IN DIESEM KAPITEL

Mit Vorzeichen und Klammern rechnen

Wichtige Rechengesetze kennenlernen und anwenden

Sich mit Brüchen und Prozenten anfreunden

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen berechnen

Mehrere Terme ausmultiplizieren

Kapitel 1

Das kleine Einmaleins der Wirtschaftsmathematik: Einfache Algebra

Dieses Kapitel behandelt die Grundlagen der *Algebra* und legt damit das Fundament für die folgenden Kapitel. Vieles, was hier behandelt wird, haben Sie sicherlich schon einmal angewendet – im Alltag, im Job, im Studium oder im Mathematikunterricht. Hier haben Sie die Möglichkeit, Ihr Wissen aufzufrischen und die Grundlagen zu wiederholen.

Mit Vorzeichen rechnen

Haben Sie sich schon mal gefragt, warum eins plus eins zwei ergibt? Und wie werden eigentlich negative Zahlen addiert? Die *Addition* von zwei Zahlen wird mit dem Pluszeichen »+« gekennzeichnet:

$a + b = c$

Dabei nennt man a und b *Summanden*. Addiert man sie, das heißt, rechnet sie zusammen, erhält man die *Summe* c. Natürlich können auch mehr als zwei Zahlen addiert werden.

Die *Subtraktion*, auch bekannt als Minusrechnung, ist die Umkehroperation der Addition. Was bedeutet das? Betrachten Sie beispielsweise die Zahl 5. Wenn Sie 3 zu 5 addieren, ist das Ergebnis 8. Die Addition können Sie umkehren, indem Sie 3 wieder von 8 abziehen. Das Ergebnis ist 5 – die ursprüngliche Zahl. Die Subtraktion wird mit dem Minuszeichen »–« aufgeschrieben.

$$x - y = z$$

Man nennt x *Minuend* und y *Subtrahend*. z ist das Ergebnis der Subtraktion und wird als *Differenz* zwischen x und y bezeichnet. Die Subtraktion kann auch als Addition der Gegenzahl verstanden werden. Statt y von x abzuziehen, können Sie also auch $-y$ zu x addieren:

$$x - y = x + (-y) = z$$

Bei der *Multiplikation* und der *Division* multiplizieren oder dividieren Sie zunächst die Beträge der Zahlen. Der *Betrag* einer Zahl ist die Zahl ohne ihr Vorzeichen. Über das Vorzeichen des Ergebnisses entscheiden die Vorzeichen der Zahlen, die Sie miteinander malnehmen beziehungsweise durcheinander teilen.

Bei der Multiplikation oder Division von zwei Zahlen ist das Ergebnis positiv, falls beide Zahlen das gleiche Vorzeichen haben. Haben die beiden Zahlen unterschiedliche Vorzeichen, dann ist das Ergebnis negativ.

Bei dem nachfolgenden Beispiel werden nicht nur zwei, sondern drei negative Zahlen miteinander multipliziert. Können Sie trotzdem sagen, welches Vorzeichen das Ergebnis haben muss?

$$(-3) \cdot (-5) \cdot (-2)$$

Wenn nur negative Zahlen miteinander multipliziert werden, ist das ganz einfach. Wenn es eine gerade Anzahl an Zahlen ist, ist das Ergebnis positiv. Wenn es eine ungerade Anzahl an Zahlen ist, so wie hier, ist das Ergebnis negativ. Falls Ihnen nicht sofort klar ist, warum das so ist, probieren Sie es doch einfach mal mit ein paar Zahlen aus. Wenn Sie die Beträge der Zahlen in diesem Beispiel miteinander multiplizieren, erhalten Sie $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$. Das Vorzeichen muss ein Minus sein, also ist das Ergebnis -30.

$$(-3) \cdot (-5) \cdot (-2) = -30$$

Eine Besonderheit gibt es bei der Multiplikation mit null, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$24 \cdot (-9) \cdot 5 \cdot 0 \cdot (-11) \cdot 3$$

Das Ergebnis dieser Multiplikation ist 0.

Ist bei einer Multiplikation mindestens einer der Faktoren 0, so ist das Ergebnis der Multiplikation immer 0, unabhängig von den anderen Faktoren.

