IN DIESEM KAPITEL

- Physikalische Einheiten kennenlernen
- Rechnen mit Skalaren und Vektoren
- Mit Sinus, Kosinus und komplexen Zahlen rechnen
- Differentiation und Integration verstehen
- Näherungen mathematischer Funktionen mittels Reihenentwicklung

Kapitel 1
Mathematische Buddelkiste

Vieles in der Physik wird mit mathematischen Methoden behandelt. Sie brauchen aber keine Angst zu haben, ein volles Mathematikstudium ist nicht nötig, um Physik zu verstehen. In diesem Kapitel können Sie sich mit einigen mathematischen Vorgehensweisen vertraut machen. Wahrscheinlich haben Sie vieles davon schon einmal gehört und können es bereits einsetzen. Falls nicht, können Sie jederzeit auf dieses Kapitel zurückgreifen, wenn konkreter Bedarf bei der Behandlung eines physikalischen Themas besteht. Außerdem lernen Sie hier die Bedeutung von physikalischen Einheiten, die (fast) alle Größen, die in diesem Buch behandelt werden, begleiten. Wenn Sie diese Grundbegriffe schon beherrschen, können Sie dieses Kapitel auch glatt überspringen.

Physikalische Größen und Einheiten

Eine Grundunterscheidung physikalischer Größen ist die in Skalare und Vektoren. Skalare Größen haben einen Wert, vektorielle Größen einen Wert und eine Richtung.

Ein ***Skalar*** ist eine Größe, die nur einen Betrag beziehungsweise eine Länge hat.

Beispielsweise ist T ein Skalar, die Temperatur.

Ein *Vektor* ist eine Größe, die außer ihrem Betrag noch eine Richtung hat, in die sie zeigt.

Zum Beispiel bezeichnet $\boldsymbol{F}$ einen Vektor, die Kraft.

Offensichtlich hat Temperatur keine Richtung, in der sie zeigt, daher ist sie ein Skalar. Kraft hingegen hat sowohl einen Wert (wie groß ist die Kraft?) als auch eine Richtung (wohin zeigt die Kraft?).

Physiker unterscheiden Skalare und Vektoren in ihrer Schreibweise. Skalare physikalische Größen sind üblicherweise mit kursiven Buchstaben gekennzeichnet, Vektoren mit fetten und kursiven. In handgeschriebenen Texten, manchmal auch in Büchern, wird bei Vektoren ein Pfeil über den Buchstaben gesetzt ($\vec{F}$) oder ein Strich unter dem Buchstaben ($\underline{F}$), da man handschriftlich zwischen fetten und nicht-fetten Buchstaben nur schwer unterscheiden kann. Manchmal interessiert man sich nicht für die Richtung einer vektoriellen Größe, zum Beispiel wenn klar ist, wohin sie zeigt. Dann berechnet man nur den Betrag einer vektoriellen Größe (ihren Wert). Die Schreibweise lautet dabei

$|\boldsymbol{F}| = F$ ist der Betrag der Kraft $\boldsymbol{F}$

und das Symbol für die physikalische Größe kann wieder in skalarer Schreibweise (nicht-fett und kursiv) geschrieben werden.

Welche Einheit hat die Größe

Physikalische Größen haben meist eine Einheit. Für den Begriff »Einheit einer Größe« gibt es eine spezielle Schreibweise: Die Größe wird in eckige Klammern gesetzt, die Einheit selbst wird immer nicht-kursiv gesetzt, also zum Beispiel

$$|T| = \mathrm{K}$$

heißt, dass die Einheit der Temperatur das Kelvin ist und

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

bedeutet, dass die Einheit des elektrischen Feldes $\mathrm{V/m}$ oder auch $\mathrm{Vm^{-1}}$ ist. Raumtemperatur wird also zum Beispiel mit $T = 293\ \mathrm{K} = 20°\mathrm{C}$ angegeben, während $\boldsymbol{E} = 1000\ \mathrm{V/m}$ ein elektrisches Feld sein könnte.

Manchmal werden mehrere Einheiten zu neuen zusammengefasst, um sich die Schreibarbeit zu erleichtern, aber auch um die Bedeutung einer bestimmten physikalischen Größe hervorzuheben. Als Beispiel sei hier die Einheit der Kraft aufgeführt, die sich ergibt zu

$$[\boldsymbol{F}] = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}.$$

Die aus Kilogramm, Meter und Sekunde bestehende Einheit der Kraft bekommt einen neuen Namen, das Newton (N). Allgemein gibt es die so genannten *SI Einheiten* (Système International d'unités), die festgelegt werden. Es sind dies das Kilogramm (kg), der Meter (m), die Sekunde (s), das Ampère (A), das Kelvin (K), das Mol (mol) und das Candela (cd). Die zusammengesetzten Größen heißen abgeleitete Einheiten wie zum Beispiel das Newton (N).

Einen weiteren Punkt gibt es noch im Zusammenhang mit Einheiten. Viele Einheiten sind mit einem Multiplikator von zehn hoch irgendetwas versehen, nämlich dann, wenn der Zahlenwert besonders groß oder klein ist. Zum Beispiel kommen Kondensatoren, Bauelemente zur Speicherung elektrischer Ladung, oft in Millionstel oder Milliardstel der Grundeinheit F (Farad) her. Ein Millionstel schreiben die Physiker entweder als 10^{-6} oder indem sie der Einheit ein μ voranstellen, also $1\ \mu\mathrm{F}$. Ein Milliardstel wird als 10^{-9} geschrieben oder durch ein vorangesetztes n gekennzeichnet, also $1\ \mathrm{nF} = 1 \cdot 10^{-9}\mathrm{F}$. Diese Faktoren müssen bei der Multiplikation von Einheiten korrekt berücksichtigt werden. In Tabelle 1.1 finden Sie die am häufigsten verwendeten Vorfaktoren.

Vorsilbe	Symbol	Faktor	Wert
Femto	f	10^{-15}	Billiardstel
Piko	p	10^{-12}	Billionstel
Nano	n	10^{-9}	Milliardstel
Mikro	µ	10^{-6}	Millionstel
Milli	m	10^{-3}	Tausendstel
Kilo	k	10^{3}	Tausend
Mega	M	10^{6}	Million
Giga	G	10^{9}	Milliarde
Tera	T	10^{12}	Billion
Peta	P	10^{15}	Billiarde

Tabelle 1.1: Häufig verwendete Vorfaktoren

Rechnen mit Skalaren

Rechenoperationen mit Skalaren verlaufen so, wie sie es von den natürlichen Zahlen gewohnt sind. Zur Addition werden die Skalare einfach addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert. Da bei eingesetzten Zahlenwerten oft eine Einheit dabei ist, müssen Sie darauf achten, dass Sie nur Skalare mit der gleichen Einheit addieren oder subtrahieren. Bei der Multiplikation oder Division multiplizieren und dividieren Sie die Einheit einfach mit. Im Allgemeinen erhalten Sie dann eine neue, andere Einheit, aber das ist in Ordnung. Ein Beispiel, das Sie physikalisch noch nicht verstehen müssen, ist

$$H = U + PV$$

und erklärt die Enthalpie H als die Summe von innerer Energie U und dem Produkt aus Druck P und Volumen V. Über den physikalischen Inhalt erfahren Sie viel im Teil B, Thermodynamik. Hier ist nur interessant, dass alle Größen Skalare sind und wie Sie beim Addieren mit der Einheit umgehen sollen. Die vorkommenden Einheiten sind $[H] = [U] = \mathrm{J}$ (Joule), wobei $\mathrm{J} = \mathrm{Nm}$ ist, also Energie die Einheit von Kraft (Newton) mal Weg (Meter) hat. Die Einheit des Drucks ist $[P] = \mathrm{N/m^2}$ und die vom Volumen $[V] = \mathrm{m^3}$. Das Produkt aus Druck und Volumen müsste jetzt die gleiche Einheit ergeben wie die Enthalpie beziehungsweise die inneren Energie, nämlich das Joule, für das J steht, sonst dürften Sie sie nicht addieren. Multiplizieren Sie einmal die Einheiten von P und V miteinander, finden

Sie, dass

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot \frac{\mathrm{m}^3}{1} = \mathrm{Nm} = \mathrm{J} \text{ ist.}$$

Das Produkt aus Druck und Volumen hat somit ebenfalls die Einheit J. Sie können also getrost die Terme U und PV addieren. Eine wertvolle Hilfe kann es in diesem Zusammenhang sein, alle Einheiten auf SI Einheiten zurückzuführen.

