



## IN DIESEM KAPITEL

Grundlegendes über Analysis und grundlegende Funktionen

Polynome, rationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen

Umkehrfunktionen verstehen

Trigonometrische Funktionen kennenlernen

Stetigkeit von Funktionen erleben

Grenzwerte an praktischen Methoden verstehen

# Kapitel 1

## Grundlagen der Analysis

Funktionen sind einer der Grundbestandteile der Mathematik, die ich Ihnen in diesem Kapitel erklären werde. Sie lernen hier dieses Basiswissen und praktisch relevante Beispiele kennen. Im zweiten Teil des Kapitels geht es um erste Zusammenhänge und komplexere Vorgänge rund um das Thema Funktionen: Ich zeige Ihnen Grenzwerte, also das Verhalten von Funktionen im Unendlichen, und in diesem Zusammenhang eine der wichtigsten Eigenschaften von Funktionen – die Stetigkeit.

### Was Funktionen eigentlich sind

**Ein Beispiel:** Starten Sie bei Ihrem Geburtstag. Obwohl ich diesen nicht kenne, weiß ich, dass Sie dabei nur *ein* Datum im Kopf haben. Jedem Menschen ist dieser Tag eindeutig zugeordnet. Sie können eine Geburtstagszuordnung aufstellen und so jedem Namen ein Datum zuweisen, beispielsweise Paul  $\mapsto$  29.07.2006 oder anders geschrieben  $\text{geb}(\text{Paul}) = 29.07.2006$  oder kürzer  $g(\text{Paul}) = 29072006$ . Das ist eine Funktion.



Eine *Funktion* ist eine Vorschrift mit der Eindeutigkeitsbedingung, das heißt keinem Objekt werden zwei Dinge zugeordnet. Dabei gibt es die Menge der Objekte, von denen Sie starten – den *Definitionsbereich*, und die Menge der Werte, in die Sie abbilden – den *Bildbereich* oder *Wertebereich*.



## 34 TEIL I Eindimensionale Analysis

In diesem Beispiel ist der Definitionsbereich eine Menge von Menschen und der Bildbereich die Menge der Geburtsdaten (hier als achtstellige Zahl geschrieben).



Sie kürzen eine solche Vorschrift (Funktion)  $f$  mit dem Definitionsbereich  $D$  und dem Wertebereich  $W$  wie folgt ab:  $f : D \rightarrow W$  und lesen » $f$  ist eine *Funktion von  $D$  nach  $W$* «.

**Noch ein Beispiel:** Betrachten Sie die beiden Funktionen  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f_1(x) = x^2$  und  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$ . Unterscheiden sich die beiden Funktionen? Ja, denn die Wertebereiche stimmen nicht überein: Bei der ersten Funktion betrachten Sie die nichtnegativen reellen Zahlen, bei der zweiten Funktion alle reellen Zahlen. Allerdings sind die Zuordnungsvorschriften und der Definitionsbereich gleich. Auch die Graphen beider Funktionen stimmen überein, wie Sie in Abbildung 1.2b sehen können.



Mit der Menge  $\mathbb{R}$  bezeichnet man die Menge der reellen Zahlen, also typische Zahlen wie  $\pi$  (Pi) oder  $-\sqrt{2}$  (minus Wurzel zwei). Eine besondere Teilmenge der reellen Zahlen, die aus den nicht negativen Zahlen besteht, wird mit  $\mathbb{R}_0^+$  bezeichnet.



Zwei Funktionen sind *gleich*, wenn sie in Definitionsbereich, Wertebereich und Zuordnungsvorschrift übereinstimmen.

Umgekehrt gilt diese Eindeutigkeitseigenschaft bei Funktionen nicht immer: Sehen Sie sich noch einmal das Ausgangsbeispiel an. Es gibt durchaus Menschen, die am gleichen Tag Geburtstag haben – so etwa Pauls Zwillingsschwester Paula:  $g(\text{Paula}) = 29072006$ . Oder betrachten Sie die Funktion  $f_1$ . Es gilt:  $f_1(-1) = (-1)^2 = 1 = 1^2 = f_1(1)$ .

Dagegen erfüllt die Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = 2x^3$  neben der *Eindeutigkeitsbedingung* auch die umgekehrte *Eineindeutigkeitsbedingung*. Wenn  $2x^3 = 2y^3$ , so auch  $x^3 = y^3$  und  $x = y$ . Eine solche Funktion heißt *injektiv*.



Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt *injektiv*, wenn aus  $f(x) = f(y)$  immer auch  $x = y$  folgt.

**Und noch ein Beispiel:** Schauen Sie sich noch einmal die beiden Funktionen  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, f_1(x) = x^2$  und  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$  an. Sie unterscheiden sich in den Wertebereichen. Die erste Funktion  $f_1$  hat die Eigenschaft, dass jede Zahl in ihrem Wertebereich auch erreicht oder angenommen wird. Solche Funktionen nennt man *surjektiv*. Die zweite Funktion  $f_2$  dagegen wird beispielsweise die Zahl  $-1$  aus ihrem Wertebereich nie annehmen, das heißt es gibt keine reelle Zahl  $x$ , so dass  $f_2(x) = -1$ .



Eine Funktion  $f : D \rightarrow W$  heißt *surjektiv*, wenn für jedes  $w \in W$  ein  $d \in D$  existiert, so dass  $f(d) = w$ .



