



Auf einen Blick

Einführung	21
Teil I: Grundlagen der linearen Algebra	27
Kapitel 1: Die bunte Welt der linearen Algebra	29
Kapitel 2: Zahlen gegen reelle Komplexe	53
Kapitel 3: Körper und andere Welten.....	73
Kapitel 4: Wen Amors Vektor trifft	93
Teil II: Landschaftserkundung zur linearen Algebra	119
Kapitel 5: Vektorräume mit Aussicht.....	121
Kapitel 6: LGS – Auf lineare Steine können Sie bauen	145
Kapitel 7: Die Matrix ist überall.....	181
Kapitel 8: Die lineare Unabhängigkeitserklärung.....	213
Kapitel 9: Basen, keine lästige Verwandtschaft	235
Teil III: Analytische Geometrie fürs Leben	257
Kapitel 10: Geometrische Grundelemente.....	259
Kapitel 11: Abstand halten und schneiden.....	283
Kapitel 12: Geometrische Transformationen	311
Teil IV: Lineare Algebra for Runaway Dummies	347
Kapitel 13: Raubtierfütterung der Morphismen.....	349
Kapitel 14: Ganz bestimmte Determinanten	377
Kapitel 15: Es reicht, wir wechseln die Basis	399
Kapitel 16: Artige Eigenwerte.....	419
Kapitel 17: Diagonalisieren statt um die Ecke denken.....	439
Teil V: Der Top-Ten-Teil	477
Kapitel 18: Lineare Algebra in fast 10 Minuten	479
Stichwortverzeichnis	485







Inhaltsverzeichnis

Einführung	21
Zu diesem Buch	21
Konventionen in diesem Buch	21
Was Sie nicht lesen müssen	22
Törichte Annahmen über den Leser.....	22
Wie dieses Buch aufgebaut ist.....	22
Symbole in diesem Buch.....	25
Wie es weitergeht.....	25
TEIL I	
GRUNDLAGEN DER LINEAREN ALGEBRA	27
Kapitel 1	
Die bunte Welt der linearen Algebra	29
Dafür braucht man lineare Algebra.....	30
Systeme von Gleichungen lösen.....	31
Geometrische Rätsel knacken.....	32
Die Bausteine der linearen Algebra erkennen	34
Körper und Vektorräume	34
Sinnvolle Verknüpfungen von Vektoren	35
Die Werte in Reih' und Glied bringen.....	36
Matrizen und ihre Verknüpfungen	38
Determinanten	40
Alles in einen linearen Zusammenhang bringen	41
Lineare Abbildungen	41
Affine Transformationen.....	44
Noch bunter geht es nicht	44
Eigenwerte und Eigenvektoren	45
Diagonalisieren und der Spektralsatz.....	47
Wie man den linearen Überblick behält	49
Kapitel 2	
Zahlen gegen reelle Komplexe	53
Reelle Zahlen in der Realität.....	53
Grundidee der komplexen Zahlen	56
Crashkurs: Rechnen mit komplexen Zahlen.....	60
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen	60
Multiplikation und Division komplexer Zahlen	63





12 Inhaltsverzeichnis

Besonderheiten komplexer Zahlen	65
Beträge komplexer Zahlen	65
Konjugierte Komplexe	67

Kapitel 3

Körper und andere Welten 73

Verkündigung der Körpergesetze	73
Das Assoziativgesetz	75
Das Kommutativgesetz	78
Das neutrale Element	81
Inverse Elemente	82
Das Distributivgesetz	84
Die Algebraische Struktur der Körper	85
Endlich unendliche Körper	86
Der kleinste Körper	86
Die Klassischen Zahlkörper	89
Na so was: die Restklassenkörper	90