Wichtige Rechengesetze und deren Anwendung

Es gibt einige wichtige Rechengesetze, die Ihnen das Leben leichter machen. Das *Kommutativgesetz* besagt, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge Zahlen addiert oder miteinander multipliziert werden. Das Ergebnis ist immer das gleiche.

- ✔ Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a$
- ✔ Kommutativgesetz der Multiplikation: $a \cdot b = b \cdot a$

Das *Assoziativgesetz* sagt aus, dass Sie die Gruppierungen von Operationen verändern können, ohne dass sich dadurch das Ergebnis ändert. Oder einfacher ausgedrückt: Sie können Klammern setzen, wie Sie möchten.

- ✔ Assoziativgesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- ✔ Assoziativgesetz der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten für die Addition und die Multiplikation, aber NICHT für die Subtraktion und die Division.

Ein weiteres wichtiges Rechengesetz, das die Multiplikation mit der Addition beziehungsweise Subtraktion verbindet, ist das *Distributivgesetz*.

- ✔ Distributive Multiplikation über die Addition: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- ✔ Distributive Multiplikation über die Subtraktion: $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Wie Sie sehen, können Sie nach dem Distributivgesetz jeden Term innerhalb einer Klammer mit dem Koeffizienten außerhalb der Klammer multiplizieren, ohne dass sich das Ergebnis ändert. Umgekehrt funktioniert es natürlich auch, dann spricht man vom Ausklammern.

Das folgende Beispiel zeigt, wie die Anwendung der Rechengesetze Berechnungen vereinfachen kann:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2} \cdot 3\right) \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \left(\tfrac{1}{5} \cdot 7\right) \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot 5 &= \tfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 2 \cdot 5 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{5} \cdot 5 \cdot \tfrac{1}{7} \cdot 7 \\
&= \left(\tfrac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot 3\right) \cdot \left(\tfrac{1}{5} \cdot 5\right) \cdot \left(\tfrac{1}{7} \cdot 7\right) \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Wenn man Zahlen miteinander multipliziert, kann man – wie im ersten Schritt geschehen – die Klammern nach dem Assoziativgesetz weglassen. Das Ergebnis ändert sich durch die Änderung der Reihenfolge, in der die Multiplikationen durchgeführt werden, nicht. Im zweiten Schritt kommt das Kommutativgesetz zur Anwendung. Demnach können Sie die Reihenfolge der Zahlen, die miteinander multipliziert werden, vertauschen. Schließlich werden die Zahlen durch das Setzen von Klammern neu gruppiert. Hier können Sie also wieder das Assoziativgesetz nutzen. Zum Schluss berechnen Sie die Ausdrücke in den Klammern und kombinieren sie miteinander. Natürlich müssen Sie diese Zwischenschritte nicht alle aufschreiben. Wenn Sie die Aufgabe im Kopf lösen können und das Ergebnis sofort aufschreiben, ist es umso besser!

Häufig kommen in der Mathematik nicht nur Zahlen, sondern auch Variablen zur Anwendung. Natürlich gelten die Rechengesetze auch für Variablen, wie man am nachfolgenden Beispiel sehen kann.

Variablen verhalten sich immer wie Zahlen.

$$\begin{aligned} 2a \cdot (c+b) - \frac{1}{2}b \cdot (4a-2) &= 2ac + 2ab - \frac{1}{2}b \cdot 4a - \frac{1}{2}b \cdot (-2) \\ &= 2ac + 2ab - 2ab + b = 2ac + b \end{aligned}$$

Hier kommt im ersten Schritt das Distributivgesetz zur Anwendung, beim ersten Term über die Addition, beim zweiten Term über die Subtraktion. Danach können Sie nach dem Kommutativgesetz der Multiplikation die Reihenfolge der Zahlen und Variablen in den einzelnen Termen verändern. So lässt sich $-\frac{1}{2}b \cdot 4a$ als $-\frac{1}{2} \cdot 4ab$ und schließlich als $-2ab$ aufschreiben. Genauso kann $-\frac{1}{2}b \cdot (-2)$ zu b vereinfacht werden. Denken Sie hier daran, dass das Ergebnis der Multiplikation von zwei negativen Ausdrücken positiv ist. Nun können Sie die einzelnen Komponenten addieren beziehungsweise subtrahieren. Da $2ab - 2ab = 0$ ist, bleibt $2ac + b$ übrig. Das ist auch die Lösung, da der Ausdruck nicht weiter vereinfacht werden kann.

