



# Auf einen Blick

---

<b>Über den Autor .....</b>	<b>9</b>
<b>Einleitung.....</b>	<b>25</b>
<b>Teil I: Natürliche Zahlen und Mengen – im Auge des Informatikers.....</b>	<b>31</b>
<b>Kapitel 1:</b> Zahlen und ihre Logik.....	33
<b>Kapitel 2:</b> Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige..	57
<b>Kapitel 3:</b> Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik.....	69
<b>Teil II: Diskrete Strukturen.....</b>	<b>99</b>
<b>Kapitel 4:</b> Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen .....	101
<b>Kapitel 5:</b> Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten.....	117
<b>Kapitel 6:</b> Gruppen – es kann nicht nur eine geben.....	131
<b>Kapitel 7:</b> Ringe und Körper.....	147
<b>Kapitel 8:</b> Graphentheorie.....	159
<b>Teil III: Analysis für Informatiker.....</b>	<b>183</b>
<b>Kapitel 9:</b> Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit.....	185
<b>Kapitel 10:</b> Pflegeleichte Funktionen – Stetigkeit und Differenzierbarkeit.....	229
<b>Kapitel 11:</b> Integrale .....	271
<b>Teil IV: Vom Würfelspiel zum Algorithmus.....</b>	<b>283</b>
<b>Kapitel 12:</b> Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen.....	285
<b>Kapitel 13:</b> Die klassischen Verteilungen.....	317
<b>Kapitel 14:</b> Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut.....	341
<b>Kapitel 15:</b> Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen.....	361
<b>Teil V: Sprung in den Hyperraum .....</b>	<b>375</b>
<b>Kapitel 16:</b> Vektoren – aggregierte Zahlen.....	377
<b>Kapitel 17:</b> Transformationen .....	419
<b>Kapitel 18:</b> Lineare Gleichungssysteme – Number Crunching in der linearen Algebra.....	439
<b>Teil VI: Höhere Weihen in der Analysis.....</b>	<b>453</b>
<b>Kapitel 19:</b> Skalierung der Differenzierbarkeit .....	455
<b>Kapitel 20:</b> Potenziale als Stammfunktionen .....	473
<b>Kapitel 21:</b> Steilkurs in komplexer Funktionentheorie.....	485
<b>Kapitel 22:</b> Hilberträume.....	503





## 12 Auf einen Blick

<b>Teil VII: Anhang</b> .....	<b>547</b>
<b>Anhang A:</b> Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
<b>Anhang B:</b> Binomialverteilung versus Poissonverteilung.....	565
<b>Anhang C:</b> Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen.....	567
<b>Anhang D:</b> Berechnung von Determinanten.....	575
<b>Anhang E:</b> Matrizenkalküle.....	581
<b>Anhang F:</b> Benutzte Symbole.....	585
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>589</b>





# Inhaltsverzeichnis

<b>Über den Autor</b> .....	<b>9</b>
Danksagungen .....	9
<b>Einleitung</b> .....	<b>25</b>
Über dieses Buch .....	25
Wen hatten wir bei diesem Buch besonders vor Augen .....	25
Durch welche Brille sehen wir also den Informatiker? .....	26
Und was bedeutet dies für uns? .....	26
Haben wir auch Nichtinformatiker als potenzielle Leser im Blick .....	27
Wie kann man dieses Buch lesen? .....	27
Welche Besonderheiten finden sich in unserem Buch .....	27
Auf welche weiteren (kleinen) Innovationen dürfen wir hinweisen? .....	28
Wann ist genug genug? .....	29
Und weitere Literatur? .....	29
Kommunikation mit Autoren .....	30
<b>TEIL I</b>	
<b>NATÜRLICHE ZAHLEN UND MENGEN – IM AUGEN DES</b>	
<b>INFORMATIKERS</b> .....	<b>31</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Zahlen und ihre Logik</b> .....	<b>33</b>
Was es über die Vielfalt der Zahlen zu sagen gibt .....	33
Zahlen zählen .....	34
Zahlen aufs Papier – und später auf den Rechner .....	35
Es darf auch etwas mehr sein – über die natürlichen Zahlen hinaus .....	36
Ganzzahlige Brüche – ein zweiter Nachschlag .....	37
Die Welt der rationalen Zahlen ist für Informatiker genug – Mathematiker sind weniger bescheiden .....	39
Komplexe Zahlen erweitern den Zahlenraum ein weiteres Mal .....	41
Blick auf die Gipfel: Hyperkomplexe Zahlen und Oktionen .....	44
Wir wissen nun, über was wir reden, wir wollen jetzt wissen, wie wir darüber reden .....	45
Prädikat – besonders wertvoll .....	45
(Mathematische) Wahrheit .....	46
Operatoren – Aus Zahlen werden Zahlen .....	47
Logische Operatoren – Schnittstellen zur Logik .....	48
Verrechnung von Wahrheitswerten .....	48
Junktoren .....	48
Wahrheitstabellen .....	49
Für den einen ist es duplo, für den anderen die längste Praline der Welt – zur Doppelrolle der Zahlen in der formalen Logik .....	49





