



Auf einen Blick

Einleitung	17
Teil I: Was Sie alles brauchen – die Zutaten	21
Kapitel 1: Differenzieren – die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch.....	23
Kapitel 2: Integrieren – genauso wichtig wie das Differenzieren.....	39
Kapitel 3: Komplexe Zahlen? Ja! Komplexe Sache? Nein!	59
Kapitel 4: Matrizen und nicht Matratzen.....	75
Kapitel 5: Eigenwertprobleme sind keine Probleme	89
Teil II: Es wird spannend – Differenzialgleichungen erster Ordnung	97
Kapitel 6: Was sind Differenzialgleichungen?.....	99
Kapitel 7: Für jede Differenzialgleichung eine passende Schublade.....	117
Kapitel 8: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	125
Kapitel 9: Separierbare Differenzialgleichungen erster Ordnung.....	147
Kapitel 10: Exakte Differenzialgleichungen erster Ordnung und die Euler-Methode..	167
Teil III: Differenzialgleichungen höherer Ordnung und fortgeschrittene Techniken	191
Kapitel 11: Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	193
Kapitel 12: Es wird ernst: Potenzreihen und reguläre Punkte.....	229
Kapitel 13: Singuläre Punkte.....	249
Kapitel 14: Laplace-Transformationen	273
Kapitel 15: Drei ausfallsichere numerische Methoden.....	297
Kapitel 16: Differenzialgleichungssysteme.....	319
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	335
Kapitel 17: Zehn Dinge, die Sie über Differenzialgleichungen wissen MÜSSEN	337
Stichwortverzeichnis	341







Inhaltsverzeichnis

Einleitung	17
Über dieses Buch	17
Konventionen in diesem Buch	17
Was Sie nicht lesen müssen	18
Törichte Annahmen über den Leser	18
Wie dieses Buch aufgebaut ist	18
Teil I: Was Sie alles brauchen – die Zutaten	19
Teil II: Es wird spannend – Differenzialgleichungen erster Ordnung	19
Teil III: Differenzialgleichungen höherer Ordnung und fortgeschrittene Techniken	19
Teil IV: Der Top-Ten-Teil	20
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden	20
Wie es weitergeht	20
TEIL I	
WAS SIE ALLES BRAUCHEN – DIE ZUTATEN	21
Kapitel 1	
Differenzieren – die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch	23
Was ist denn eine Ableitung?	23
Schreibweisen der ersten Ableitung	25
Schreibweise der höheren Ableitungen	25
Ableitungen der elementaren Funktionen	26
Ableitungsregeln	28
Summen- und Faktorregel	28
Produktregel	28
Quotientenregel	30
Kettenregel	31
Alles zusammen	37
Kapitel 2	
Integrieren – genauso wichtig wie das Differenzieren	39
Unbestimmtes Integral	39
Schreibweise mit Schlangenzeichen	42
Bestimmtes Integral	43
Drei Methoden, mit denen Sie (fast) jedes Integral knacken	45
Integration durch Substitution	45
Substitution am bestimmten Integral	46
Substitution am unbestimmten Integral	47
Partielle Integration	48





10 Inhaltsverzeichnis

Partielle Integration – die Vorgehensweise	49
Integralberechnung mittels Partialbruchzerlegung.....	51
Partialbruchzerlegung – die Vorgehensweise	51

Kapitel 3

Komplexe Zahlen? Ja! Komplexe Sache? Nein!..... 59

Was sind komplexe Zahlen?.....	60
Die drei Darstellungen.....	63
Die kartesische Darstellung mit x und y	63
Die Polardarstellung mit r , φ , Sinus und Kosinus	64
Die exponentielle Darstellung mit r , φ und der e-Funktion.....	65
Umrechnungen der Darstellungen	65
Umrechnung von (exponentiell beziehungsweise polar) in kartesisch	66
Umrechnung von kartesisch in (exponentiell beziehungsweise polar).....	66
Rechnen mit komplexen Zahlen.....	67
Die konjugiert komplexe Zahl	68
Das Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen	69
Das Multiplizieren komplexer Zahlen	69
Das Dividieren komplexer Zahlen	70
Das Potenzieren komplexer Zahlen mit reellen Potenzen	71
Die n Lösungen der Gleichung $z^n = w$	71
Die zwei Lösungen der Mitternachtsformel	73

Kapitel 4

Matrizen und nicht Matratzen

Grundlegendes zu den Matrizen.....	76
Rechnen mit Matrizen	77
Addieren und Subtrahieren von Matrizen.....	77
Multiplizieren von Matrizen	77
Determinante	81
Berechnung einer (2×2) -Determinante	81
Berechnung einer (3×3) -Determinante	82
Sarrus-Regel	82
Berechnung einer $(n \times n)$ -Determinante	85
Inverse Matrix.....	86

