversibilität während der Prozesszeit laufend in Portionen an den großen Raum des neuen Systems abgegeben hatte. Infolgedessen bekommt der Rest  $(1 - \eta) \cdot Q_{\text{zu}}$  noch ein Minuszeichen und wird als nicht genutzte Wärme, als Irreversibilität bezeichnet.

$$\sum W_R = Q_{\text{Verlust}} = -(1 - \eta) \cdot Q_{\text{zu}}$$

Der erste Hauptsatz lautet jetzt mit  $W_t = 0$ :

$$\begin{aligned} Q_{\text{zu}} + [-(1 - \eta) \cdot Q_{\text{zu}}] &= m \cdot (h_2 - h_1) \\ Q_{\text{zu}} + [-(Q_{\text{zu}} - \eta \cdot Q_{\text{zu}})] &= m \cdot (h_2 - h_1) \\ \eta \cdot Q_{\text{zu}} &= m \cdot (h_2 - h_1) \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{m \cdot (h_2 - h_1)}{Q_{\text{zu}}} = 0,9042 \end{aligned}$$

### Aufgabe 16.3: Wasser isobar erhitzen

Für Wasser gilt die Wasserdampf tabel III unterhalb der Siedetemperatur  $\vartheta_s$ . Bei  $p = 1$  bar und 20 °C, Zustand 1, folgt aus Tabelle 16.6:

$$h_1 = 84 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad \text{und} \quad v_1 = 0,0010017 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Nach der Wärmezufuhr von 360 kJ/kg ist die spezifische Enthalpie im Zustand 2

$$h_2 = h_1 + 360 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 444 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

vorhanden. Ein Blick in Tabelle 16.6 zeigt, dass bei  $p = 1$  bar die spezifische Enthalpie  $h_2 = 444$  kJ/kg größer als  $h' = 417,51$  kJ/kg (Siedelinie) und kleiner als  $h'' = 2675,4$  kJ/kg (Taulinie) ist. Der Zustandspunkt muss im Nassdampfgebiet liegen und hierfür müssen die folgenden Gleichungen benutzt werden.

$$h_2 = (h_x)_2 = (1 - x) \cdot h' + x \cdot h''$$



Mit  $h' = 417,51 \text{ kJ/kg}$  und  $h'' = 2675,4 \text{ kJ/kg}$  wird der Sattedampfanteil  $x = 0,01173$ . Das bedeutet, dass im Zustand 2 nur  $0,01173 \text{ kg}$  Sattedampf und  $1 - 0,01173 = 0,98827 \text{ kg}$  siedendes Wasser vorliegen.

Die Volumenänderung der eingeschlossenen Masse beträgt  $((v_x)_2 - v_1) \cdot m$ .

$$(v_x)_2 = (1 - x) \cdot v' + x \cdot v'' = 0,98827 \cdot 0,0010434 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} + 0,01173 \cdot 1,694 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$(v_x)_2 = 0,0209 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

$$\Delta V = ((v_x)_2 - v_1) \cdot m = (0,0209 - 0,0010017) \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \cdot 1 \text{ kg} = 0,0199 \text{ m}^3$$

Das Volumen hat sich von 1 Liter auf 20,9 Liter vergrößert.

### Aufgabe 16.4: Wie funktioniert ein Geysir?

Im Zustand 1 ist der Druck  $p_1 = 15 \text{ bar}$  und der Sattedampfanteil  $x$  beträgt  $0,6$ . Es liegt Nassdampf vor, der nur kurzzeitig mit diesen Daten vorliegt, denn Erdwärme heizt den Geysir ständig auf. Jedoch gehören zu diesem Zustand die spezifische Enthalpie  $(h_x)_1$  und das spezifische Volumen  $(v_x)_1$ .