Beispiel zur Addition von Skalaren mit physikalischen Einheiten

Berechnen Sie die Enthalpie H eines idealen Gases in einem geschlossenen Behälter mit $2000\ \mathrm{cm}^3$ Volumen und einem Druck von $P = 10^5\ \mathrm{N/m}^2$ und einer inneren Energie von $4\ \mathrm{kJ}$.

Der Ausdruck für die Enthalpie, die Sie in Kapitel 10, Abschnitt »Mit Enthalpie Gase verschieben« genauer kennen lernen werden, lautet

$$H = U + PV$$

und Sie können direkt einsetzen:

$$\begin{aligned} H &= 4\mathrm{kJ} + 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot 2000\ \mathrm{cm}^3 \\ &= 4 \cdot 10^3 \mathrm{J} + 10^5 \cdot 2000 \frac{\mathrm{N}\ 10^{-6}\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2} \\ &= 4000\ \mathrm{J} + 200\ \mathrm{Nm} = 4000\ \mathrm{J} + 200\ \mathrm{J} = 4200\ \mathrm{J}. \end{aligned}$$

Der Punkt, den Sie bei diesem Beispiel verstanden haben sollten, ist dass sich die beiden Terme, $4000\ \mathrm{J}$ und $200\ \mathrm{J}$, nur addieren lassen, weil sie die gleiche physikalische Einheit haben.

Wenn Sie einmal bei einer Rechnung oder beim Herleiten eines physikalischen Zusammenhangs stecken geblieben sind, können Sie einen Einheitencheck machen, um zu sehen, ob Ihre Einheiten noch richtig sind. Häufig erkennt man so einen Fehler in einer Herleitung, den man anders nicht so leicht finden würde.

Mit Vektoren rechnen

Bei Vektoren haben die Rechenoperationen andere Regeln als bei Skalaren. Bevor Sie loslegen müssen Sie deshalb immer wissen, ob Sie über einen Vektor oder einen Skalar reden. Da Vektoren immer auch eine Richtung beinhalten, muss diese beim Zahlenwert des Vektors mit angegeben sein. Wie macht man das? Nun, Sie denken sich die Richtung und Größe als durch drei Koordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensystem gegeben. Man gibt an, wie weit man erst in x-Richtung, dann in y-Richtung und dann in z-Richtung gehen muss, um vom Anfang bis an die Pfeilspitze des Vektors zu gelangen. Die komponentenweise Darstellung für den elektrischen Feldvektor lautet

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix},$$

das heißt das elektrische Feld zeigt in eine Richtung, die durch die kartesischen Komponenten E_x, E_y und E_z gegeben ist, siehe Abbildung 1.1.

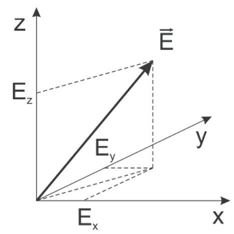

Abbildung 1.1: Der elektrische Feldvektor im kartesischen Koordinatensystem mit seinen drei Komponenten E_x, E_y und E_z

Häufig ist nur die Richtung entlang einer der Koordinatenachsen von null verschieden, dann ist das Leben leichter. Möchten Sie in einer Aufgabe nur die Gravitation der Erde betrachten, wissen Sie, dass die Gravitation immer nach unten zum Erdmittelpunkt zeigt. Eine Kraft, die auf der Gravitation beruht, kann geschrieben werden als

$$\boldsymbol{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_G \end{pmatrix}.$$

Den Index »z« können Sie gleich weglassen, weil Sie wissen, dass die Kraft nur in z-Richtung wirkt, und zwar mit einem Minuszeichen, wenn Sie Ihr Koordinatensystem so gewählt haben, dass z nach oben zeigt.

Addition von Vektoren

Wie addiert man zwei Vektoren? Sie können $\boldsymbol{E}_{\text{ges}} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ sowohl rechnerisch als auch graphisch (wenn auch ungenauer) bestimmen. Sie addieren die entsprechenden Komponenten, und erhalten so den Summenvektor

$$\boldsymbol{E}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_{\text{ges},x} \\ \boldsymbol{E}_{\text{ges},y} \\ \boldsymbol{E}_{\text{ges},z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1,x} + E_{2,x} \\ E_{1,y} + E_{2,y} \\ E_{1,z} + E_{2,z} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Bestimmen Sie die Summe $\boldsymbol{E}_{\text{ges}} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$.

$$\boldsymbol{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Nutzen Sie die Formel für Vektoraddition, erhalten Sie ein genaues Ergebnis für die Komponenten von E_{ges}

$$\boldsymbol{E}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} E_{\text{ges},x} \\ E_{\text{ges},y} \\ E_{\text{ges},z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1-2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}},$$

und Sie sind fertig.

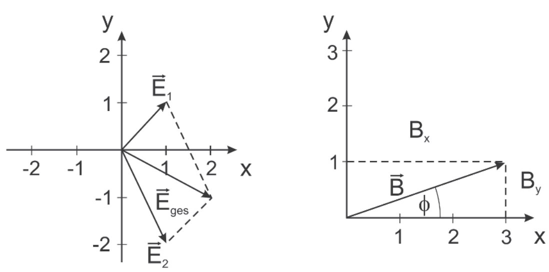

Abbildung 1.2: Zur Addition von Vektoren (links); zur Bestimmung der Länge eines Vektors (rechts).

Graphisch geht das so: In Abbildung 1.2 sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{E}_1$ und $\boldsymbol{E}_2$ eingezeichnet. Der Summenvektor ergibt sich, indem Sie $\boldsymbol{E}_1$ parallel entlang $\boldsymbol{E}_2$ nach rechts unten verschieben, bis er mit seinem Anfang an der Pfeilspitze von $\boldsymbol{E}_2$ angelangt ist (gestrichelte Linie). Der Summenvektor $\boldsymbol{E}_{\text{ges}}$ zeigt dann vom Anfang von $\boldsymbol{E}_2$ zur Spitze des verschobenen $\boldsymbol{E}_1$. Natürlich hätten Sie auch $\boldsymbol{E}_2$ nach rechts oben verschieben können und erhielten das gleiche Ergebnis, wie man der Abbildung ersieht. Die beiden verschobenen Vektoren (gestrichelte Linien) und die beiden ursprünglichen Vektoren bilden ein Parallelogramm. Sie können nun versuchen, die Komponenten von $\boldsymbol{E}_{\text{ges}}$ aus der Zeichnung abzulesen. Sie ersehen Abbildung 1.2, dass $\boldsymbol{E}_{\text{ges},x} \approx 2\ \text{V/m}$ und $\boldsymbol{E}_{\text{ges},y} \approx -1\ \text{V/m}$. Damit erhalten Sie wieder

$$\boldsymbol{E}_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Das ist sicher etwas ungenauer, aber für viele Zwecke ausreichend.

Zerlegung von Vektoren

Häufig ist es nützlich Vektoren, die in eine allgemeine Richtung zeigen, in ihre Komponenten entlang der Koordinatenachsen zu zerlegen. Mit den einzelnen Komponenten können Sie dann rechnen und das Ergebnis am Ende wieder zusammensetzen. Beispielsweise ist das beim schrägen Wurf hilfreich. Die Bewegung (Geschwindigkeit) in vertikaler Richtung ist vom Gravitationsfeld beeinflusst, die in horizontaler Richtung nicht. Wie zerlegt wird, sehen Sie am Beispiel eines Magnetfeldvektors in Abbildung 1.2 (rechts)

$$B_x = |\mathbf{B}| \cos\varphi \quad \text{und} \quad B_y = |\mathbf{B}| \sin\varphi$$

Länge eines Vektors

Hier lernen Sie, wie Sie die Länge (den Betrag, den Wert) eines Vektors bestimmen.

Beispiel: Berechnen Sie den Betrag des Magnetfelds $\boldsymbol{B}$ mit den Komponenten $B_x = 3$ T und $B_y = 1$ T, siehe Abbildung 1.2 (rechts).