Übrigens: Wie Sie wissen, ist es nach dem Kommutativgesetz der Multiplikation egal, ob Sie xy oder yx schreiben, wenn Sie x mal y rechnen. Meistens werden die Buchstaben in solchen Fällen nach dem Alphabet geordnet. Sie sollten auf jeden Fall wissen, dass xy und yx das Gleiche bedeuten. $yx + 3xy$ kann also beispielsweise zu $4xy$ zusammengefasst werden.

Mit Brüchen rechnen

In diesem Abschnitt lernen Sie, wie Sie mit Brüchen rechnen können. Ein *Bruch* besteht aus einem Zähler, einem Bruchstrich und einem Nenner. Der *Zähler* steht über dem Bruchstrich, der *Nenner* darunter. Der Zähler wird durch den Nenner geteilt, also zum Beispiel:

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ oder } \frac{12}{4} = 3$$

Der Nenner eines Bruchs darf nie null sein!

Vertauscht man den Zähler und den Nenner eines Bruchs, so erhält man seinen *Kehrwert*. Der Kehrwert von $\frac{2}{3}$ ist also $\frac{3}{2}$. Multipliziert man eine Zahl – außer Null – mit ihrem Kehrwert, so ist das Ergebnis immer 1.

Die Multiplikation von Brüchen ist ganz einfach:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Natürlich können Sie nicht nur zwei Brüche miteinander multiplizieren, sondern auch mehrere. Dazu multiplizieren Sie einfach die Zähler aller Brüche miteinander und teilen dies durch das Produkt aller Nenner, wie dieses Beispiel illustriert:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{70}{180} = \frac{7}{18}$$

Wenn Sie das hier tun, ergibt sich $\frac{70}{180}$. Diesen Bruch können Sie noch kürzen. Das bedeutet, dass Sie den Zähler und den Nenner durch die gleiche Zahl teilen. In diesem Fall können Sie durch 10 teilen und erhalten dann das Ergebnis $\frac{7}{18}$.

Alternativ können Sie direkt im Produkt der Brüche kürzen:

$$\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\cancel{5}}{6} \cdot \frac{7}{\cancel{10}} = \frac{7}{3 \cdot 6} = \frac{7}{18}.$$

Hier werden die 2 im Zähler des ersten Bruchs und die 5 im Zähler des zweiten Bruchs mit der 10 im Nenner des dritten Bruchs gekürzt, da $\frac{2 \cdot 5}{10} = \frac{10}{10} = 1$ ergibt. Da die Multiplikation mit 1 das Ergebnis nicht verändert, kann sie auch weggelassen werden.

Wenn Sie einen Bruch durch einen anderen Bruch teilen möchten, tun Sie dies, indem Sie den ersten Bruch unverändert lassen und mit dem Kehrwert – also der Umkehrung – des zweiten Bruchs multiplizieren:

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Die Addition und Subtraktion von Brüchen sind etwas komplizierter.

Sie können Brüche nur addieren oder subtrahieren, wenn sie den gleichen Nenner haben.

Wenn zwei Brüche den gleichen Nenner haben, werden sie addiert, indem Sie die beiden Zähler addieren und den gemeinsamen Nenner beibehalten:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Wenn Sie hingegen zwei Brüche zusammenrechnen möchten, die unterschiedliche Nenner haben, so müssen Sie die beiden Brüche zunächst erweitern, sodass sie einen gemeinsamen Nenner haben. Dazu multiplizieren Sie den Zähler und den Nenner des Bruchs mit der gleichen Zahl. Der Wert des Bruchs verändert sich dadurch nicht. Nach der Erweiterung können Sie die Zähler addieren und den gemeinsamen Nenner beibehalten. Formal dargestellt sieht das so aus:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Schauen Sie sich auch die Addition von Brüchen an einem konkreten Beispiel an:

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12}$$

Zunächst müssen beide Brüche auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden. In diesem Fall ist der kleinste gemeinsame Nenner 12. Sie können auch einen anderen gemeinsamen Nenner verwenden, dann werden die Zahlen allerdings größer und das Rechnen damit schwieriger. Das Ergebnis ist aber das gleiche. Um den Nenner 12 zu erhalten, wird der erste Bruch mit 4 erweitert, das heißt, sowohl der Zähler als auch der Nenner werden mit 4 multipliziert. Der zweite Bruch wird mit 3 erweitert. Anschließend werden die Zähler der beiden Brüche addiert, der Nenner bleibt unverändert. So ergibt sich die Lösung $\frac{13}{12}$. Das können Sie entweder so stehen lassen oder alternativ als $1\frac{1}{12}$ aufschreiben. Diese Schreibweise bedeutet $1 + \frac{1}{12}$. Wenn Sie das ausrechnen, erhalten Sie $1 + \frac{1}{12} = \frac{12}{12} + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}$. Die beiden Schreibweisen bedeuten also das Gleiche.

Natürlich können die verschiedenen Grundrechenarten auch bei Rechnungen mit Brüchen miteinander kombiniert werden, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\begin{aligned}\frac{3}{17} \cdot \left(\frac{1}{5} + 3 + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{20}\Big/\frac{1}{4} &= \frac{3}{17} \cdot \left(\frac{3}{15} + \frac{45}{15} + \frac{20}{15}\right) + \frac{1}{20} \cdot 4 \\ &= \frac{3}{17} \cdot \frac{68}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1\end{aligned}$$

Jede ganze Zahl kann als Bruch dargestellt werden. Dazu schreibt man einfach die Zahl in den Zähler und 1 in den Nenner, zum Beispiel: $3 = \frac{3}{1}$, $8 = \frac{8}{1}$ und so weiter.

Hier kommt alles zusammen!

- ✔ Zunächst addieren Sie die Ausdrücke in der Klammer. Dafür finden Sie den gemeinsamen Nenner 15 und es ergibt sich $\frac{68}{15}$.
- ✔ Dies multiplizieren Sie mit der Zahl, die vor der Klammer steht: $\frac{3}{17} \cdot \frac{68}{15} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{17}} \cdot \frac{4 \cdot \cancel{17}}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$. Damit haben Sie den ersten Teil schon gelöst.
- ✔ Als Nächstes teilen Sie $\frac{1}{20}$ durch $\frac{1}{4}$. Dafür rechnen Sie $\frac{1}{20} / \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \cdot \frac{4}{1} = \frac{1}{5}$.
- ✔ Zum Schluss addieren Sie $\frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$ und sind damit fertig.
- ✔ War doch gar nicht so schwierig, wie es auf den ersten Blick aussieht, oder?!

Prozent und Promille

Ein *Prozent* ist ein Hundertstel. Sie können 1% also als $\frac{1}{100}$ ausdrücken.

Sie können jede Prozentzahl auch als Dezimalzahl ausdrücken, indem Sie den Bruch ausrechnen.

$$37\ \% = \frac{37}{100} = 0{,}37 \text{ oder } 21{,}8\ \% = \frac{21{,}8}{100} = 0{,}218$$

Um mit Prozenten zu rechnen, sollten Sie die folgenden Formeln kennen. Hier sind die Formeln für Steuern und Rabatte aufgeschrieben, aber natürlich können Sie sie auch für alle anderen Anwendungsbereiche verwenden.

- ✔ Preis ohne Steuern = Preis mit Steuern / (1 + Steuersatz in %)
- ✔ Ermäßigter Preis = ursprünglicher Preis · (1 – Rabatt in %)
- ✔ Ursprünglicher Preis = ermäßigter Preis / (1 – Rabatt in %)

Der Begriff *Promille* ist Ihnen vielleicht weniger geläufig. Das Promillezeichen ist ‰. 1 % entspricht 10 ‰. Promillewerte kann man auch als Brüche darstellen. Hier steht im Nenner die Zahl 1.000.