## 14 Inhaltsverzeichnis

Quantoren in der Logik – Prädikate erhalten durch sie ihre Power .....	52
Der Existenzquantor $\exists$ .....	53
Umsetzung des Existenzquantors in eine Schleife für Programmierer .....	53
Allquantor $\forall$ .....	54

### Kapitel 2

#### Im Assembler-Code der Mathematik – Handreichungen für Ungläubige.....

**57**

Gehen wir zurück auf Los .....	57
Was passiert eigentlich beim Rechnen? .....	58
Wir bringen dem Computer das Rechnen bei .....	58
Wie sehen die nächsten Schritte aus? .....	59
Rekursion – Vorbereitungen für die Induktion .....	60
Induktion – mit Warp 10 durch alle Zahlen .....	62
Anwendungen der Induktion – Return on invest .....	63
Beweis des Assoziativgesetzes .....	64
Wir kennen die Zahlen vom Zählen her – können wir sie auch abstrakt charakterisieren? .....	65
Unendlich viele Zahlen auf einem endlichen Rechner? .....	66

### Kapitel 3

#### Mengenlehre – im Maschinenraum der Mathematik.....

**69**

Mengenlehre – fängt man damit nicht immer an? .....	70
Die Sprache der Mengenlehre – Goethe wäre »not« .....	70
Erste Anforderungen an den Mengenbegriff .....	71
Mengentheoretische Operationen .....	72
Äquivalenz von Aussagen – Gleichheit von Mengen .....	74
Eigenschaften der Operationen $\cup$ , $\cap$ und $\setminus$ .....	74
Fallstricke und Sicherungen .....	76
Weitere mengentheoretische Operationen .....	77
Mengen als logische Bausteine für die Implementierung von Zahlen .....	80
Spezielle Realisierungen des Zählprozesses .....	80
Mengen – was kann man sich darunter vorstellen .....	83
Linux-Filesystem als Modell für ein Mengensystem .....	83
Infinite in all directions .....	85
Mengen für Datenbanker .....	86
Abstraktionen .....	87
Datenbanken? – Keep it simple and stupid .....	88
Nur für Theoretiker: Suchen, bis die Sterne verglühen .....	88
Wer hat Angst vor Graphen? .....	90
Urlemente – ein bisschen Medienbruch .....	92
Mengenlehre für »Informatiker mit der harten Kinnlade« .....	93
Prädikatenlogik mit einem einzigen Prädikat .....	93
Skolemisierung – oder wie destilliert man Operationen aus Aussagen .....	96





## Inhaltsverzeichnis 15

### TEIL II DISKRETE STRUKTUREN..... 99

#### Kapitel 4 Spezielle Beziehungen – Äquivalenzen und Ordnungen..... 101

Äquivalenzrelationen – das Gleiche versus dasselbe .....	102
Äquivalenzrelation – die Erste .....	103
Äquivalenzrelation – die Zweite .....	108
Ordnungsrelationen – Ordnung in der mathematischen Welt.....	109
Geordnete Zahlen – die kleiner/gleich Beziehung.....	109
Verträglichkeiten.....	110
Teilbarkeit – auch eine Ordnung.....	111
Auch die Teilbarkeit ist relativ verträglich und pflegeleicht.....	111
Die mengentheoretische Inklusion – eine Ordnung für sich.....	112
Die Ordnungsbeziehungen – was haben sie gemein, was unterscheidet sie .....	112
Ordnungsbeziehungen und Grenzen.....	113
Graphen als Medium für die Darstellung partieller Ordnungen.....	114