$$(h_x)_1 = (1 - x) \cdot h' + x \cdot h''$$

$$(h_x)_1 = (1 - 0,6) \cdot 844,67 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 0,6 \cdot 2789,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 2011,8 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$(v_x)_1 = (1 - x) \cdot v' + x \cdot v''$$

$$(v_x)_1 = (1 - 0,6) \cdot 0,0011553 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} + 0,6 \cdot 0,1317 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = 0,0795 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$$

Im Zustand 2 liegt, wegen des dynamischen Vorgangs, kurzzeitig der Druck bei  $3 \text{ bar}$  bei einer Siedetemperatur (zum Siededruck  $15 \text{ bar}$ ) von  $198,29 \text{ }^\circ\text{C}$ . Es liegt überhitzter Dampf vor und die Wasserdampf-tafel III, Tabelle 16.7, ist zuständig. Zum Druck  $3 \text{ bar}$  gehört die Siedetemperatur  $\vartheta_s = 133,54 \text{ }^\circ\text{C}$ . Die aktuelle Temperatur ist  $198,29 \text{ }^\circ\text{C}$  und deshalb ist der Dampf überhitzt.

$$(h_D)_2 = 2861,9 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad (\text{interpoliert, Tabelle 16.7})$$

$$(v_D)_2 = 0,71357 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \quad (\text{interpoliert, Tabelle 16.7})$$

Die spezifische Enthalpiedifferenz beträgt  $(h_D)_2 - (h_x)_1 = 850,1 \text{ kJ/kg}$ . Ein Kilogramm Nassdampf benötigt im Zustand 1 ein Volumen von  $79,5 \text{ Liter}$ . Im Zustand 2 jedoch  $713,6 \text{ Liter}$ . Dieser Platz liegt in der unterirdischen Kammer nicht vor, deshalb wird der Druck explosionsartig anwachsen und den Ausbruch des Geysirs einleiten.



## 112 Lösungen und Lösungswege

### Aufgabe 17.1: Isobarer Ausdehnungskoeffizient eines Van-der-Waals-Gases

Fall 1) Ein ideales Gas wird untersucht:

Ein ideales Gas folgt immer der thermischen Zustandsgleichung  $p \cdot v = R \cdot T$ , wobei  $R$  die spezielle Gaskonstante des zu untersuchenden Gases ist. Setzt man diese Zustandsgleichung in die Definitionsgleichung für  $\gamma$  ein und bildet die Ableitung  $\partial v / \partial T$  bei konstantem Druck  $p$ , so folgt:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{R \cdot T}{p}\right) = \frac{R}{p} \cdot \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{R}{p}$$

Also gilt für  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{1}{v} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{v} \cdot \frac{R}{p} = \frac{R}{R \cdot T} = \frac{1}{T}$$

Bei gegebener konstanter Masse  $m$  des Gases und mit  $v = V/m$  erhält man eine gleichwertige Form für  $\gamma$ .

$$\gamma = \frac{1}{V/m} \cdot \left(\frac{\partial V/m}{\partial T}\right)_p = \frac{m}{V \cdot m} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{V} \cdot \frac{V}{T} = \frac{1}{T}$$

Die Temperatur  $T$  ist in der Einheit Kelvin einzusetzen. Wenn der Druck eines idealen Gases konstant bleibt, dehnt sich ein kaltes Gas stärker aus als ein heißes Gas. Ein beliebiges ideales Gas der Temperatur  $T = 300$  K hat zum Beispiel den von  $R$  unabhängigen isothermen Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma = 0,00333$  K<sup>-1</sup>.

Fall 2) Ein Van-der-Waals-Gas wird betrachtet:

Es gilt wieder allgemein:

$$\gamma = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Für ein beliebiges Van-der-Waals-Gas ist die Van-der-Waals-Zustandsgleichung die Grundlage für die Ableitung  $\partial V / \partial T$  bei konstantem Druck  $p$ .