Kapitel 4

Wen Amors Vektor trifft 93

Woher die Vektoren kommen	93
Erweitern Sie Ihren Horizont – um n Dimensionen	94
Grundlegende Vektoroperationen	96
Addition und Subtraktion von Vektoren	97
Skalare Multiplikation von Vektoren	99
Das Skalarprodukt von Vektoren	100
Die Norm eines Vektors	102
Das Vektorprodukt	104
Der Winkel zwischen Vektoren	105
Diese Vektoren sind nicht normal	108
Jetzt wird es eng: der n -Raum	109
Der Euklidische n -Raum	110
Der komplexe n -Raum	111
Warum das alles kein Unsinn ist	112
Arbeit und Kraft	113
Das Drehmoment	114
Tricks mit Vektoren	116
Der Kosinussatz	116



Inhaltsverzeichnis 13

TEIL II

LANDSCHAFTSERKUNDUNG ZUR LINEAREN ALGEBRA..... 119

Kapitel 5

Vektorräume mit Aussicht..... 121

Räume voller Vektoren	121
Vektorraumoperationen.....	122
Addition von Vektoren.....	123
Skalare Multiplikation	124
Vektorraumeigenschaften.....	125
Massenhaft Beispiele für Vektorräume	126
Vektorräume aus n -Tupeln.....	126
Vektorräume aus Polynomen	127
Vektorräume aus Matrizen	129
Vektorräume von Folgen und Funktionen.....	130
Vektorräume aus linearen Abbildungen.....	132
Vektorräume aus Körpern.....	133
Unterräume – aber nicht im Kellergeschoss	133
Die formale Spezifikation der Unterräume	134
Eine Abkürzung zu den Unterräumen	135
Aufräumen in den Unterräumen.....	136
Summen von Unterräumen	140
Direkte Summen von Unterräumen.....	142

Kapitel 6

LGS – Auf lineare Steine können Sie bauen 145

Wie lineare Gleichungssysteme entstehen.....	145
Darstellungsmöglichkeiten linearer Gleichungssysteme.....	150
Die Quadratische Form	150
Die Stufenform	152
Die Idealform.....	153
Prinzipielle Lösungsmengen von LGSen	155
Eindeutige Lösung	155
Freie Parameter in der Lösung.....	156
Keine Lösungen	158
Das Gauß'sche Eliminationsverfahren zur Lösung von LGSen.....	158
Der Gauß-Jordan-Algorithmus.....	163
Lösung eines LGS über die erweiterte Koeffizientenmatrix	165
So geht es auch: LR-Zerlegung nach Gauß	167
Determinanten zur Bestimmung von Lösungen	169
Lösung à la Cramer & Cramer	170
Inverse Matrizen zur Lösung einer Matrixgleichung.....	172
Parametrisierte LGS.....	173



14 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 7

Die Matrix ist überall	181
Wie eine Matrix das Leben erleichtert	181
Lineare Gleichungssysteme als Matrizen darstellen	183
Grundlegende Matrixoperationen	184
Addition von Matrizen	184
Skalare Multiplikation von Matrizen	185
Matrix-Vektorprodukt	187
Matrizenmultiplikation	188
Transposition von Matrizen	191
Der Rang einer Matrix	193
Attribute von Matrizen	194
Quadratische Matrizen	194
Reguläre Matrizen	196
Idempotente Matrizen	197
Diagonalmatrizen	198
Adjungierte von Matrizen bestimmen	199
Komplementäre Matrizen erzeugen	200
Matrizen invertieren	202
Mittels Determinanten und Adjunkten	203
Mittels Gauß-Jordan-Algorithmus	203
Komplexe Matrizen, pardon, Matrizen	205
Unitäre Matrizen	205
Hermitesche Matrizen	207
Schieferhermitesche Matrizen	208
Ähnliche Matrizen	208
Der Matrix auf der Spur	210

Kapitel 8

Die lineare Unabhängigkeitserklärung	213
Wir kombinieren linear	213
Warum unabhängig besser ist als abhängig	215
Bestimmung der linearen Unabhängigkeit	216
Bei n -Tupel-Vektoren	217
Bei Polynomen	220
Bei Matrizen	222
Bei linearen Abbildungen	225
Im Allgemeinen	228
Fallstricke der linearen Unabhängigkeit	232
Lineare Unabhängigkeit mit der Lösung von Gleichungssystemen	233