#### Kapitel 5 Allgemeine Beziehungen und Beziehungskisten..... 117

Beziehungen als Tabellen.....	118
Inoffizielle Beziehungen.....	119
Realisierungen inoffizieller Beziehungen .....	120
Operieren mit Beziehungen.....	122
Jemanden kennen, der jemanden kennt, der Beziehungen hat.....	123
Spezialfälle: Verknüpfungen mit der inversen Beziehung.....	124
Verknüpfungen unterschiedlicher Relationen.....	125
Ausblick auf Relationen zwischen unterschiedlichen Mengen.....	126
Eindeutige Beziehungen – auf dem Weg zu Funktionen .....	127
Väter und Väter von Vätern.....	128
Funktionen und ihre allgemeinen Eigenschaften .....	129

#### Kapitel 6 Gruppen – es kann nicht nur eine geben..... 131

Über die Addition ganzer Zahlen .....	131
Beweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements.....	132
Von den ganzen Zahlen zum allgemeinen Gruppenbegriff .....	132
Abstrakte kommutative Gruppen $G$ .....	133
Nichtkommutative Gruppen.....	133
Beispiele von in der Natur auftretenden Gruppen – Symmetriegruppen...	134
Gruppen und Faktorgruppen.....	139
Faktorgruppen der ganzen Zahlen .....	139
Allgemeine Gruppen und Faktorgruppen.....	141
Der Index einer Untergruppe $H \subset G$ .....	142
Untergruppen endlicher Gruppen.....	143





## 16 Inhaltsverzeichnis

### Kapitel 7

<b>Ringe und Körper</b> .....	<b>147</b>
Überblick Ringe .....	148
Überblick Körper .....	149
Ein Rückblick auf die Teilbarkeit und die Primzahlen .....	149
$\mathbb{Z}_n$ als Restklassenring .....	151
Wohldefiniertheit der Operationen auf den Restklassen .....	151
Der Euklidische Algorithmus .....	152
Einheiten in $\mathbb{Z}_n$ .....	153
Eulersche $\varphi$ -Funktion .....	153
Return on Invest – das RSA Verfahren in der Kryptologie .....	154
Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren .....	155
Das RSA-Verfahren in der Theorie .....	155
Praktische Bemerkungen zum RSA-Verfahren .....	157

### Kapitel 8

<b>Graphentheorie</b> .....	<b>159</b>
Zur Motivation .....	159
Das Haus vom Nikolaus .....	160
Gerichtete und ungerichtete Graphen .....	160
Zusammenhängende und unzusammenhängende Graphen .....	161
Schlingen und parallele Kanten, Nullgraph und einfacher Graph .....	162
Eckengrad .....	163
Algorithmische Eigenschaften des Eckengrads .....	164
Handshake-Lemma .....	164
Königsberger Brückenproblem .....	166
Eulergraph und Eigenschaften .....	167
Eulerkreis/Eulersche Touren .....	168
Adjazenzmatrix .....	168
Wann sind Graphen isomorph? – Adjazenzmatrizen .....	169
Alternative Tabellendarstellung – Inzidenzmatrizen .....	170
Bäume .....	171
Definition und Eigenschaften eines Baumes .....	171
Spannbaum .....	171
Definition von Wäldern .....	171
Wurzelbaum .....	172
Binärbäume .....	174
Suchbaum .....	175
Traversieren von Wurzelbäumen .....	175
Wie gehören Binärbäume und algebraische Ausdrücke zusammen? .....	176
Kürzeste Wege finden .....	177
Kruskal-Algorithmus .....	180
Prim-Algorithmus .....	180
Dijkstra-Algorithmus .....	181