Der »Satz des Pythagoras« schreibt Ihnen vor, dass Sie die einzelnen Komponenten eines Vektors quadrieren, addieren und dann aus der Summe die Wurzel ziehen. In dem gezeigten Bild ist $B_z = 0$ und

$$|\boldsymbol{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(1\ \mathrm{T})^2 + (3\ \mathrm{T})^2} = \sqrt{10}\mathrm{T} \approx 3{,}16\ \mathrm{T}.$$

Der Betrag des Magnetfelds in Abbildung 1.2 (rechts) ist $3{,}16$ T.

Die Länge von $\boldsymbol{E}_{\mathrm{ges}}$ aus Abbildung 1.2 (links) können Sie graphisch einfach mit einem Lineal messen. Sie können aber auch wieder rechnerisch vorgehen und erhalten auf diese Weise

$$|\boldsymbol{E}_{\mathrm{ges}}| = E_{\mathrm{ges}} = \sqrt{\left(2\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)^2 + \left(-1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right)^2} \approx 2{,}24\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Was hatten Sie aus der Zeichnung für die Länge herausbekommen? Hoffentlich etwas Ähnliches.

Skalarprodukt von Vektoren

Wie würden Sie Vektoren multiplizieren? Es gibt zwei grundverschiedene Möglichkeiten, die sich auch in ihrer physikalischen Bedeutung erheblich voneinander unterscheiden. Sie sollten die Unterschiede kennen und beherrschen. Je nachdem, ob das Ergebnis der Multiplikation ein Skalar oder ein Vektor ist, kennt man ein Skalarprodukt oder ein Vektorprodukt.

Das ***Skalarprodukt*** zweier Vektoren wird geschrieben als

$$c = a \cdot b,$$

das Ergebnis c ist ein Skalar, also eine Größe, die im Gegensatz zu a und b nur einen Wert und keine Richtung hat. Das Skalarprodukt wird folgendermaßen ausgerechnet

$$a \cdot b = |a||b|\ \cos\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ist, siehe Abbildung 1.3.

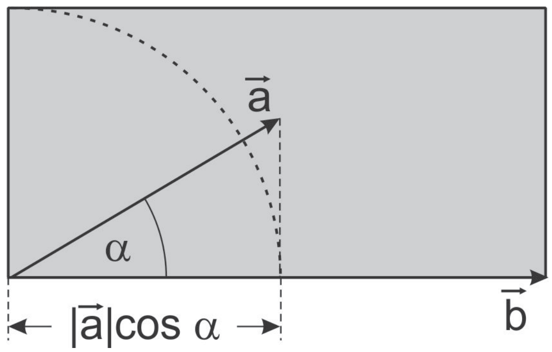

Abbildung 1.3: Das Skalarprodukt zweier Vektoren entspricht der durch den einen Vektor und die Kosinuskomponente des anderen Vektors aufgespannten Fläche eines Rechtecks (graue Fläche)

Ein Beispiel: Die physikalische Arbeit ist das Skalarprodukt aus Kraft und Weg. Berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine Masse auf einer Schiene mit einer Kraft von $\boldsymbol{F} = 2 \cdot 10^3$ N einen Weg von 10 m zu ziehen. Die Kraft wirke unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zu der Schiene.

Nach der Definition des Skalarprodukts ist die Arbeit W

$$\begin{aligned} W &= \boldsymbol{F} \cdot s \\ &= 2 \cdot 10^3 \text{ N } 10 \text{ m } \cos 30° \\ &\approx 17{,}3 \text{ kNm} = 17{,}3 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Die Arbeit, die für die Verschiebung der Masse entlang der Schiene benötigt wird, beträgt circa 17,3 kJ.

Sind die Vektoren senkrecht zueinander, verschwindet das Skalarprodukt, da $\cos 90° = 0$; zeigen sie in die gleiche Richtung, ist es maximal. Graphisch entspricht das Skalarprodukt der Fläche eines Rechtecks, das von der Kosinuskomponente des einen Vektors ($|a| \cos \alpha$ in Abbildung 1.3) und dem anderen Vektor (b) aufgespannt wird.

Sind Ihnen die Komponenten der beiden Vektoren bekannt, erhalten Sie das Skalarprodukt aus der komponentenweisen Multiplikation und Addition der Terme

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

was eine einfache Zahl ist (möglicherweise mit physikalischen Einheiten), also ein Skalar.

Beispiel: In obigem Beispiel wäre die komponentenweise Darstellung der Kraft

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{N},$$

wenn Sie die x-Achse entlang der Kraft wählen. Der Weg, um den die Kraft verschoben wird, ist bei dieser Wahl der x-Achse

$$s = \begin{pmatrix} 8{,}67 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}.$$

Nach der kompenentenweisen Definition des Skalarprodukts ergibt sich für die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} \\ &= F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z \\ &= (2 \cdot 10^3 \cdot 8{,}67 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 0)\text{Nm} \approx 17{,}3\text{kJ}, \end{aligned}$$

was natürlich das gleiche Ergebnis ist wie vorher.

Vektorprodukt von Vektoren

Das Vektorprodukt heißt so, weil als Ergebnis des Produktes zweier Vektoren wieder ein Vektor entsteht. (Dass das nicht zwingend so ist, wissen Sie vom Skalarprodukt, wo das Ergebnis des Produkts zweier Vektoren ein Skalar, also kein Vektor ist). Formal verwendet man für das Skalar- beziehungsweise Vektorprodukt ein unterschiedliches »Mal«-Zeichen. Den Punkt für ein Skalarprodukt und ein kleines »×« für das Vektorprodukt.

Das ***Vektorprodukt*** zweier Vektoren wird geschrieben als

$$c = a \times b$$

bei bekannten Vektoren a und b. Die Länge, also der Betrag von c ist gegeben durch

$$|c| = |a||b| \sin \alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen a und b ist.

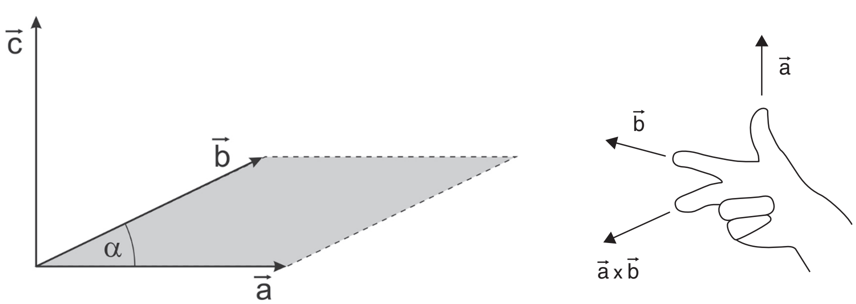

Abbildung 1.4: Das Kreuzprodukt $c = a \times b$ ist betragsmäßig $|c| = |a| \cdot |b| \sin \alpha$, was geometrisch der durch a und b aufgespannten grauen Fläche entspricht, und zeigt in eine Richtung, die senkrecht zu a und b ist (links) und der Rechten-Hand-Regel entspricht (rechts)

Ist α in einem konkreten Fall null oder $180°$, brauchen Sie sich über die Richtung des Vektors c keine Gedanken zu machen, seine Länge ist ja eh null da $\sin 0° = \sin 180° = 0$. Haben a und b aber einen von null oder $180°$ verschiedenen Winkel, wird die Richtung von c durch die so genannte »Rechte-Hand-Regel« festgelegt, siehe Abbildung 1.4 (rechts). Sie spreizen Daumen, Zeige- und Ringfinger Ihrer rechten (!) Hand so aus, dass drei rechte Winkel entstehen. Dann zeigt a (also der Vektor links im Vektorprodukt) in Richtung des Daumens, b in Richtung des Zeigefingers, und der Ergebnisvektor c zeigt dann in Richtung des Mittelfingers, also senkrecht sowohl zu a als auch b. Wegen des $\times$ zwischen den beiden Vektoren wird dieses Produkt auch oft ***Kreuzprodukt*** genannt.

Merken Sie sich einfach, dass der Betrag des Kreuzprodukts der Fläche entspricht, die die beiden Vektoren aufspannen (Abbildung 1.4). Sind sie parallel, ist die Fläche null und das Vektorprodukt verschwindet. Verschwindet es nicht, zeigt der Ergebnisvektor in eine Richtung senkrecht zu a und b, im Sinne der Rechten-Hand-Regel.