Kapitel 9	
Basen, keine lästige Verwandtschaft	235
Auf dieser Basis beruht unsere Arbeit	235
Erzeugende Systeme	241
Lineare Hüllen als Unterräume	242
Lineare Unabhängigkeit von Basisvektoren	243
Erzeugte Unterräume	244
Matrizen und Basen: So geht das!	248
Dimensionen und Basisvektoren	249
Der Dimensionssatz	250
Jetzt haben Sie endlich die Koordinaten	251
Basen für Orthonormal-Verbraucher	252
TEIL III	
ANALYTISCHE GEOMETRIE FÜRS LEBEN	257
Kapitel 10	
Geometrische Grundelemente	259
Affinität zu geometrischen Räumen	259
Punkte im Euklidischen n -Raum	263
Darstellungsmöglichkeiten von Geraden	264
Parameterform	264
Gleichungsform	266
Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen	266
Parameterform	266
Normalenvektor und Normalenform	267
Koordinatenform	268
Achsenabschnittsform	270
Aus der Form gesprungen oder wie Sie von einer Form in die andere gelangen	271
Festhalten, jetzt kommen höherdimensionale Objekte	272
Parameterformen	272
Koordinatenformen und Gleichungssysteme	273
Was sonst noch interessant ist	275
Dreiecke	275
Parallelogramme	276
Spate	277
Flächen zweiter Ordnung	279
Elliptisches Paraboloid	280
Hyperbolisches Paraboloid	281



16 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 11

Abstand halten und schneiden	283
Wir bestimmen den Abstand von.....	283
Punkt zu Punkt	284
Punkt zu Gerade	286
Punkt zu Ebene.....	288
Wenn sich zwei Geraden treffen	290
Abstand paralleler Geraden	290
Abstand windschiefer Geraden.....	292
Schnittpunkt und -winkel zweier Geraden	295
Ebenen kommen ins Spiel.....	299
Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene	299
Durchstoßpunkt und -winkel von Gerade zu Ebene	300
Abstand zweier paralleler Ebenen.....	303
Schnittgerade und -winkel zwischen Ebenen	304
Überdimensionale Objekte	308
Abstandsbestimmung allgemein	308
Schnittobjekte und -winkel ermitteln	309

Kapitel 12

Geometrische Transformationen	311
Geometrie jenseits Lineal und Zirkel	311
Affine Abbildungen.....	312
Identität	317
Translation	317
Transvektion (Scherung)	318
Rotation	321
Spiegelung	328
Kontraktion	334
Die Hauptachsentransformation.....	336
Hauptachsentransformation – 3D.....	340

TEIL IV

LINARE ALGEBRA FOR RUNAWAY DUMMIES

347

Kapitel 13

Raubtierfütterung der Morphismen.....	349
Was Homomorphismen eigentlich sind.....	349
Beispiel 1: Quadratische Funktionen.....	350
Beispiel 2: Trigonometrische Funktionen.....	351
Beispiel 3: Exponential- oder Logarithmusfunktionen	352
Beispiel 4: Endlich linear	354



Inhaltsverzeichnis 17

Wurfarten, die Sie sich merken sollten	355
Kern einer linearen Abbildung	355
Bild einer linearen Abbildung	355
Surjektivität	356
Injektivität	357
Bijektivität	358
Operationen auf Homomorphismen	359
Morphismen, Aufzucht und Pflege	362
Homomorphismen	362
Epimorphismen	362
Monomorphismen	362
Isomorphismen	363
Endomorphismen	364
Automorphismen	365
Projektionen	366
Orthogonale Projektionen	369
Ansteckungsgefahr bei Morphismen, Diagnose: Singularität	371
Lineare Operatoren in der Technik	373