### TEIL III ANALYSIS FÜR INFORMATIKER ..... 183

#### Kapitel 9

#### Reelle Zahlen – der virtuelle Sprung in die Unendlichkeit ..... 185

Irrationale Zahlen .....	185
$\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.....	186
Reelle Zahlen .....	187
Die Einführung der reellen Zahlen – für Informatiker eine kleine Revolution .....	188
Elementare Eigenschaften der reellen Zahlen.....	189
Abschätzungen, die Analysis lebt davon .....	191
Betragsfunktion und Dreiecksungleichung.....	191
Bernoullische Ungleichung.....	193
Der Umgebungsbegriff.....	194
Unendliche Folgen.....	194
Technische Definition der Konvergenz.....	196
Arbeiten mit der technischen Definition.....	196
Besondere Eigenschaften konvergenter Folgen.....	197
Hinreichende Konvergenzbedingungen beschränkter Folgen.....	198
Wichtige Spezialfälle: Die Folgen $(1 + 1/n)^n$ und $(1 + 1/n)^{n+1}$ .....	200
Rekursiv definierte Folgen.....	201
Häufungspunkte von Folgen .....	205
Grenzwertsätze für Folgen – Handreichungen für Klausuren.....	206
Beweis des ersten Grenzwertsatzes .....	206
Beispielhafte Folgerungen aus den Grenzwertsätzen.....	207
Mehr Werkzeuge zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens.....	209
Das Cauchysche Konvergenzkriterium.....	209
Grenzwerte unendlicher Reihen.....	210
Die harmonische Reihe.....	210
Begriffliche Einordnung der unendlichen Reihen.....	211
Cauchysche Konvergenzkriterium für unendliche Reihen .....	212
Einfache Beispiele unendlicher Reihen .....	212
Wurzel- und Quotientenkriterium – die wichtigsten	
Konvergenzkriterien für Reihen .....	213
Absolute Konvergenz.....	218
Die allgemeine binomische Formel.....	224
Die Fakultätsfunktion .....	224
Binomialkoeffizienten.....	225
Binomische Formel.....	226

#### Kapitel 10

#### Pflegeleichte Funktionen – Stetigkeit und Differenzierbarkeit..... 229

Grundsätzliche Bemerkungen.....	230
»Durchhalteparolen« für die Analysis .....	231
Der Grenzwertbegriff bei Funktionen.....	232
Konvergenz mithilfe des Umgebungsbegriffs.....	233



## 18 Inhaltsverzeichnis

Konvergenz unter Rückgriff auf Folgenkonvergenz .....	233
Konvergenzsätze .....	235
Anwendung der Konvergenzsätze auf die Exponentialfunktion .....	236
Stetige Funktionen .....	239
Beispiel einer Funktion, die nur an einer Stelle stetig ist .....	240
Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen .....	240
Differenzierbare Funktionen .....	243
Die Landau-Symbole $o()$ und $O()$ .....	243
Differenzierbarkeit via $o(x)$ .....	244
Differenzierbarkeit via Differenzenquotient .....	245
Beide Definitionen der Differenzierbarkeit sind äquivalent .....	247
Rechenregeln für Ableitungen .....	249
Verträglichkeit der Differenzialquotienten mit der Summenbildung .....	249
Produktregel .....	249
Quotientenregel .....	250
Kettenregel .....	251
Wichtige Beispiele differenzierbarer Funktionen .....	252
Differenzierbarkeit der Polynome .....	252
Ableitung der $e$ -Funktion und des Logarithmus .....	253
Ableitungen der trigonometrischen Funktionen .....	254
Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung .....	257
Der Satz von Rolle .....	258
Folgerungen aus dem Mittelwertsatz .....	259
Die Regeln von l'Hospital .....	259
Wichtige Beispiele für die Anwendung der l'Hospitalschen Regeln .....	261
Taylorpolynome und Taylorentwicklung .....	263
Beispiele von Taylorentwicklungen .....	267
Analytische Funktionen als »ganzheitliche« Funktionen .....	270

## Kapitel 11

<b>Integrale .....</b>	<b>271</b>
Stammfunktionen .....	271
Integrale elementarer Funktionen .....	272
Partielle Integration .....	273
Integration per Substitution .....	275
Rationale Funktionen und Partialbruchzerlegungen .....	276
Bestimmte Integrale .....	279
Einstieg in die Flächenberechnung .....	279
Stammfunktionen »in action« .....	281