Aus der Rechten-Hand-Regel folgt, dass man bei der Vertauschung von a und b ein Minuszeichen einfügen muss.

$$c = a \times b = -b \times a$$

Eine weitere Regel für Kreuzprodukte könnte für Sie zum Beispiel im Zusammenhang mit der Berechnung von Drehimpulsen nützlich werden, nämlich die eines doppelten Kreuzprodukts

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b).$$

Wollen Sie einmal bei gegebenen Komponenten der Vektoren a und b ein Kreuzprodukt berechnen, verwenden Sie folgenden Ausdruck

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Der Drehimpuls $\boldsymbol{L}$ einer Masse $m = 3\,\mathrm{kg}$, die sich an einer Schnur angebunden mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}3\,\mathrm{m/s}$ um eine Achse dreht, ist das Kreuzprodukt aus dem Abstandsvektor $r = 50\,\mathrm{cm}$ der Masse von der Drehachse und dem Impuls $p = mv$ der Masse. Sie lernen den Drehimpuls später in Kapitel 2, Abschnitt »Der Drehimpuls« kennen.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}.$$

Berechnen Sie den Drehimpuls dieser Masse.

In diesem Beispiel ist die Bewegungsrichtung der Masse senkrecht auf dem Abstandsvektor, das heißt, dass $\alpha = 90°$ ist. Es ergibt sich für den Betrag des Drehimpulses

$$|L| = m|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| \sin\alpha = mrv \sin 90° = mrv.$$

Eingesetzt erhalten Sie

$$|\boldsymbol{L}| = 3\,\mathrm{kg}\ 0{,}5\ \mathrm{m}\ 0{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}45\frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Die Richtung des Drehimpulses bestimmt die Rechte-Hand-Regel: $\boldsymbol{L}$ steht senkrecht auf r und p und ist betragsmäßig $\boldsymbol{L} = 0{,}45\ \mathrm{kg\ m^2/s}$.

Alternativ ergibt die komponentenweise Berechnung des Kreuzprodukts

$$r = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{m} \quad \text{und} \quad p = 3\ \mathrm{kg} \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

die Sie durch Festlegung der x-Achse in Richtung des Ortsvektors bestimmt haben:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}45 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s}}.$$

Der Drehimpuls der Masse hat also lediglich eine z-Komponente und zeigt senkrecht zu r und p. Betragsmäßig kommt wieder $\boldsymbol{L} = 0{,}45\ \mathrm{kg\ m^2/s}$ heraus.

Wie gesagt, unterscheiden Sie die beiden Arten von Produkten von Vektoren!

Eine letzte Anmerkung zum Rechnen mit Vektoren: durch Vektoren kann man nicht dividieren, weil es keine sinnvolle Bedeutung hat, durch eine Richtung zu dividieren. Durch den Betrag eines Vektors zu dividieren, ist hingegen ok. Das verlängert oder verkürzt den Vektor.

Beispiel: Wie lang ist ein Vektor, der durch seinen Betrag dividiert worden ist?

$$\frac{a}{|a|} = \hat{n}.$$

$\hat{n}$ ist ein Einheitsvektor (Länge = 1), der in Richtung von a zeigt, das Hütchen verweist auf die Einheitslänge.

Trigonometrische Funktionen

Zwei wichtige und häufig auftretende trigonometrische Funktionen sind der Sinus und sein Verwandter, der Kosinus. Sie beschreiben periodisch wiederkehrende Ereignisse, wie zum Beispiel das Pendel, das kontinuierlich hin- und her schwingt. Sie sollten diese Funktionen gut kennen.

$$f(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

ist die allgemeine Form, in der A die ***Amplitude*** der Funktion ist, die angibt, wie groß die Auslenkung der Schwingung ist, und ω die so genannte ***Kreisfrequenz***. Sie gibt an, wie viele Winkeleinheiten (in radiant) pro Sekunde verstreichen, also wie schnell sich etwas dreht oder oszilliert.

Verwechseln Sie bitte nicht die Kreisfrequenz mit der Frequenz υ, die angibt wie viele ganze Umdrehungen je Sekunde passieren. Es besteht der Zusammenhang $\omega = 2\pi\upsilon$. Die Verwechslungsgefahr ist auch deshalb groß, weil Physiker aus Bequemlichkeit manchmal einfach Frequenz zu ω sagen, was genau genommen falsch ist.

Eins geteilt durch die Frequenz ist die Schwingungsdauer oder Periode $T = \upsilon^{-1} = 2\pi/\omega$. Die Phase α ist wichtig, wenn es um zwei oder mehrere Schwingungen geht und Sie angeben wollen, wie sie relativ zu einander schwingen.

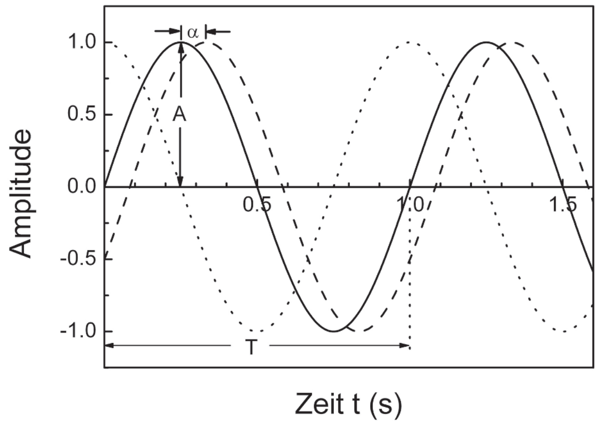

Abbildung 1.5: $A\sin(2\pi t/T)$ mit einer Periode von $T = 1$ s (durchgezogene Linie), $A\cos(2\pi t/T)$ (gepunktet) und eine Sinusfunktion mit Phasenverschiebung von $\alpha = -30°$ (gestrichelt). Eingezeichnet sind auch die Amplitude A und die Schwingungsdauer T

In Abbildung 1.5 sind drei Funktionen mit verschiedenen Werten für α, die so genannte ***Phase***, gezeichnet. Die nicht phasenverschobenen ($\alpha = 0$) Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ und ein mit $\alpha = -30°$ verschobener Sinus: $\sin(\omega t - 30°)$. Eine negative Phase verschiebt die Funktion nach rechts, eine positive nach links. So könnten Sie sagen, dass der Kosinus nichts anders ist als ein um $90°$ nach links verschobener Sinus. Dem ist auch so, wie sie der folgenden Liste trigonometrischer Beziehungen entnehmen können.

Trigonometrische Beziehungen

Diese Tabelle kann an der einen oder anderen Stelle nützlich sein. Sie müssen sie nicht auswendig beherrschen, sondern sollten nur wissen, dass Sie hier einige Ausdrücke für trigonometrische Funktionen finden können, falls Sie sie benötigen.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$
$$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin x$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

Diese Beziehungen sind einfach (Sie kennen sie wahrscheinlich schon), aber nützlich.

Noch ein Wort zu den Einheiten von Winkeln. Sie können in Grad (°) oder in Radiant (rad) angegeben werden. Es entsprechen

$$360° = 2\pi \text{ rad} \quad \text{bzw.} \quad 1° = \frac{\pi}{180°}\text{rad} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}.$$

Besondere Vorsicht ist beim Eingeben von trigonometrischen Funktionen in den Taschenrechner geboten. Überprüfen Sie, ob er auf Grad (Degrees oder DEG), Radiant (RAD) oder gar Neugrad (GRA oder GRD) eingestellt ist. Ein leichter Test ist $\sin 90°$, was 1 ergeben sollte, wenn er auf Grad eingestellt ist. Kommt $0{,}894$ heraus, steht er auf Radiant, kommt $0{,}988$ heraus, rechnen Sie gerade mit Neugrad ($360° \mathrel{\widehat{=}} 400$ Neugrad).