Kapitel 5

Eigenwertprobleme sind keine Probleme

Was sind Eigenwertprobleme, wenn es keine Probleme sind?.....	89
Berechnung der Eigenwerte	90
Berechnung von Eigenvektoren.....	92
Berechnung reeller Eigenvektoren	92
Berechnung komplexer Eigenvektoren	95



Inhaltsverzeichnis 11

TEIL II	
ES WIRD SPANNEND – DIFFERENZIALGLEICHUNGEN	
ERSTER ORDNUNG	97
Kapitel 6	
Was sind Differenzialgleichungen?	99
Ableitungen, Steigungen, Krümmungen	100
Ort – Geschwindigkeit – Beschleunigung	102
Differenzialgleichungen – Anfangswertprobleme – Randwertprobleme	109
Unterschied zwischen der allgemeinen Lösung und der Lösung eines	
Anfangswertproblems	111
Differenzialgleichungssysteme	112
Gekoppelte Differenzialgleichungen	113
Lineare Systeme – Matrizen	114
Kapitel 7	
Für jede Differenzialgleichung eine	
passende Schublade	117
Differenzialgleichungen klassifizieren	117
Gewöhnlich versus partiell	118
Linearität	118
Homogenität	119
Ordnung	120
Beispiele	121
Differenzialgleichungssysteme klassifizieren	122
Kapitel 8	
Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung	125
Grundlagen für die Lösung linearer Differenzialgleichungen	
erster Ordnung	126
Das große Ganze mithilfe der Richtungsfelder erkennen	126
Ein Richtungsfeld zeichnen	126
Verbindung von Steigungen zu einer Integralkurve	127
Erkennen des Gleichgewichtswerts	129
Anfangsbedingungen von Anfang an anwenden	129
Und jetzt lösen wir Differenzialgleichungen mit Funktionen	131
Und jetzt nehmen wir ein paar Konstanten dazu	131
Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung mithilfe von	
Integrationsfaktoren lösen	132
Nach einem Integrationsfaktor suchen	132
Mithilfe eines Integrationsfaktors eine Differenzialgleichung lösen	133
Der nächste Schritt: Integrationsfaktoren in Differenzialgleichungen	
mit Funktionen einsetzen	134





12 Inhaltsverzeichnis

Und jetzt eine ganz besondere Abkürzung!.....	135
Ein fortgeschrittenes Beispiel lösen.....	137
Prüfen, ob eine Lösung für eine Differentialgleichung erster Ordnung existiert.....	140
Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Differentialgleichungen.....	140
Die allgemeine Lösung finden	141
Ein paar Beispiele für Existenz und Eindeigkeit.....	142
Feststellen, ob es eine Lösung für eine nichtlineare Differentialgleichung gibt.....	143
Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für nichtlineare Differentialgleichungen.....	144
Beispiele für den Existenz- und Eindeigkeitssatz für nichtlineare Differentialgleichungen.....	144

Kapitel 9

Separierbare Differentialgleichungen erster Ordnung..... 147

Die Grundlagen separierbarer Differentialgleichungen.....	148
Einfach anfangen: Lineare separierbare Gleichungen	149
Implizite Lösungen.....	149
Explizite Lösungen aus impliziten Lösungen ableiten	151
Schwer zu knacken: Wann es keine explizite Lösung gibt.....	154
Trick: Nichtlineare separierbare Gleichungen in lineare separierbare Gleichungen umwandeln.....	155
Einige separierbare Gleichungen aus der Praxis	157
Ein Flussproblem in den Griff bekommen	157
Eine monetäre Aufgabenstellung.....	160
Partialbrüche in separierbaren Gleichungen.....	164

Kapitel 10

Exakte Differentialgleichungen erster Ordnung

und die Euler-Methode 167

Grundlagen exakter Differentialgleichungen	167
Exakte Differentialgleichungen definieren	168
Eine typische exakte Differentialgleichung berechnen.....	169
Feststellen, ob eine Differentialgleichung exakt ist	170
Einen praktischen Satz ausprobieren	170
Den Satz anwenden	171
Nicht exakte Differentialgleichungen mit Integrationsfaktoren bezwingen	173
Einen Integrationsfaktor finden.....	174
Mithilfe eines Integrationsfaktors eine exakte Gleichung erhalten	176
Der letzte Schliff: Die exakte Gleichung lösen	177
Mit der Euler-Methode numerisch werden.....	178
Die Methode verstehen	178
Die Genauigkeit der Methode auf einem Computer überprüfen.....	180



Inhaltsverzeichnis 13

Differenzengleichungen	186
Ein bisschen praktische Terminologie	186
Iterative Lösungen	187
Gleichgewichtslösungen	188