## TEIL IV

<b>VOM WÜRFELSPIEL ZUM ALGORITHMUS .....</b>	<b>283</b>
--	------------

## Kapitel 12

<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung – Regeln im Regellosen .....</b>	<b>285</b>
Am Anfang war das Spiel – grundlegende Begrifflichkeiten der Wahrscheinlichkeitsrechnung .....	286







## Inhaltsverzeichnis 19

Ereignisse und Elementarereignisse .....	286
Wahrscheinlichkeiten.....	290
Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten im formalen Rahmen .....	295
Bedingte Wahrscheinlichkeiten – corriger la fortune .....	297
Bedingte Wahrscheinlichkeiten reengineered – die Formel von Bayes.....	302
Zufallsvariable – geeignete Codierungen zufälliger Ereignisse .....	303
Zufallsvariable – Übertragung von Wahrscheinlichkeiten auf Zahlenmengen .....	304
Summen und Produkte von Zufallsvariablen.....	305
Von der Zufallsvariablen zur Verteilungsfunktion.....	306
Mittelwerte in verschiedenen Ausprägungen: Erwartungswerte und Varianzen .....	308
Der Erwartungswert der Streuung – die Varianz .....	311
Korrelationen – synchrone Streuungen .....	313

### **Kapitel 13** **Die klassischen Verteilungen ..... 317**

Binomialverteilung .....	317
Münzwurf mit geänderten Spielregeln.....	318
Erwartungswerte und Varianzen für binomialverteilte Zufallsvariablen.....	319
Geometrische Verteilung.....	321
Geänderte Spielregeln.....	322
Poissonverteilte Zufallsvariablen.....	323
Näherungsverfahren für die Binomialverteilung – die Poissonverteilung ..	324
Erwartungswerte und Varianzen poissonverteilter Zufallsvariablen.....	326
Stetige Verteilungen.....	328
Exponentialverteilung.....	329
Normalverteilung.....	333

### **Kapitel 14** **Testen! – Denn Vertrauen ist nicht immer gut..... 341**

Die Ungleichung von Tschebyscheff .....	343
Normalverteilung und Tschebyscheffsche Ungleichung in der Gegenüberstellung.....	345
Tschebyscheffsche Ungleichung und die Gesetze der großen Zahlen .....	347
Beispielhafte Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips .....	349
Über das Testen von Hypothesen .....	350
Signifikanztests.....	350
Alternativtests .....	353
$\chi^2$ -Anpassung und $\chi^2$ -Test.....	358

### **Kapitel 15** **Probabilistische Algorithmen – theoretisch interessant aus praktischen Gründen..... 361**

Sortierverfahren .....	362
Statistische Analyse des Quicksorts.....	362





## 20 Inhaltsverzeichnis

Monte Carlo und Las Vegas – die ganze Wahrheit und nichts als die Wahrheit ..	364
Quicksort durch die Brille von Las Vegas betrachtet .....	364
Las Vegas liberalisiert – nur noch »nichts als die Wahrheit« .....	364
Monte Carlo – »die ganze Wahrheit« .....	370