Komplexe Zahlen

Sie wollten schon immer einmal die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen? Jetzt erfahren Sie wie das geht. Sie könnten denken, dass das gar nicht geht. Denn welche Zahl sollte mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergeben. Haben Sie doch gelernt, dass Minus × Minus immer Plus ergibt. Für Mathematiker stellt so ein Argument jedoch keine nennenswerte Hürde dar. Um von den rationalen Zahlen (Zahlen, die als exakter Bruch dargestellt werden können, zum Beispiel 3/4) auf reelle Zahlen zu erweitern (Zahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können, zum Beispiel $\sqrt{2}$), erweitern Sie einfach den Zahlenstrahl und definieren, wie dort reelle Zahlen abgebildet werden sollen. Bei einer Wurzel aus einer negativen Zahl machen sie es ebenso. Das Ergebnis ist eine so genannte komplexe Zahl, die die Menge der reellen Zahlen erweitert. Die Vorschrift bei den komplexen Zahlen im Allgemeinen ist die, dass sie einen Realteil und einen Imaginärteil besitzen und dass der Realteil auf der reellen Achse einer Zahlenebene und der Imaginärteil auf einer Achse senkrecht dazu abgebildet werden. In Abbildung 1.6 (links) ist ein Beispiel einer komplexen Zahl wiedergegeben: $\hat{z} = 2 + i$. Das mysteriöse i ist das Kennzeichen des Imaginärteils einer komplexen Zahl und hat die Eigenschaft, dass $i^2 = -1$ ist, so dass es also die gesuchte Wurzel aus einer negativen Zahl ist.

Anders gesagt, ist die Wurzel aus -1 per Definitionem

$$i = \sqrt{-1}.$$

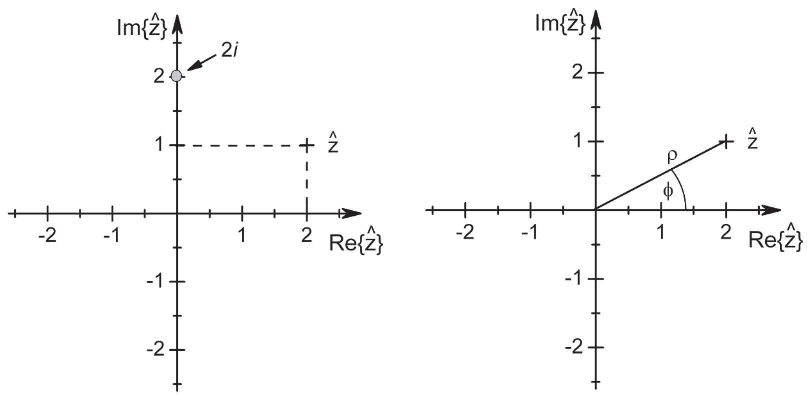

Abbildung 1.6: Die komplexe Zahlenebene mit dem Realteil $\mathrm{Re}\{\hat{z}\}$ und dem Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\hat{z}\}$ der komplexen Zahl $\hat{z}$ (links); in Polarkoordinatenschreibweise (rechts)

Es mag Sie etwas verblüffen, dass man i einfach so definiert, aber seien Sie versichert, es funktioniert, und man kann mit dieser Definition gut leben.

Mit diesem Wissen können Sie schon einmal loslegen. Wie berechnet man also die Wurzel aus -4?

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i.$$

Das Ergebnis $2i$ ist ebenfalls in Abbildung 1.6 (links) eingezeichnet, es liegt zwei Einheiten weit vom Ursprung auf der Achse des Imaginärteils, hat also keinen Realteil, oder anders gesagt, ist eine rein imaginäre Zahl. So einfach ist das. Es ist am besten, sich daran zu gewöhnen. Nach einer Weile kommt einem diese Rechenoperation genauso vertraut vor, wie das Wurzelziehen aus positiven Zahlen.

Es geht noch weiter mit den komplexen Zahlen. Jetzt, da Sie die Erweiterung der reellen Zahlen um die imaginäre Achse akzeptiert haben, können Sie sich auch Kombinationen von reellen und imaginären Zahlen vorstellen, wie zum Beispiel $\hat{z} = 2 + i$ aus Abbildung 1.6.

Komplexe Zahlen sind aus reellen und imaginären Zahlen zusammengesetzte Zahlen, die in allgemeiner Form so aussehen

$$\hat{z} = a + ib.$$

Dabei sind sowohl a als auch b reelle Zahlen! Erst die Kombination mit i ergibt eine komplexe Zahl. Der Teil von $\hat{z}$ ohne i wird Realteil ($\mathrm{Re}\{\hat{z}\}$) genannt, der Teil, der mit i multipliziert ist, heißt Imaginärteil ($\mathrm{Im}\{\hat{z}\}$).

Was können Sie damit anfangen, und warum werden Sie hier in der Buddelkiste damit beschäftigt? Es ist weniger wegen der Wurzel aus negativen Zahlen, sondern deswegen, weil eine Reihe von physikalischen Problemstellungen elegant mit komplexen Zahlen beschrieben werden können, zum Beispiel die Schwingungen eines Pendels oder Scheinwiderstände bei Wechselströmen. Dazu müssen Sie wissen, wie man mit komplexen Zahlen rechnet.

Rechenregeln für komplexe Zahlen

- Man **addiert** zwei komplexe Zahlen, indem man deren Realteile $\mathrm{Re}\{\}$ addiert, die zusammen den neuen Realteil ergeben, und dann die Imaginärteile $\mathrm{Im}\{\}$ addiert, deren Summe den neuen Imaginärteil ergibt

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 \quad \text{mit} \quad \hat{z}_1 = a_1 + ib_1 \quad \text{und} \quad \hat{z}_2 = a_2 + ib_2$$
$$= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$
$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = a_1 + a_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\{\hat{z}\} = b_1 + b_2.$$

- Die **Subtraktion** läuft entsprechend.
- Die **Multiplikation** verläuft so, als ob Sie zwei Klammern ausmultiplizieren und dann die Terme, die kein i enthalten, zum Realteil des Produkts und die, die ein i besitzen, zum Imaginärteil machen.

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{z}_1 \cdot \hat{z}_2 \\ &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned}$$

- denn $ib_1 \cdot ib_2 = i^2 b_1 b_2 = -b_1 b_2$. So finden Sie für das Produkt

$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\{\hat{z}\} = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

- Die **Division** von zwei komplexen Zahlen ist etwas umständlich, denn sie ist nicht direkt definiert. Stattdessen müssen Sie durch Erweitern des Quotienten mit dem konjugierten Nenner die Division in eine Multiplikation umwandeln. »Konjugierte« einer komplexen Zahl ist ein technischer Name für die einfache Vorschrift, (nur!) das Vorzeichen des Imaginärteils umzudrehen. Das Symbol dafür ist ein Sternchen als Superskript an der komplexen Zahl:

$$\hat{z}^* = a - ib \quad \text{wenn} \quad \hat{z} = a + ib.$$

- Das Produkt aus einer Zahl und der zu ihr konjugiert komplexen Zahl ist immer reell, denn

$$\hat{z} \cdot \hat{z}^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$$

- und das i ist verschwunden. Das machen Sie sich bei der Division zweier komplexer Zahlen zunutze:

$$\hat{z} = \frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}$$
$$= \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}[(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)]$$

- Real- und Imaginärteil des Quotienten sind

$$\mathrm{Re}\{\hat{z}\} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\{\hat{z}\} = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Alles klar?

Es gibt noch eine alternative Darstellung einer komplexen Zahl, die Sie aus Abbildung 1.6 (rechts) ersehen können. In der komplexen Ebene können Sie auch den Abstand zum Ursprung und dessen Winkel zur x-Achse angeben und erhalten eine eindeutige Bestimmung der komplexen Zahl. Die lautet

$$\hat{z} = \rho \sin \phi.$$

Natürlich müssen alle Berechnungen und Ergebnisse dieselben sein, egal welche Schreibweise Sie für die komplexe Zahl verwenden. Das ist auch so, aber manchmal ist es rechentechnisch einfacher mit kartesischen Koordinaten zu arbeiten und manchmal ist es geschickter, mit den Polarkoordinaten ρ und ϕ vorzugehen.

Sie können die Darstellungsweisen von $\hat{z} = a + ib$ und $\hat{z} = \rho \sin \phi$ ineinander umrechnen

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

oder

$$a = \rho \cos \phi \quad \text{und} \quad b = \rho \sin \phi.$$

Eine wichtige Identität, die auf Leonard Euler zurückgeht und die Sie sich gut merken sollten, gibt es noch. Über die komplexen Zahlen können Sie Sinus und Kosinus mit der e-Funktion verbinden

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{(Eulersche Identität)}.$$

Damit ist

$$\mathrm{Re}\{e^{ix}\} = \cos x \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\{e^{ix}\} = \sin x.$$

Diesen Bezug werden Sie benötigen.