Promillewerte lassen sich problemlos in Prozentwerte umrechnen. Wenn Sie beispielsweise wissen möchten, wie viel Prozent 72,9 ‰ sind, können Sie das so aufschreiben:

$$72{,}9\ ‰ = \frac{72{,}9}{1.000} = 0{,}0729 = \frac{7{,}29}{100} = 7{,}29\ \%$$

Wie Sie sehen, müssen Sie das Komma nur um eine Stelle nach links verschieben, wenn Sie einen Promillewert in Prozent umrechnen wollen. Wenn Sie in die andere Richtung umrechnen möchten, also von Prozent in Promille, müssen Sie das Komma dementsprechend um eine Stelle nach rechts verschieben.

Mithilfe der Formel für Preise mit und ohne Steuern können Sie beispielsweise ausrechnen, wie viel Produkte ohne Steuern gekostet hätten. Dafür müssen Sie natürlich die entsprechenden Steuersätze kennen, wie dieses Beispiel zeigt:

Sie verlassen den Elektromarkt mit einem neuen Laptop. Der Laptop hat 722 Euro gekostet. Wie viel hätte er ohne Mehrwertsteuer gekostet? Auf dem Heimweg kaufen Sie sich noch eine Bratwurst für 2,50 Euro. Wie viel hätte sie ohne Mehrwertsteuer gekostet? Der Mehrwertsteuersatz für den Laptop beträgt 19 %, für die Bratwurst gilt der ermäßigte Steuersatz von 7 %.

Hier brauchen Sie die Formel: Preis ohne Steuern = Preis mit Steuern / (1 + Steuersatz). Zu beachten ist außerdem, dass hier zwei verschiedene Steuersätze zur Anwendung kommen. Der Laptop wird mit 19 % besteuert. Für die Bratwurst gilt der ermäßigte Mehrwertsteuersatz von 7 %. Nun müssen Sie die Zahlen nur noch in die Formel einsetzen:

$$\text{Laptop}: \frac{722}{1+0{,}19} = \frac{722}{1{,}19} = 606{,}72$$

$$\text{Bratwurst}: 2{,}5/(1+0{,}07) = 2{,}5/1{,}07 = 2{,}34$$

Auf ähnliche Art und Weise können Sie natürlich nicht nur Preise ohne Steuern, sondern auch Preise mit oder ohne Rabatt ausrechnen:

Da es sich bei dem Laptop nicht um das allerneueste Modell handelt, haben Sie 5 % Rabatt bekommen. Wie viel hätte er ohne den Rabatt gekostet?

Sie müssen hier die folgende Formel verwenden: ursprünglicher Preis = ermäßigter Preis / (1 – Rabatt in Prozent):

$$722/(1-0{,}05) = 722/0{,}95 = 760$$

Potenzrechnung

In der Analysis und anderen Teilgebieten der Mathematik werden Ihnen immer wieder *Potenzen* begegnen. Beim Rechnen mit Potenzen gibt es einige Regeln zu beachten, die hier kurz für Sie zusammengefasst sind:

- ✔ $x^2 = x \cdot x$

  »Hoch 2« bedeutet, dass eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird. Die Hochzahl, in diesem Fall 2, nennt man *Exponent*.

- ✔ $x^3 = x \cdot x \cdot x$

  »Hoch 3« bedeutet, dass eine Zahl dreimal mit sich selbst multipliziert wird.

- ✔ $x^0 = 1$

  Das gilt für alle x außer für $x = 0.\ 0^0$ ist nicht definiert.

- ✔ $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$

  Ein negativer Exponent bedeutet NICHT, dass das Ergebnis negativ ist.

- ✔ $x^{a/b} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a = \sqrt[b]{x^a}$
- ✔ $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- ✔ $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
- ✔ $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$
- ✔ $(xyz)^a = x^a y^a z^a$
- ✔ $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$

Es gilt NICHT: $(x + y)^a = x^a + y^a$. Wie Sie den Ausdruck berechnen, erfahren Sie im Abschnitt *Mehrere Terme ausmultiplizieren* am Ende dieses Kapitels.