## TEIL V SPRUNG IN DEN HYPERRAUM ..... 375

### Kapitel 16

#### Vektoren – aggregierte Zahlen ..... 377

Erste Operationen mit Vektoren: Addition und skalare Multiplikation .....	377
Kräfte können in unterschiedlichen Reihenfolgen addiert werden .....	378
Die Addition von drei oder mehr Vektoren kann unterschiedlich geklammert werden .....	378
Zu jedem Vektor gibt es einen inversen Vektor .....	379
Vektoren können mit Zahlen multipliziert werden .....	380
Auch Geschwindigkeiten sind Vektoren .....	380
Das Skalarprodukt – hiermit erhält die Vektorrechnung ihre eigentliche Power .....	382
Das Skalarprodukt als Mittel zur Berechnung physikalischer Arbeit .....	382
Das Skalarprodukt erfasst geometrisch wichtige Sachverhalte – Orthogonalität, Länge und Abstand .....	383
Die Algebraisierung der Geometrie .....	383
Algebraisierung der Geometrie .....	384
Die Algebraisierung der Geometrie zum Zweiten .....	387
Die Seitenhalbierenden – revisited .....	387
Vektoren in Koordinatensystemen .....	389
Auch umgekehrt wird ein Schuh draus: Vektoren erzeugen ein Koordinatensystem .....	393
Abstrakte Vektoren: Vektorräume .....	397
Einstieg in die Klasse Vector .....	397
Spezifikation von Vektorräumen .....	399
Strategische Begriffe .....	401
Auch der abstrakte Vektorraum kann als Aggregat von Zahlen aufgefasst werden .....	406
Aber wie decodieren wir ein $\vec{v}$ eines abstrakten Vektorraumes $V$ praktisch? .....	408
Erweiterung der Vektorraumspezifikation durch abstrakte Skalarprodukte .....	411
Die zweite Chance des Mathematikers .....	417
Die Natur spielt mit .....	418

### Kapitel 17 Transformationen ..... 419

Duale Basen .....	420
Kovariante und kontravariante Komponenten .....	422
Die Beziehungen zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten .....	422





## Inhaltsverzeichnis 21

Der Übergang zwischen ko- und kontravarianten Koordinaten bei orthonormierten Basen.....	423
Nicht orthonormale Basen – könnten wir auf sie verzichten?.....	424
Asymmetrische Verschlüsselungsverfahren mit Hilfe dualer Basen.....	426
Lineare Abbildungen.....	427
Drehungen.....	427
Matrizen – operationelle Codierung linearer Abbildungen.....	428
Basistransformationen.....	434
Matrizen der Basistransformation.....	434
Besondere Eigenschaften der Matrizen der Basistransformationen.....	434
Die Matrizen der Basistransformationen als Matrizen einer Abbildung.....	435
Basistransformationen orthonormierter Basen.....	437

<b>Kapitel 18</b>	
<b>Lineare Gleichungssysteme –</b>	
<b>Number Crunching in der linearen Algebra.....</b>	<b>439</b>
Gleichungssysteme und zugehörige Matrizen.....	440
Bedingungen der Lösbarkeit von Gleichungssystemen.....	441
Der Gaußsche Algorithmus.....	442
Homogene und inhomogene Gleichungssysteme.....	445
Determinanten in Aktion.....	446
Eigenwerte und Eigenvektoren.....	448
Auffinden der Eigenwerte.....	449
Berechnung der Eigenvektoren.....	449
Eigenvektoren und Diagonalisierung von Matrizen.....	450
Besonderheiten symmetrischer Matrizen.....	451

<b>TEIL VI</b>	
<b>HÖHERE WEIHEN IN DER ANALYSIS.....</b>	<b>453</b>

<b>Kapitel 19</b>	
<b>Skalierung der Differenzierbarkeit.....</b>	<b>455</b>
Behandlung von Funktionen zweier Variablen.....	455
Differenzierbarkeit von Funktionen zweier Variablen.....	456
Nichtdifferenzierbare Funktionen trotz Existenz partieller Ableitung.....	458
Hinreichende Bedingungen für die Differenzierbarkeit.....	461
Behandlung von Funktionen beliebig vieler Variablen.....	462
Vektorwertige Funktionen.....	463
Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen.....	463
Rechenregeln für Gradienten und Funktionalmatrizen.....	464
Hesse-Matrix und Taylorentwicklungen.....	466
$\nabla$ als Vektoroperator.....	466
Kritische Punkte und Extremwerte.....	468
Analyse der Hesse-Matrix.....	469
Beispielrechnung zur Analyse kritischer Punkte.....	470