TEIL III DIFFERENZIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG UND FORTGESCHRITTENE TECHNIKEN 191

Kapitel 11 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten 193

Grundlegendes und Wissenswertes	194
Stufe 1: Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung	195
Charakteristisches Polynom	197
Stufe 2: Die partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung	205
Ansatz für $y_p(x)$	206
Bestimmung der Konstanten aus dem Ansatz	211
Beispiele – Beispiele – Beispiele	214
Erstes Beispiel	214
Abschließendes Beispiel der übleren Sorte	216
Gleichungen mit der Methode der Parametervariation lösen	220
Ein typisches Beispiel	221
Die Methode auf beliebige lineare Gleichungen anwenden	223
Die speziellen und allgemeinen Lösungen der inhomogenen Gleichung ...	224
Ein schönes Paar! Die Parametervariation trifft die Wronski-Determinante	226

Kapitel 12 Es wird ernst: Potenzreihen und reguläre Punkte 229

Grundlagen der Potenzreihen	229
Mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz einer Potenzreihe feststellen	230
Die Grundlagen des Quotientenkriteriums	230
Den Reihenindex verschieben	233
Taylor-Reihen	233
Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mithilfe von Potenzreihen lösen	234
Wenn Sie die Lösung bereits kennen	235
Wenn die Lösung nicht im Voraus bekannt ist	242
Ein berühmtes Problem: Die Airy-Gleichung	245

Kapitel 13 Singuläre Punkte 249

Die Grundlagen singulärer Punkte	249
Singuläre Punkte finden	250
Das Verhalten singulärer Punkte	250
Reguläre und irreguläre singuläre Punkte	251





14 Inhaltsverzeichnis

Erstaunliche Euler-Gleichungen	255
Reelle und unterschiedliche Nullstellen	256
Reelle und gleiche Nullstellen	257
Komplexe Nullstellen	258
Mit einem Satz alles zusammenfassen	260
Reihenlösungen in der Nähe singulärer Punkte bestimmen	260
Die allgemeine Lösung identifizieren	260
Grundlagen für die Lösung von Gleichungen in der Nähe singulärer Punkte	262
Mit den Nullstellen arbeiten	264
Ein numerisches Beispiel für die Lösung einer Gleichung in der Nähe singulärer Punkte	265
Die zweite Nullstelle einsetzen	268
Eine genauere Betrachtung der Kenngleichungen	270

Kapitel 14

Laplace-Transformationen 273

Eine typische Laplace-Transformation genauer betrachten	273
Entscheiden, wann eine Laplace-Transformation konvergiert	274
Grundlegende Laplace-Transformationen berechnen	275
Die Transformation von 1	276
Die Transformation von e^{at}	276
Die Transformation von $\sin(at)$	276
Eine praktische Tabelle sorgt für Erleichterung	278
Differenzialgleichungen mithilfe von Laplace-Transformation lösen	279
Einige Sätze bringen Sie auf den Weg	280
Eine homogene Gleichung zweiter Ordnung lösen	281
Eine inhomogene Gleichung zweiter Ordnung lösen	285
Eine Gleichung höherer Ordnung lösen	289
Laplace-Transformationen faktorisieren und Faltungsintegrale	291
Eine Laplace-Transformation in Brüche faktorisieren	292
Faltungsintegrale genauer betrachten	292
Schrittfunktionen beobachten	294
Definition der Schrittfunktion	294
Die Laplace-Transformation der Schrittfunktion ermitteln	295

Kapitel 15

Drei ausfallsichere numerische Methoden 297

Zahlenknacken mit der Euler-Methode	298
Die Grundlagen der Methode	298
Mithilfe von Code die Methode in der Praxis beobachten	299
Die verbesserte Euler-Methode	303
Die Verbesserungen	304
Der neue Code	304
Eine steilere Steigung in den neuen Code einfügen	309



Inhaltsverzeichnis 15

Noch mehr Genauigkeit durch die Runge-Kutta-Methode	313
Die Rekursionsrelation der Methode	313
Mit der Methode im Code arbeiten	314

Kapitel 16 **Differenzialgleichungssysteme 319**

Die Metamorphose: Verwandlung in ein Differenzialgleichungssystem	320
Beispiel 1 für die sagenhafte Umwandlung	320
Beispiel 2 für die sagenhafte Umwandlung	321
Lösen von linearen homogenen Differenzialgleichungssystemen erster	
Ordnung mit konstanten Koeffizienten	322
Mit dem richtigen Ansatz zum Ziel finden	324
Beispiel zu reellen und verschiedenen Eigenwerten	326
Beispiel zu reellen und teilweise gleichen Eigenwerten	328
Beispiel zu teilweise konjugiert komplexen Eigenwerten	330

TEIL IV **DER TOP-TEN-TEIL 335**

Kapitel 17 **Zehn Dinge, die Sie über Differenzialgleichungen wissen** **MÜSSEN 337**

Nahe Verwandte	337
Die Erbanlage	337
Tage der Vernunft	337
Eulers Großeltern	337
Ein besonderer Acker	338
Typisch Mathematiker	338
Persönlichkeitsstörung	338
Exotische Vögel	338
Aufgaben der Bäume	338
Unerwartete Gemeinsamkeiten	338
Lösungen	339

Stichwortverzeichnis 341