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R \cdot T$$

Leider lässt sich die Van-der-Waals-Gasgleichung nicht nach  $V = V(T, p = \text{konstant})$  umstellen. So ist es nicht möglich, über die Funktion  $V(T, p)$  die partielle Ableitung  $\partial V / \partial T$  zu bestimmen. Es gibt aber trotzdem zwei Möglichkeiten  $\partial V / \partial T$  zu berechnen. Eine Möglichkeit ist die Bildung der Ableitung aus impliziten Funktionen durch die Anwendung der Euler'schen Kettenformel

Die zweite Möglichkeit soll hier vorgestellt werden. Stellen Sie die Van-der-Waals-Zustandsgleichung nach der Temperatur um. Wozu fragen Sie? Weil es dann einfacher ist,



## Lösungen und Lösungswege 113

$\partial T/\partial V$  auszurechnen und danach den gesuchten Kehrwert  $\partial V/\partial T$  zu bilden. Dieser Weg wird jetzt eingeschlagen.

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right) \cdot \frac{(V - n \cdot b)}{n \cdot \mathfrak{R}} = T$$

Multiplizieren Sie diese Gleichung mit  $V^2$  und ordnen Sie den Ausdruck.

$$V^3 \cdot p - V^2 \cdot p \cdot b \cdot n + V \cdot a \cdot n^2 - a \cdot b \cdot n^3 = n \cdot V^2 \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$

$$T = \frac{V^3 \cdot p - V^2 \cdot p \cdot b \cdot n + V \cdot a \cdot n^2 - a \cdot b \cdot n^3}{n \cdot V^2 \cdot \mathfrak{R}}$$

$$T = \frac{V \cdot p}{n \cdot \mathfrak{R}} - \frac{p \cdot b}{\mathfrak{R}} + \frac{a \cdot n}{V \cdot \mathfrak{R}} - \frac{a \cdot b \cdot n^2}{V^2 \cdot \mathfrak{R}}$$

Bilden Sie die partielle Ableitung  $\partial T/\partial V$ .

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{n \cdot \mathfrak{R}} - 0 + \frac{a \cdot n}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{(-1)}{V^2} - \frac{a \cdot b \cdot n^2}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{(-2)}{V^3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{n \cdot \mathfrak{R}} - \frac{a \cdot n}{\mathfrak{R} \cdot V^2} + \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot n^2}{\mathfrak{R} \cdot V^3}$$

Der Kehrwert lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{p}{n \cdot \mathfrak{R}} - \frac{a \cdot n}{\mathfrak{R} \cdot V^2} + \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot n^2}{\mathfrak{R} \cdot V^3}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{\frac{p}{n \cdot \mathfrak{R}} \cdot \frac{V^3}{V^3} - \frac{a \cdot n}{\mathfrak{R} \cdot V^2} \cdot \frac{V \cdot n}{V \cdot n} + \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot n^2}{\mathfrak{R} \cdot V^3} \cdot \frac{n}{n}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V^3}{p \cdot V^3 - a \cdot n^2 \cdot V + 2 \cdot a \cdot b \cdot n^3}$$

In jedem Schritt waren  $a$ ,  $b$ ,  $\mathfrak{R}$ ,  $p$  und die Stoffmenge  $n$  konstant. Sie können die Gleichung für den isothermen Ausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  eines beliebigen Van-der-Waals-Gases so formulieren:

$$\gamma = \frac{1}{V} \cdot \left( \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V^3}{p \cdot V^3 - a \cdot n^2 \cdot V + 2 \cdot a \cdot b \cdot n^3} \right)_p$$

$$\gamma = \left( \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V^2}{p \cdot V^3 - a \cdot n^2 \cdot V + 2 \cdot a \cdot b \cdot n^3} \right)_p$$

Sicherlich ist Ihnen bekannt, dass aus der Van-der-Waals-Gasgleichung mit  $a = 0$  und  $b = 0$  die ideale Gasgleichung entsteht. Diese Tatsache kann ausgenutzt werden, um nachzuprüfen, ob aus diese Gleichung für  $\gamma$  auch der Ausdruck für eines idealen Gases nach Fall 1 entsteht!