Jetzt sind Sie für die Arbeit mit komplexen Zahlen gut gewappnet und haben, jedenfalls in diesem Buch, diesbezüglich nichts mehr zu befürchten.

Differentiation

Ableitungen nach der Zeit treten in der Physik sehr häufig auf. Das kommt daher, dass Sie sich oft nach dem zeitlichen Verhalten beziehungsweise der zeitlichen Änderung einer physikalischen Größe fragen. Mathematisch bedeutet das, die Ableitung dieser Größe nach der Zeit vorzunehmen, zum Beispiel ist die Beschleunigung a die Ableitung der Geschwindigkeit v

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} v(t) = \dot{v}(t).$$

Die verschiedenen Schreibweisen, die Sie hier für die Ableitung sehen, bedeuten alle dasselbe, sie tauchen mal so mal so im Text auf. Eine Feinheit noch: der Punkt über dem v symbolisiert eine Ableitung ausschließlich nach der Zeit. Wird nach einer anderen Variablen abgeleitet, schreibt man einen Strich

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x),$$

oder für höhere Ableitungen mehrere Punkte oder Striche.

Die Geschwindigkeit $v(t)$ selbst ist die zeitliche Änderung des Orts $x(t)$ und daher die Ableitung von $x(t)$ nach t

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

und so ergibt sich die Beschleunigung als die zweite Ableitung des Orts nach der Zeit

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Beachten Sie, dass Skalare und Vektoren (wie oben) gleichermaßen abgeleitet werden können. Bei explizit in Komponenten angegebenen Vektoren heißt das, dass Sie jede einzelne Komponente des Vektors ableiten. Die Ableitungen bilden dann einen neuen Vektor.

Rein mathematisch ist die Ableitung als »Grenzwert« zweier immer näher aneinander rückender Punkte einer Funktion geteilt durch den Abstand der beiden Punkte definiert. Graphisch ist das der Wert für eine »Steigung« eines immer kleiner werdenden Steigungsdreiecks (siehe Abbildung 1.7).

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

In Abbildung 1.7 sehen Sie eine parabelförmige Geschwindigkeit $v(t) = -4t^2 + 20t$.

1. **Legen Sie eine Sekante durch den Punkt** $t = 3$.

   Sie schneidet die Parabel in den Punkten $t = 3$ und $t + \Delta t = 4$. Die Steigung der Parabel im Punkt $t = 3$ erhält man nach obiger Vorschrift dadurch, dass man den Punkt $t + \Delta t$ immer dichter an den Punkt $t = 3$ heran rutschen lässt. Sie sehen, dass die Sekante dann der Tangente immer ähnlicher wird, genauer gesagt, dass ihre Steigungen immer ähnlicher werden. Schließlich, im Grenzfall $\Delta t \to 0$ sind die beiden Steigungen gleich, Sie haben die Ableitung im Punkt $t = 3$ erhalten.

2. **Sie bilden den Grenzwert durch Einsetzen der Funktion in die Definition der Ableitung**

$$\begin{aligned} a(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4(t + \Delta t)^2 + 20(t + \Delta t) - (-4t^2 + 20t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-8t\Delta t - 4(\Delta t)^2 + 20\Delta t}{\Delta t}. \end{aligned}$$

3. **Jetzt können Sie bedenkenlos durch Δt kürzen (es ist ja noch nicht null) und dann den Grenzwert $\Delta t \to 0$ bilden.**

   Sie erhalten

   $a(t) = -8t + 20$

   das ist die Ableitung der Geschwindigkeit $v(t)$.

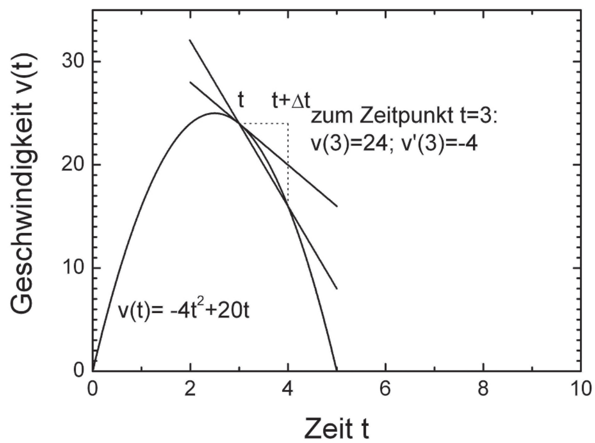

Abbildung 1.7: Parabelförmige Geschwindigkeit $v(t)$ mit einer Sekante und einer Tangente. Die Tangente hat die gleiche Steigung wie $v(3)$ und den gleichen Wert wie die Ableitung der Parabel für $t = 3$. Das gepunktete Steigungsdreieck der Sekante ist eingezeichnet.

Sie müssen diese Geschichte mit dem Grenzwert nicht so genau verstehen. Besser ist es, wenn Sie die wichtigsten Regeln des Differenzierens beherrschen.

Die wichtigsten Ableitungen

$$\begin{array}{lrcl} & \text{Funktion} & \to & \text{Ableitung} \\ \checkmark & [(a\ f(x)]' & = & a\ f'(x) \\ \checkmark & x^n & \to & nx^{n-1} \\ \checkmark & \sin bx & \to & b\ \cos\ bx \\ \checkmark & \cos\ bx & \to & -b\ \sin\ bx \\ \checkmark & e^{bx} & \to & be^{bx} \end{array}$$

und Ableitungsregeln:

✔ Implizit ist hier auch schon die wichtige **Kettenregel** verwendet worden

$f'[g(x)] = f'(g) \cdot g'(x)$(Kettenregel),

- die besagt, dass wenn zwei (oder mehr) Funktionen verschachtelt sind, die so genannte äußere Ableitung mit der Inneren multipliziert wird. Im Beispiel von $\sin(bx)$ besteht die Verschachtelung in der äußeren Funktion $\sin(z)$, die abgeleitet $\cos(z)$ ergibt, und der inneren Funktion $z = bx$, deren Ableitung b ist. Nach der Kettenregel werden die beiden miteinander multipliziert, und Sie erhalten $\sin(bx)' = b\ \cos(bx)$.
- Sollen Sie ein Produkt zweier Funktionen ableiten, gibt es auch eine Regel, die so genannte **Produktregel**

  $$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \qquad \text{(Produktregel).}$$

  Als Beispiel diene

  $$[x^2 \sin x]' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$
- Die aufwändigste Ableitungsregel ist die **Quotientenregel**

  $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \qquad \text{(Quotientenregel).}$$

  Das Beispiel für die Quotientenregel sei

  $$\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]' = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

Mit diesen Regeln kommen Sie schon ganz schön weit, durch dieses Buch tragen Sie diese Ableitungsregeln allemal.

Integration

Integration ist in gewisser Weise das Gegenstück zur Differentiation, jedenfalls in dem Sinn, dass man die ursprüngliche Funktion wieder erhält, wenn man erst integriert und das Ergebnis dann differenziert. Aber sie hat ihren eigenen Zweck, und Sie können viel Nützliches erreichen und verstehen, wenn Sie integrieren können.

Einige theoretische Betrachtungen

Eine Aufgabe des Integrierens ist die Flächenberechnung, obwohl Integrale noch viel mehr können. Versuchen Sie aber doch einmal Ihr Glück mit der Flächenberechnung, und betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^2 + 1/2$, die in Abbildung 1.8 dargestellt ist. Das so genannte Flächenintegral soll Ihnen die Fläche A unter der Kurve, also die Fläche zwischen Funktion und x-Achse liefern. Seitlich sei die Fläche durch $x = a = 0$ und $x = b = 1/2$ begrenzt.