Kapitel 14

Ganz bestimmte Determinanten 377

Warum Determinanten wichtig sind	377
Was Permutationen mit Determinanten zu tun haben	379
Berechnung von Determinanten	381
Determinanten von 2x2-Matrizen	381
Determinanten mit der Regel von Sarrus berechnen	382
Berechnung von Determinanten im Allgemeinen	385
Rechenregeln für Determinanten	386
Wie sich die Transpositionen auf Determinanten auswirken	386
Diagonalmatrizen sind die besten Freunde von Determinanten	387
Die Determinante der Einheitsmatrix	387
Skalare Multiplikation und Determinanten	388
Determinanten und der Zeilentausch/Spaltentausch	388
Leibniz trifft auf Gauß	389
Determinantenberechnung für Dreiecksmatrizen	390
Zusammenhang zwischen Determinante und Invertierbarkeit einer Matrix	391
Unterdeterminanten	391
Der Entwicklungssatz	394
Determinanten von Homomorphismen	396
Determinanten und das Spatprodukt	397





18 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 15

Es reicht, wir wechseln die Basis	399
Ausgangssituation	399
Wo die neuen Basisvektoren herkommen	403
Die Übergangsmatrix bestimmen	404
Die Übergangsmatrix als linearer Operator	410
Basiswechsel bei allgemeinen Homomorphismen	413
Ein instruktives Beispiel zum Basiswechsel	416
Dem Ingeniör ist nichts zu schwör	416

Kapitel 16

Artige Eigenwerte	419
Eigenartige Werte	419
Eigenwerte von Endomorphismen	421
Von Eigenwerten über Eigenvektoren zu Eigenräumen	422
Eigenwerte der Matrixdarstellungen	423
Wie man aus Eigenwerten die zugehörigen Eigenvektoren presst	426
Eigenartige Eigenräume	427
Das Jacobi-Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten	429
Praxisbeispiele	434
Mechanische Schwingungen	434
Elektromagnetische Schwingkreise	435

Kapitel 17

Diagonalisieren statt um die Ecke denken	439
Was Matrizen und Homomorphismen gemeinsam haben	439
Was die Diagonalmatrix eines Homomorphismus bedeutet	442
Wann Sie überhaupt diagonalisieren können	444
Diagonalisieren ohne Verrenkungen	447
Eine Null als Eigenwert	449
Eigene Werte ohne Potenz	451
Was man Schlaues mit der Diagonalisierung anstellen kann	452
Potenzieren nach Basiswechsel	453
Betrachten Sie den Gipfel	455
Der Spektralsatz für Endomorphismen	460
Anwendung des Spektralsatzes für den reellen Zahlenkörper	465
Anwendung des Spektralsatzes für den komplexen Zahlenkörper	468
Die charakteristische Gleichung an unerwarteter Stelle	470
Der Satz von Cayley-Hamilton	471
Anwendungen des Satzes von Cayley-Hamilton	472
Was Sie tun, wenn Sie oben angekommen sind	475

**Inhaltsverzeichnis 19**

TEIL V	
DER TOP-TEN-TEIL.....	477
Kapitel 18	
Lineare Algebra in fast 10 Minuten.....	479
Linearität verstehen und keine Angst vor Algebra haben.....	479
Grundaspekte der analytischen Geometrie verinnerlichen.....	480
Gleichungssysteme mit geometrischen Objekten identifizieren.....	480
LGSs mit unterschiedlichen Methoden lösen.....	480
Zusammenhang von Matrizen und linearen Abbildungen begreifen.....	481
Determinanten und Eigenwerte als Herz einer Matrix betrachten.....	481
Basiswechsel als Spezialfall eines Isomorphismus erkennen.....	481
Diagonalisieren zur Ermittlung von Eigenwerten.....	482
Den Spektralsatz als Gipfel der Erkenntnis ansehen.....	482
Stichwortverzeichnis.....	485