Nachweis: Sie benötigen noch die Ausgangsgleichung der Form

$$V^3 \cdot p - V^2 \cdot p \cdot b \cdot n + V \cdot a \cdot n^2 - a \cdot b \cdot n^3 = n \cdot V^2 \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$



## 114 Lösungen und Lösungswege

Setzen Sie in den beiden vorstehenden Gleichungen  $a = 0$  und  $b = 0$  ein.

$$\gamma_{\text{ideales Gas}} = \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V^2}{p \cdot V^3}$$

$$V^3 \cdot p = n \cdot V^2 \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann  $n$  ermittelt werden und schließlich  $\gamma$ .

$$\gamma_{\text{ideales Gas}} = \frac{V^3 \cdot p \cdot \mathfrak{R} \cdot V^2}{V^2 \cdot \mathfrak{R} \cdot T \cdot p \cdot V^3} = \frac{1}{T}$$

Der Nachweis ist erbracht!

### Aufgabe 17.2: Zahlenbeispiel zum Ausdehnungskoeffizienten der Luft

1) Luft ist ein ideales Gas. Die isobare Volumenänderung des Gases wird mithilfe des isobaren Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  berechnet, der für jedes ideale Gas  $1/T$  beträgt.

$$V \approx V_0 \cdot [1 + \gamma \cdot (T - T_0)]$$

$$V \approx V_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{T_0} \cdot (T - T_0) \right]$$

Der Index 0 kennzeichnet den Anfangszustand.

$$V_0 = 0,4 \text{ m}^3, T_0 = 273,15 \text{ K}, p_0 = 60 \text{ bar}$$

Zustandsgrößen ohne Index stehen für den Endzustand nach der Temperaturerhöhung.

Die Volumenänderung  $V - V_0$  eines idealen Gases wird gesucht.

$$V - V_0 \approx V_0 \cdot \frac{1}{T_0} \cdot (T - T_0) = 0,4 \cdot \text{m}^3 \cdot \frac{1}{273,15 \text{ K}} \cdot (8 \text{ }^\circ\text{C})$$

Beachten Sie, dass eine Temperaturdifferenz von  $8 \text{ }^\circ\text{C}$  auch  $8 \text{ K}$  entspricht. Die Volumenänderung (Volumenzunahme) beträgt:

$$V - V_0 \approx 0,0117 \text{ m}^3 \text{ oder } V \approx 0,0117 \text{ m}^3 + V_0 = 0,4117 \text{ m}^3$$

Die prozentuale Volumenzunahme des idealen Gases beläuft sich auf

$$\Delta V \% = \frac{V - V_0}{V_0} \cdot 100 \% = 2,9 \%$$

2) Luft ist ein Van-der-Waals-Gas. In diesem Fall beträgt der im vorangehenden Beispiel bestimmte isobare Volumenausdehnungskoeffizient:

$$\gamma = \frac{n_0 \cdot \mathfrak{R} \cdot V^2}{p \cdot V^3 - a \cdot n^2 \cdot V + 2 \cdot a \cdot b \cdot n^3}$$

## Lösungen und Lösungswege 115

Für das genäherte Volumen  $V \approx V_0 \cdot [1 + \gamma \cdot (T - T_0)]$  mit dem Volumenausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  eines Van-der-Waals-Gases im Anfangszustand 0 erhält man:

$$V \approx V_0 \cdot \left[ 1 + \left\{ \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V_0^2}{p \cdot V_0^3 - a \cdot n_0^2 \cdot V_0 + 2 \cdot a \cdot b \cdot n_0^3} \right\} \cdot (T - T_0) \right]$$

Die für Luft zuständigen Van-der-Waals-Koeffizienten

$$a = 1,41 \text{ bar} \cdot \frac{\text{dm}^6}{\text{mol}^2} \quad \text{und} \quad b = 0,039 \frac{\text{dm}^3}{\text{mol}}$$

können in Tabellen nachgeschlagen werden.  $\mathfrak{R}$  ist bekannt und somit ist nur die Stoffmenge  $n_0$  im Anfangszustand zu berechnen. Da die Luft in jedem Zustand durch die Van-der-Waals-Gasgleichung beschrieben wird, lässt sich  $n$  daraus berechnen. Führen Sie jetzt eine Nebenrechnung durch, um die Stoffmenge  $n$  der Luft festzustellen.