## 22 Inhaltsverzeichnis

### Kapitel 20

<b>Potenziale als Stammfunktionen .....</b>	<b>473</b>
Generelle Bemerkungen zum Begriff Stammfunktion .....	473
Ansätze zur Definition des Integrals $\int_{x_0}^x F(\vec{s}) d\vec{s}$ .....	474
Notiz zu $F(\vec{s}_i) \cdot (\Delta\vec{s})_i = F(\alpha(t_i)) \cdot \alpha'(t_i)(\Delta t)_i$ .....	475
Vektorfelder .....	475
Notwendige Integrationsbedingungen für Vektorfelder .....	476
Kurvenintegrale über Vektorfelder .....	477
Hinreichende Integrationsbedingungen für Vektorfelder .....	480
Existenz eines globalen Potentials trotz Existenz einer Singularität .....	481
Beispielhafte Berechnung einer Potenzialfunktion .....	482

### Kapitel 21

<b>Steilkurs in komplexer Funktionentheorie .....</b>	<b>485</b>
Das formale Rechnen mit komplexen Zahlen .....	485
Addition komplexer Zahlen .....	486
Multiplikation komplexer Zahlen .....	486
Inverse komplexer Zahlen .....	486
Komplexe Zahlen als abstrakter Datentyp .....	487
Äquivalente Modelle komplexer Zahlen .....	487
Alternative Modelle .....	488
Auch Äquivalenzklassen von Polynomen verhalten sich wie komplexe Zahlen .....	490
Komplexe Differenzierbarkeit .....	492
Quick-and-dirty-Überlegungen .....	492
Ein zweiter Blick auf die Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen .....	493
Komplexe Kurvenintegrale .....	494
Kurvenintegrale und komplexe Differenzierbarkeit .....	495
Auf dem Weg zur Cauchyschen Integralformel .....	496
Beweis der Cauchyschen Integralformel .....	496
Analytizität komplex differenzierbarer Formeln .....	498
Drei wichtige Folgerungen .....	500

### Kapitel 22

<b>Hilberträume .....</b>	<b>503</b>
Komplexe Vektorräume .....	504
Komplexe Skalarprodukte .....	505
Beispiele komplexer Vektorräume .....	507
Hilbertbasen für Tupel .....	510
Hilbertbasen für Treppenfunktionen .....	511
Reduktionen der Treppenbreite .....	512
Treppenfunktionen der Treppenbreite $\frac{1}{2}$ .....	512
Ein neuer Ansatz – eine letzte Chance .....	515
Neue Basen, neue Normierungen .....	519
Die $\delta$ -Funktion – ein »Außenskelett« für Hilberträume .....	522



## Inhaltsverzeichnis 23

Management summary des Wegs hin zur $\delta$ -Funktion.....	524
Der Hilbertraum der periodischen Funktionen.....	526
Funktionen mit Periode $2\pi$ .....	526
Die $e$ -Funktionen als universelle Bausteine .....	526
Fourieranalyse und Fourierkoeffizienten.....	527
Basistransformationen .....	528
Fouriertransformationen nicht periodischer Funktionen.....	529
Basisfunktionen für $2\pi l$ -periodische Funktionen.....	530
Analyse des Übergangs $l \rightarrow \infty$ .....	530
Die Fouriertransformationen als Basistransformationen .....	532
Hilberträume in der Physik.....	533
Vektoren in der klassischen Physik.....	533
Vektoren in der Mikrophysik.....	534
Abstrakte Vektoren im Hilbertraum.....	534
Orte und Impulse.....	535
Die Heisenbergsche Unschärferelation.....	536
Hilberträume im Quantencomputing –elementare Konzepte .....	539
Bits und Qubits.....	539
Bloch-Sphäre.....	540
Operationen auf der Bloch-Sphäre.....	541
2-Qubits.....	542
EPR-Paare und Quantenteleportation.....	544

### TEIL VII

### ANHANG ..... 547

<b>Anhang A:</b> Methoden einer funktionellen Mengentheorie.....	549
Zielkonflikte .....	549
Java-Z-Funktionen.....	550
<b>Anhang B:</b> Binomialverteilung versus Poissonverteilung.....	565
<b>Anhang C:</b> Programmierung komplexer Zahlen als abstrakte Datentypen.....	567
<b>Anhang D:</b> Berechnung von Determinanten.....	575
<b>Anhang E:</b> Matrizenkalküle.....	581
Matrixmultiplikation .....	581
<b>Anhang F:</b> Benutzte Symbole.....	585

### Stichwortverzeichnis ..... 589