Natürlich müssen Sie auch manchmal mehrere dieser Rechenregeln anwenden, wenn Sie einen Ausdruck so weit wie möglich vereinfachen möchten. Welche der Rechenregeln finden Sie im folgenden Beispiel wieder?

$$\frac{(k^2)^a \cdot l \cdot (m+1)^2}{l^{-3} \cdot k^a \cdot (m+1)} = \frac{k^{2a} \cdot l \cdot (m+1)^2}{k^a \cdot l^{-3} \cdot (m+1)} = \frac{k^{2a}}{k^a} \cdot \frac{l^1}{l^{-3}} \cdot \frac{(m+1)^2}{(m+1)^1}$$

$$= k^{2a-a} \cdot l^{1-(-3)} \cdot (m+1)^{2-1} = k^a \cdot l^4 \cdot (m+1)$$

Back to the roots: Mit Wurzeln rechnen

Das *Wurzelziehen* kann als eine Umkehrung des Potenzierens betrachtet werden. Schauen Sie sich einmal den folgenden Ausdruck an:

$x^a = b$

Wie würden Sie hier vorgehen, um x zu bestimmen? Richtig, Sie würden die »a-te« Wurzel ziehen. Damit berechnen Sie die Zahl, die mit a potenziert b ergibt: $x = \sqrt[a]{b}$.

Wenn über der Wurzel keine Zahl steht, also $\sqrt{x}$, dann ist damit die zweite Wurzel gemeint, das heißt $\sqrt[2]{x}$. Die zweite Wurzel bezeichnet man auch als Quadratwurzel.

Jede Wurzel lässt sich als Potenz aufschreiben. Dabei ist der Exponent, also die Hochzahl, ein Bruch. So lässt sich $\sqrt[3]{27}$ als $27^{1/3}$ schreiben, $\sqrt[2]{x^3}$ als $x^{3/2}$ und allgemein $\sqrt[a]{x^b}$ als $x^{b/a}$. Da sich jede Wurzel als Potenz schreiben lässt, gelten für das Rechnen mit Wurzeln ebenfalls die Regeln, die Sie im vorigen Abschnitt für das Rechnen mit Potenzen kennengelernt haben.

Unter einer Quadratwurzel oder einer anderen geradzahligen Wurzel kann keine negative Zahl stehen – zumindest nicht in der grundlegenden Algebra.

Für geradzahlige Wurzeln gilt:

$\sqrt{a^2} = |a|, \quad \sqrt[4]{a^4} = |a|, \quad \sqrt[6]{a^6} = |a|$ und so weiter.

Möchten Sie zum Beispiel $\sqrt{196}$ bestimmen, dann wissen Sie: Hierbei handelt es sich um die zweite Wurzel, da keine Zahl über der Wurzel steht. Das Ergebnis ist somit positiv, da für geradzahlige Wurzeln $\sqrt{a^2} = |a|$ gilt. In diesem Fall ist das a entweder 14 oder −14. In beiden Fällen ist das Quadrat 196 und der Betrag der Zahl, also die Lösung, 14.

Bei geradzahligen Wurzeln müssen Sie immer Betragsstriche setzen. Das Ergebnis ist nämlich stets positiv, egal ob a positiv oder negativ ist. Bei ungeradzahligen Wurzeln werden hingegen keine Betragsstriche gesetzt, also:

$\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[5]{a^5} = a$ und so weiter.

Bei $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$ handelt es sich beispielsweise um eine ungeradzahlige Wurzel, daher können Sie das Ergebnis ausrechnen. Steht unter einer ungeradzahligen Wurzel eine negative Zahl, so ist das Ergebnis auch negativ, in diesem Fall $-\frac{1}{3}$.

Häufig sind Rechnungen mit Wurzeln wesentlich einfacher und übersichtlicher, wenn Sie sie in der Prozentschreibweise aufschreiben. Dann können Sie die Potenzgesetze anwenden, wie in dem folgenden Beispiel:

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \sqrt{\sqrt[3]{125}} = \sqrt{5}$$

Wie Sie hier sehen, ist es egal, in welcher Reihenfolge Sie die Wurzeln ziehen. Das wird in der Potenzschreibweise schnell deutlich: $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = (125^{1/2})^{1/3} = 125^{1/6} = (125^{1/3})^{1/2} = \sqrt{\sqrt[3]{125}}$. Das Ergebnis ist also in beiden Fällen das gleiche, unabhängig davon, welche Wurzel man zuerst zieht. Das können Sie hier ausnutzen und die beiden Wurzeln vertauschen.