Ein analytisch nicht lösbares Polynom 3. Grades in  $n$  ist entstanden. Mit der iterativen Fixpunktmethode kann die Stoffmenge  $n$  aus der ausmultiplizierten Van-der-Waals-Gasgleichung berechnet werden.

$$p \cdot V - p \cdot n \cdot b + n^2 \frac{a}{V} - n^3 \frac{a \cdot b}{V^2} = n \cdot \mathfrak{R} \cdot T$$

Stellen Sie diese Gleichung nach der Unbekannten  $n$  um. Die Unbekannte muss allein auf der linken Seite stehen. Auf der rechten Seite darf irgendeine Funktion mit  $n$  vorkommen.

$$n = \frac{1}{\mathfrak{R} \cdot T} \left( p \cdot V - p \cdot n \cdot b + n^2 \frac{a}{V} - n^3 \frac{a \cdot b}{V^2} \right)$$

Sie bezeichnen vorübergehend die rechte Seite mit  $f(n)$ , die linke Seite einfach mit  $g(n) = n$ , somit folgt:  $g(n) = f(n)$ . Zeichnen Sie  $f(n)$  und  $g(n)$  gemeinsam in ein Diagramm ein. Geben Sie auch die Einheiten vor und prüfen Sie, ob Sie die folgende Gleichungen erhalten.

$$g(n) = n$$

$$f(n) = 1056,75781 - 0,10303389 \cdot n + 0,0001552 \cdot n^2 - 0,151331 \times 10^{-7} \cdot n^3$$

Wie die grafische Darstellung zeigt, gibt es nur einen einzigen Schnittpunkt, der Fixpunkt genannt wird. Dieser Fixpunkt gibt auf der  $n$ -Achse die Zahl für die gesuchte Stoffmenge an. Er liegt in erster Schätzung zwischen  $n = 800$  und  $n = 1300$  und bei einer zweiten Abschätzung (aus der nachfolgender Abbildung) zwischen 1112 und 1114.

Die Fixpunktiteration ist ziemlich einfach. Um mit jedem Schritt  $n$  näherzukommen, bedarf es zuerst einer Schätzung für  $n$ . Aus der Abbildung schätzen wir einfach  $n = 1112,4$ . Dann folgt  $g(1112,4) = 1112$  und die Funktion  $f(1112,4)$  liefert den Wert = 1113,361. In der Abbildung sind das die Koordinaten des Punkts P1. Nach dieser Schätzung wird nicht ein zweites Mal  $n$  geschätzt, sondern die erste Iteration ist durchzuführen. Dazu nehmen Sie konsequent aus  $f(n)$  das Ergebnis der durchgeführten Rechnung  $n = 1113,361$  und setzen Sie diese Zahl als neues  $n$  in einer weiteren Rechnung, der ersten Iterationsrechnung, bei  $g(n)$  und bei  $f(n)$  ein. Mit dem Ergebnis der alten Rechnung wird eine neue Rechnung gestartet, deren Ergebnis viel besser ist. Das geht so:

1. Iteration: Neues  $n = 1113,361$  und es folgt  $g(n) = 1113,361$  und  $f(n) = 1113,540$

2. Iteration: Neues  $n = 1113,540$  und es folgt  $g(n) = 1113,540$  und  $f(n) = 1113,573$

## 116 Lösungen und Lösungswege

3. Iteration: Neues  $n = 1113,573$  und es folgt  $g(n) = 1113,573$  und  $f(n) = 1113,580$

4. Iteration: Neues  $n = 1113,580$  und es folgt  $g(n) = 1113,580$  und  $f(n) = 1113,581$

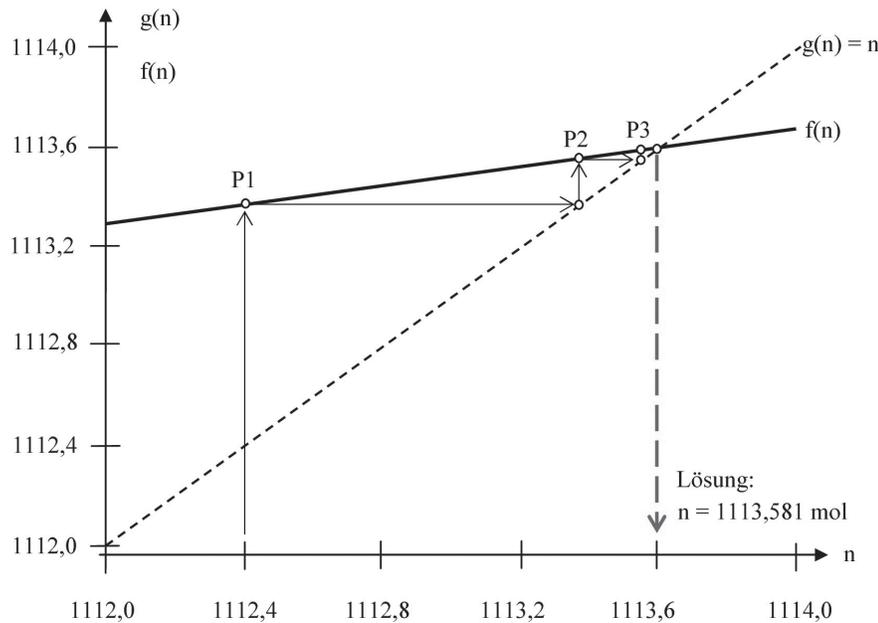
5. Iteration: Neues  $n = 1113,581$  und es folgt  $g(n) = 1113,581$  und  $f(n) = 1113,581$

In der Abbildung »Fixpunktprinzip« ist der Punkt P1 durch die Schätzung entstanden. Der Punkt P2 ist das Ergebnis der ersten Iteration und die Koordinaten des Punktes P3 stammen aus der zweiten Iteration. Mit jedem Iterationsschritt kommen Sie näher an den Fixpunkt heran, der bei  $n = 1113,581$  mol liegt. Nach der vierten Iteration können Sie die Rechnung abbrechen, denn der Unterschied zwischen  $g(n)$  und  $f(n)$  ist akzeptabel gering.

Durch diese Prozedur der Schätzung und der zwingend nachfolgenden Iterationen ist jetzt die Stoffmenge der Luft mit  $n = 1113,581$  mol bekannt. Mit diesem Wert von  $n$  lässt sich das Luftvolumen im Zylinder bei der Temperatur  $8\text{ °C}$  bestimmen.

$$V \approx V_0 \cdot \left[ 1 + \left\{ \frac{n \cdot \mathfrak{R} \cdot V_0^2}{p \cdot V_0^3 - a \cdot n_0^2 \cdot V_0 + 2 \cdot a \cdot b \cdot n_0^3} \right\} \cdot (T - T_0) \right]$$

Mit  $\gamma = 0,0045\text{ K}^{-1}$  ist das Volumen  $V \approx 0,414\text{ m}^3$ . Die prozentuale Abweichung vom Anfangsvolumen  $0,4\text{ m}^3$  beträgt  $\Delta V\% = 3,5\%$ .



**Abbildung 10:** Das Fixpunktprinzip ermittelt hier die Lösung  $n = 1113,581$  mol. Ausgehend von einem Startwert wird iterativ die Lösung angenähert.