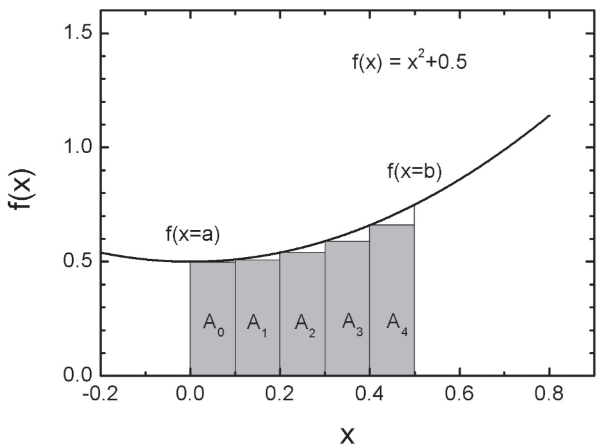

Abbildung 1.8: Zum Flächenintegral einer Funktion f(x)

Formal schreiben Sie ein solches Integral als

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

und würden eben diese Fläche erhalten, wenn Sie wüssten, wie man integriert. Wie würden Sie das anstellen, wenn Sie es nicht wissen?

Noch mal einen Schritt zurück: Eine einfache, wenn auch ungenaue Methode wäre es, ein Netz aus gleichmäßigen Kästchen über die Funktion zu legen und zu zählen, wie viele Kästchen im Intervall [0, 0,5] überwiegend zwischen Funktion und x-Achse liegen. Wenn Sie wissen, wie groß die Fläche eines Kästchens ist (etwa $1\ \mathrm{cm}^2$ oder $1\ \mathrm{mm}^2$), haben Sie die Lösung. Alternativ könnten Sie auch die gesuchte Fläche ausschneiden und das Gewicht mit einer bekannten Fläche des gleichen Papiers vergleichen. Klingt alles nicht sehr mathematisch (eher physikalisch), zugegeben, aber es würde funktionieren.

Letztlich machen es die Mathematiker nicht viel anders. Sie legen Rechtecke in die gesuchte Fläche, die gleich breit sind und deren Höhe an der linken Ecke genau bis an die Funktion heran reichen (eine so genannte Treppenfunktion, siehe Abbildung 1.8). Die Flächen dieser Rechtecke sind einigermaßen leicht zu berechnen, wie Sie gleich sehen werden. Dann addieren Sie die einzelnen Rechteckflächen und haben eine schon ganz gute Näherung an die gesuchte Fläche A. Ihr Ergebnis können Sie nun beliebig verfeinern, indem Sie die Rechtecke schmaler und schmaler machen, so dass sie am Ende unendlich dünn sind und Sie einen exakten Wert für die Fläche haben. Klingt nach Zauberei? Ist es aber nicht.

1. **Sehen Sie sich das schmale Rechteck A_0 ganz links im Beispiel von Abbildung 1.8 an.**

   Seine Fläche wäre Grundseite h mal Höhe $f(0)$ mit $h = (b - a)/n$, der Unterteilung des Integrationsintervalls in n gleiche Abschnitte h.

$$A_0 = hf(0) = h \cdot \frac{1}{2},$$

wobei für den konkreten Fall $n = 5$ und für die Grenzen a und b in Beispiel von Abbildung 1.8 die Unterteilung $h = 0{,}1$ resultiert. Schauen Sie sich A_0 noch einmal genau an: es wird automatisch kleiner, wenn Sie später die Unterteilungen immer kleiner werden lassen ($\lim_{n\to\infty}$).

2. **Als zweite Rechtecksfläche erhalten Sie**

   $$A_1 = hf(h) = h\left(h^2 + \frac{1}{2}\right).$$

   Die nächsten Flächen sind wie groß? Ja, Sie wissen es

   $$A_2 = hf(2h) = h\left(4h^2 + \frac{1}{2}\right)$$
   $$A_3 = hf(3h) = h\left(9h^2 + \frac{1}{2}\right)$$
   $$A_4 = hf(4h) = h\left(16h^2 + \frac{1}{2}\right).$$

3. **Jetzt müssen Sie nur noch die Flächen A_0 bis A_4 zusammenzählen.**

   Die Summe ist

   $$A = \sum_{i=0}^{4} A_i = h\left[\frac{1}{2} + \left(h^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(4h^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(9h^2 + \frac{1}{2}\right) + \left(16h^2 + \frac{1}{2}\right)\right].$$

   Sie können die Summe etwas umsortieren und für beliebige n erweitern, damit sie freundlicher aussieht. Insbesondere besteht die Freundlichkeit darin, dass Sie eine beliebige Anzahl von Unterteilung in Rechtecke vornehmen können und die Formel immer stimmt.

   $$A = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = h\left[\sum_{i=0}^{n-1}(ih)^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}\right] = h\left[h^2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} 1\right],$$

   denn Konstanten wie h oder $1/2$ dürfen Sie vor das Summenzeichen schreiben, wenn Sie möchten. (Achtung, hier ist i der Summationsindex und nicht die komplexe Zahl i).

4. **Bleiben Sie einen kurzen Moment bei der ursprünglichen Aufgabe, in Abbildung 1.8 die fünf Rechtecksflächen zu addieren.**

   Sie erhalten mit $h = 0{,}1$ und $n = 5$

   $$A = 0{,}1[0{,}5 + 0{,}51 + 0{,}54 + 0{,}59 + 0{,}66] = 0{,}28.$$

   Jeder der Summanden (mal $0{,}1$) entspricht der Fläche eines der Rechtecke $A_0 \ldots A_4$, sie werden nach rechts hin etwas größer, wie es sein sollte.

5. **Jetzt sehen Sie die tolle Überraschung.**

   Sie können nämlich über immer kleiner werdende Rechtecke summieren und ein immer genaueres Ergebnis erhalten. Der Grenzwert der Summe

   $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

   ist nämlich bekannt, und dann fällt das lästige Summenzeichen weg.

   Die zweite Summe ist ohnehin einfach anzugeben,

   $$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n,$$

   die Vorschrift lautet ja nur, eine Eins n-mal zu addieren.

6. **Für die Gesamtfläche erhalten Sie (mit $h = 1/(2n)$ eingesetzt)**

   $$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2n}\left[\frac{1}{(2n)^2}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n}{2}\right] \\ &= \frac{1}{(2n)^3}\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} - \frac{3}{8n} + \frac{1}{8n^2}\right] + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   Nun sind die »n« nur noch im Nenner, und Sie können getrost für eine unendlich feine Unterteilung $n \to \infty$ gehen lassen, das heißt der zweite und dritte Term in der Klammer verschwinden, und es bleibt für die Fläche übrig

   $$A = \frac{7}{24} \approx 0{,}29167.$$

   Das ist das exakte Ergebnis für die Fläche, erreicht durch Aufsummieren immer kleiner werdender Rechtecke unter der Kurve. Sie hätten das auch erreichen können, indem Sie die Rechtecke so gewählt hätten, dass sie alle über der Kurve liegen, im Grenzfall $n \to \infty$ ist das egal, es kommt das Gleiche heraus.

Für die Integration gilt wie für die Differentiation, dass die Grenzwertbildungen zwar spannend und erklärend sind, dass sie für das praktische Arbeiten nicht unbedingt erforderlich sind. Wenn Sie also mit dem Flächenintegral Mühe hatten, ist das nicht so schlimm. Schauen Sie sich den folgenden Abschnitt an.

Praktisches Integrieren

Das war jetzt etwas mühsam, aber sicher doch gleichzeitig auch spannend. Das Problem mit der Integration ist, dass man nicht so leicht allgemeine Integrationsregeln aufstellen kann wie beim Differenzieren. In dem Beispiel oben haben Sie für das Flächenintegral den geschlossenen Ausdruck für die unendliche Summe der Quadratzahlen kennen müssen. Und für allgemeine Funktionen sind diese Summen nicht immer bekannt. Um auf die meisten Integrale zu kommen, muss man sie entweder kennen oder raten. Ein geratenes Integral können Sie überprüfen, indem Sie es ableiten. Kommt wieder die ursprüngliche Funktion heraus, haben Sie richtig geraten. Dafür wird die ***Stammfunktion*** $F(x)$ eingeführt.