Lassen Sie sich von Logarithmen nicht aus dem Rhythmus bringen

Logarithmus – puh, das klingt ganz schön kompliziert. Ist es aber eigentlich gar nicht! Erinnern Sie sich an den Ausdruck, den Sie sich zu Beginn des letzten Abschnitts angeschaut haben, um den Wurzelbegriff zu verstehen:

$$x^a = b$$

Wenn Sie x bestimmen wollen, ziehen Sie die a-te Wurzel. Aber was tun Sie, wenn x und b gegeben sind und Sie a bestimmen wollen? Dann hilft Ihnen der Logarithmus weiter! Sie müssen den Logarithmus von b zur Basis x bestimmen. Das schreibt man dann so auf: $\log_x b$. Das erscheint auf den ersten Blick kompliziert? Schauen Sie sich das folgende Beispiel an, danach wird Ihnen der Logarithmus bestimmt klarer.

$$2^x = 16$$

Gesucht wird hier eine Zahl, mit der man 2 potenzieren muss, um 16 zu erhalten. Einfacher ausgedrückt: 2 hoch welche Zahl ergibt 16? Die Antwort ist:

$$x = \log_2 16 = 4$$

Die Lösung muss 4 sein, denn 2^4 ergibt 16.

Die Basis eines Logarithmus kann irgendeine positive Zahl sein. Wenn die Basis 10 ist, wird die Schreibweise $\log$ verwendet. In diesem Fall wird die Basis nicht spezifiziert. Zum Beispiel $\log 100 = 2$, denn $10^2 = 100$. Wenn die Basis die eulersche Zahl e ist, schreibt man $\ln x$ und spricht vom natürlichen Logarithmus. Dieser Ausdruck steht für $\log_e x$. Auch für das Rechnen mit Logarithmen gibt es ein paar Regeln, die Sie kennen sollten:

- ✔ $log_a 1 = 0$

  Das gilt für alle a. Unabhängig von der Basis ist der Logarithmus von 1 immer 0. Das sollte Sie nicht überraschen, da Sie wissen, dass a^0 (für alle a außer 0) stets 1 ergibt.

- $\log_a a = 1$
- $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
- $\log_c(a/b) = \log_c a - \log_c b$
- $\log_c a^b = b \cdot \log_c a$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

  Diese Eigenschaft ist besonders hilfreich, wenn Sie Logarithmen ausrechnen wollen. Auf dem Taschenrechner finden Sie nämlich nur den Zehnerlogarithmus (log) und den natürlichen Logarithmus (ln). Wenn Sie mit Ihrem Taschenrechner $\log_4 56$ ausrechnen wollen, können Sie $\frac{\log 56}{\log 4}$ oder $\frac{\ln 56}{\ln 4}$ eintippen.
- $log_a a^b = b$
- $a^{\log_a b} = b$

Auch bei den Rechenregeln für Logarithmen müssen Sie natürlich manchmal mehrere Regeln anwenden, wenn Sie einen Term so weit wie möglich vereinfachen möchten. Welche der Rechenregeln finden Sie in diesem Beispiel wieder?

$$\log_a(x/y) + \log_a(y^2) = \log_a x - \log_a y + 2 \cdot \log_a y = \log_a x + \log_a y = \log_a(\mathrm{xy})$$

Mehrere Terme ausmultiplizieren

Am Anfang dieses Kapitels haben Sie das Distributivgesetz kennengelernt, mit dessen Hilfe Sie einen Term mit einer Reihe weiterer Terme ausmultiplizieren können. In diesem Abschnitt geht es jetzt darum, *Binome* und *Polynome* auszumultiplizieren.

Ein Polynom ist eine Summe von Vielfachen von Potenzen einer Variablen. Ein Polynom, bei dem zwei Terme addiert werden, bezeichnet man als Binom. Sind es drei Terme, spricht man von einem Trinom.

$(x^2 + 1)$ ist also ein Binom, weil es aus zwei Termen besteht. $(x^2 + 4x - 7)$ ist ein Trinom.

Beim Multiplizieren von zwei Polynomen müssen Sie jeden Term des ersten Polynoms mit jedem Term des zweiten Polynoms multiplizieren und die Produkte entsprechend ihrer Vorzeichen addieren beziehungsweise subtrahieren. Ein einfaches Beispiel mit einem Binom und einem Trinom verdeutlicht die Vorgehensweise.

$$\begin{aligned}(x-y)\cdot(x^2+y-1)\\ &= x\cdot(x^2+y-1)-y\cdot(x^2+y-1)\\ &= x\cdot x^2+x\cdot y+x\cdot(-1)-y\cdot x^2-y\cdot y-y\cdot(-1)\\ &= x^3+xy-x-x^2y-y^2+y\end{aligned}$$

Zuerst teilen Sie das erste Binom in die beiden Terme x und $-y$ auf. Danach multiplizieren Sie jeden dieser beiden Terme mit jedem Term des Trinoms. Das ist hier sehr ausführlich dargestellt. Wie immer können Sie natürlich auch Zwischenschritte zusammenfassen. Schließlich können Sie am Ende noch Terme zusammenfassen, sofern möglich. In diesem Beispiel lässt sich nichts mehr vereinfachen.

Für einige Polynome gibt es bestimmte Regeln, mit denen das Ausmultiplizieren noch einfacher wird. Wir haben hier einige dieser Formeln aufgeschrieben, die Ihnen das Leben leichter machen werden:

- ✔ Die drei binomischen Formeln:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

- ✔ Die Differenz zwischen zwei Kubikzahlen:

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

- ✔ Die Summe von zwei Kubikzahlen:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$

Natürlich können Sie auch mehr als zwei Polynome miteinander multiplizieren. Im folgenden Beispiel sind es drei Binome:

$$\begin{aligned}(x+2)\cdot(x-2)\cdot(3+x^2) &= (x^2-4)\cdot(3+x^2)=x^2\cdot(3+x^2)-4\cdot(3+x^2)\\ &= 3x^2+x^4-12-4x^2=x^4-x^2-12\end{aligned}$$

In welcher Reihenfolge Sie die Binome miteinander multiplizieren, ist nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation egal. Multiplizieren Sie beispielsweise erst zwei Binome miteinander. Danach können Sie das Ergebnis mit dem dritten Binom multiplizieren und schon haben Sie das Endergebnis. Haben Sie erkannt, dass Sie die ersten beiden Binome mithilfe der dritten binomischen Formel einfacher miteinander multiplizieren können? Nein? Auch kein Problem. Dann haben Sie sich nur etwas mehr Arbeit als nötig gemacht.

Und wie gehen Sie vor, wenn Sie ein Trinom quadrieren sollen, zum Beispiel $(m + 3n - o)^2$?

Eine Summe, die in Klammern steht, wird NICHT quadriert, indem jeder Summand quadriert wird. Stattdessen wird die Klammer mit sich selbst multipliziert.

Wenn Sie a^2 ausrechnen wollen, bedeutet das, dass Sie $a \cdot a$ ausrechnen müssen. Hier ist das a eine Klammer, in der eine Summe aus mehreren Termen steht. Trotzdem gehen Sie genauso vor: Sie multiplizieren die Klammer mit sich selbst, also $(m + 3n - o) \cdot (m + 3n - o)$. Und dann gehen Sie so vor wie immer und schon ist das Problem gelöst!

$$\begin{aligned}(m + 3n - o)^2 &= (m + 3n - o) \cdot (m + 3n - o)\\ &= m \cdot (m + 3n - o) + 3n \cdot (m + 3n - o) - o \cdot (m + 3n - o)\\ &= m^2 + 3mn - mo + 3mn + 9n^2 - 3no - mo - 3no + o^2\\ &= m^2 + 6mn - 2mo + 9n^2 - 6no + o^2\end{aligned}$$