$F(x)$ ist *Stammfunktion* von $f(x)$, wenn $F'(x) = f(x)$

$F(x)$ kann nicht genau das Flächenintegral sein, das ja letztlich nur eine Zahl ist und keine Abhängigkeit mehr hat (Sie können kein x mehr einsetzen), und sie können es nicht ableiten (es wäre immer null). Sie werden sicher auch gleich bemerken, dass es mehrere Stammfunktionen zu einer Funktion $f(x)$ geben muss. Beim Ableiten fallen alle Konstanten ja restlos weg, die Stammfunktionen können sich also jeweils um eine Konstante c unterscheiden. Das führt zu dem Begriff ***unbestimmtes Integral***, in dem Sinne, dass die Konstante nicht bestimmt ist.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Das Integrationszeichen hat im Gegensatz zum Flächenintegral (oder *bestimmten Integral*) kein Integrationsgrenzen, Sie wollen ja auch keine Fläche mehr bestimmen. Sollten Sie es doch einmal wieder wollen, können Sie das auch über die Stammfunktion machen. Es ist nämlich

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

oder in Worten, das bestimmte Integral ist gleich der Stammfunktion ausgewertet am Ende des Integrationsintervalls minus der Stammfunktion ausgewertet am Beginn des Integrationsintervalls.

Achtung bei Flächenberechnungen: Negative Funktionsabschnitte erzeugen Flächen mit negativen Vorzeichen. Sie müssen Bereiche gleichen Vorzeichens separat integrieren und dann die Beträge addieren, wenn Sie die Flächen wissen wollen. Das bestimmte Integral hingegen zieht negative Bereiche von positiven ab.

Beispiel: Der $\sin x$, über eine volle Periode integriert (also als bestimmtes Integral), ist null, obwohl die Summe der Flächen unter dieser Funktion offensichtlich nicht null ist.

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$$

In der Praxis werden die Begriffe »Flächenintegral«, »bestimmtes« oder »unbestimmtes Integral« und »Stammfunktion« wechselseitig einfach als »Integral« bezeichnet. Sie müssen aus dem Zusammenhang heraus wissen, was gemeint ist. Doch genug der Theorie, Sie wollen sicher eine Liste der nützlichsten Integrale. Hier ist sie.

Nützliche unbestimmte Integrale

- ✓ $\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$
- ✓ $\int a\,dx = ax + c$
- ✓ $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \quad \text{für } n \neq -1$
- ✓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
- ✓ $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
- ✓ $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$
- ✓ $\int e^a\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

Schauen Sie sich an, wie leicht sich das Flächenintegral aus Abbildung 1.8, das Sie über die komplizierte Summenbildung berechnet hatten, über seine Stammfunktion ergibt.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4} = \frac{7}{24} \approx 0{,}29167,$$

wie gehabt!

Reihenentwicklungen

Die Reihenentwicklung ist ein wichtiger Punkt für Sie. In der Physik wird ein Problem häufig näherungsweise behandelt. Im Gegensatz zur Mathematik kommt es den Physikern nicht so sehr auf eine exakte Behandlungsweise eines Problems an, sondern sie machen Näherungen, die mathematisch einfacher zu behandeln sind, die aber das wesentliche physikalische Ergebnis genauso gut liefern. Natürlich muss man sich bei einer Näherung sicher sein, dass man das Problem nicht zu »zu einfach« beschreibt, aber wenn man sich da überzeugt hat, kommt man sehr weit. Viele Funktionen können Sie mit Reihenentwicklungen ganz gut nähern, hier sind einige der für dieses Buch wichtigsten vorgestellt.

Die e-Funktion kann als Summe von unendlich vielen Termen dargestellt werden. Zählt man alle zusammen, erhält man die e-Funktion genau.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Die Schreibweise rechts ist eine kompakte Form der expliziten Summe, wobei das $n!$ für den mathematischen Ausdruck »n-Fakultät« steht, der bedeutet, dass man alle Zahlen von 1 bis n miteinander multiplizieren soll, also zum Beispiel $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Noch ist nichts genähert, die Summe ist exakt das gleiche wie die e-Funktion selbst. Wenn Sie aber nicht von $n = 0$ bis $n = \infty$ summieren, sondern vielleicht nur bis $n = 2$ oder gar $n = 1$, dann machen Sie eine Näherung. Wie gut ist denn die Näherung? Probieren Sie es aus!

1. **Nehmen Sie zuerst einen kleinen Wert für** $(x \ll 1)$, **zum Beispiel** $x = 0{,}1$.

   Dann ist der exakte Wert $e^{0,1} = 1{,}105$ (auf drei Stellen genau). Die Reihenentwicklung bis $n = 1$ ergibt $e^{0,1} \approx 1 + 0{,}1 = 1{,}1$, also gar nicht so schlecht.

2. **Addieren Sie bis zum dritten Term in der Entwicklung, wird das Ergebnis noch besser.**

   Sie erhalten $e^{0,1} \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}005 = 1{,}105$, was in der Genauigkeit von drei Stellen sogar dem exakten Wert entspricht. Schon erstaunlich, nicht?

Wenn Sie eine höhere Genauigkeit als drei Stellen benötigen, müssen Sie mehr Terme in der Summe hinzunehmen, aber oft reichen drei.

In Abbildung 1.9 sind die e-Funktion und zwei ihrer Näherungen gezeichnet. Sie sehen, dass für hinreichend kleine x, die Näherungen sehr gut sind. Für $x > 0{,}5$ wird aber auch $f_2(x)$ so schlecht, dass Sie es nicht verwenden sollten. Als Faustregel gilt, dass die erste und zweite Näherung sehr ordentlich funktionieren, wenn $x < 0{,}1$.

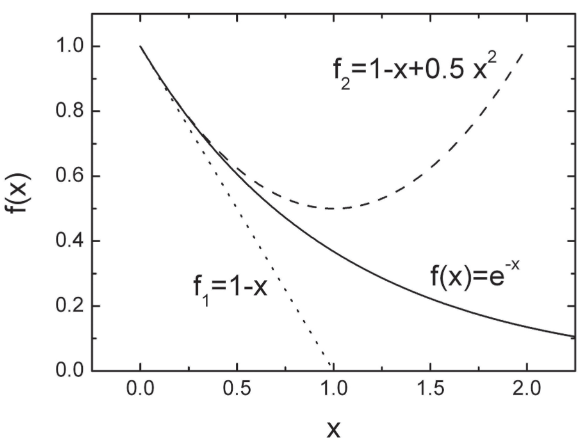

Abbildung 1.9: Die Exponentialfunktion (ausgezogene Linie), die Reihenentwicklung bis $n = 1$ (gepunktet) und bis $n = 2$ (gestrichelt). Für kleine Werte sind die Entwicklungen recht gut

Nun, das Beispiel gelang besonders gut, weil x recht klein war. Wählen Sie x größer, wird die Darstellung von e^x als Summe von Termen schlechter. Für $x = 2$ etwa finden Sie mit dem Taschenrechner, dass $e^2 = 7{,}389$. Die Summe bis $n = 2$ ergibt hingegen $e^2 \approx 1 + 2 + 4/2 = 5$, was gar nicht so toll übereinstimmt und Ihnen wahrscheinlich einen zu großen

Fehler in Ihrer Berechnung erzeugt. Würden Sie hingegen die Summe bis $n = 6$ weiterführen, erhielten Sie $e^2 \approx 7{,}356$, was wiederum ganz in Ordnung ist, wenn Sie es mit dem exakten Wert vergleichen. Nur, eine Entwicklung einer Funktion bis zum sechsten Term ist in der Praxis selten nützlich, da Sie sich zu viele Terme erzeugt haben und zudem noch mit x^6-Termen umgehen müssen.

Fazit: die näherungsweise Darstellung einer Funktion durch eine Summe über die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung lohnt sich insbesondere dann, wenn das Argument der Funktion klein ist. In jedem Fall müssen Sie prüfen, wie genau Ihr Ergebnis sein kann, insbesondere dürfen Sie nicht eine höhere Genauigkeit angeben, als die Genauigkeit Ihrer Reihenentwicklung zulässt.

Reihenentwicklungen einiger Funktionen

Reihenentwicklungen sind nützlich. Die für die Physik für Ingenieure am wichtigsten sind hier aufgeführt:

- ✓ $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
- ✓ $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$
- ✓ $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$
- ✓ $$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots \quad \text{für} |x| < \frac{\pi}{2}$$
- ✓ $$(1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 \ldots \quad \text{für} |x| < 1$$
- ✓ $$\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 \pm \ldots \quad \text{für} |x| < 1$$
- ✓ $$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \ldots \quad \text{für} -1 < x \leq 1$$

Einige von diesen Entwicklungen kann man sich ganz gut merken, weil sie ein Schema haben, das in so genannten Intelligenztests auftaucht: «Welches ist das nächste Element dieser Reihe?»