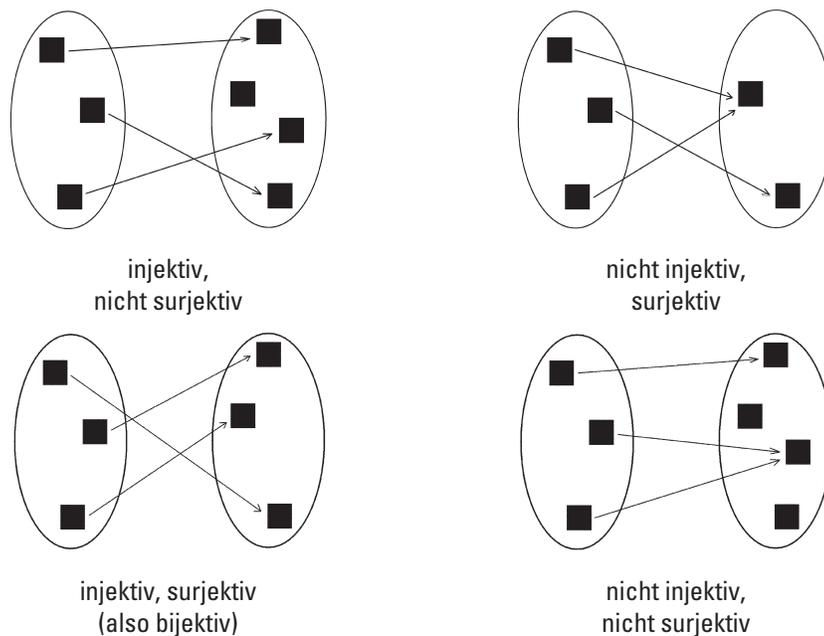
## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 35

Funktionen, die beide Eigenschaften erfüllen, heißen bijektiv. So ist die obige Funktion  $h$  bijektiv, wie Sie sich anhand des Graphen  $(p_3(x))$  in Abbildung 1.5 überlegen können.



Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Folgende vier Schemata in Abbildung 1.1 fassen diese wichtigen Eigenschaften einer Funktion zusammen.



**Abbildung 1.1:** Injektivität vs. Surjektivität – Schematische Darstellung der vier Fälle

## Graphische Darstellung von Funktionen

Funktionen graphisch darzustellen, ist sehr hilfreich, um sich ein Bild von ihnen zu machen. Sie können besser Zusammenhänge erkennen, wenn Sie sich etwas vorstellen können. Eine Funktion graphisch darzustellen, ist in der Regel sehr einfach.

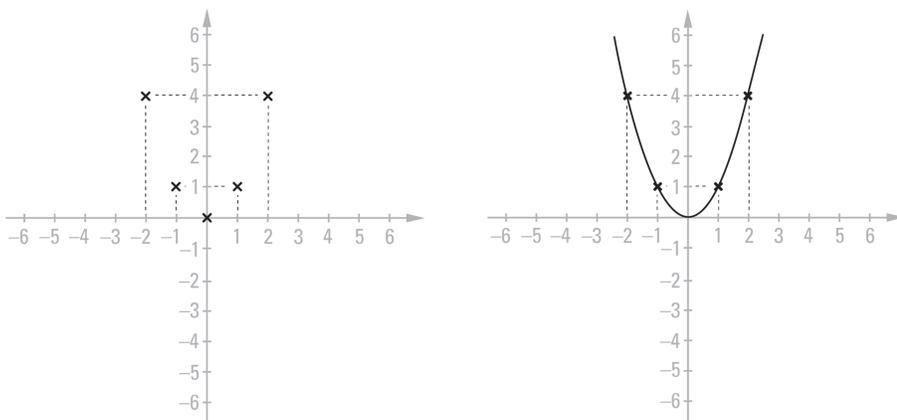
**Ein Beispiel:** Betrachten Sie die bereits im vorangegangenen Abschnitt angesprochene Funktion  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = x^2$ . Diese wird auch als *Normalparabel* bezeichnet.

1. Sie zeichnen zunächst ein so genanntes *Koordinatensystem*, indem Sie waagrecht die  $x$ - Achse einzeichnen und senkrecht dazu die  $y$ - Achse.
2. Am Schnittpunkt beider Achsen befindet sich der Koordinatenursprung, der Nullpunkt.

Schauen Sie schon einmal auf Abbildung 1.2a, dort können Sie die Gestalt der Normalparabel erkennen.



## 36 TEIL I Eindimensionale Analysis



**Abbildung 1.2:** Die Entwicklung des Graphen der Normalparabel

In Abbildung 1.2a erkennen Sie aber bereits mehr, nämlich einzeln eingetragene Punkte: die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 4)$ , aber auch  $(-1, 1)$  und  $(-2, 4)$ . Diese Punkte haben alle die Form  $(x, f_2(x))$ , also  $(x, x^2)$ . Erkennen Sie es?

- Verbinden Sie alle diese Punkte und Sie erhalten eine Kurve wie in Abbildung 1.2b. Dies ist der Graph der Funktion  $f_2$ .



Der *Graph* einer Funktion  $f : X \rightarrow Y$  ist die Menge aller Punkte  $(x, f(x))$  für  $x \in X$ , eingetragen (und verbunden) in einem  $x$ - $y$ -Koordinatensystem.

Sie werden im folgenden Abschnitt immer wieder die Graphen wichtiger Funktionen kennenlernen.

## Polynome einfach verstehen

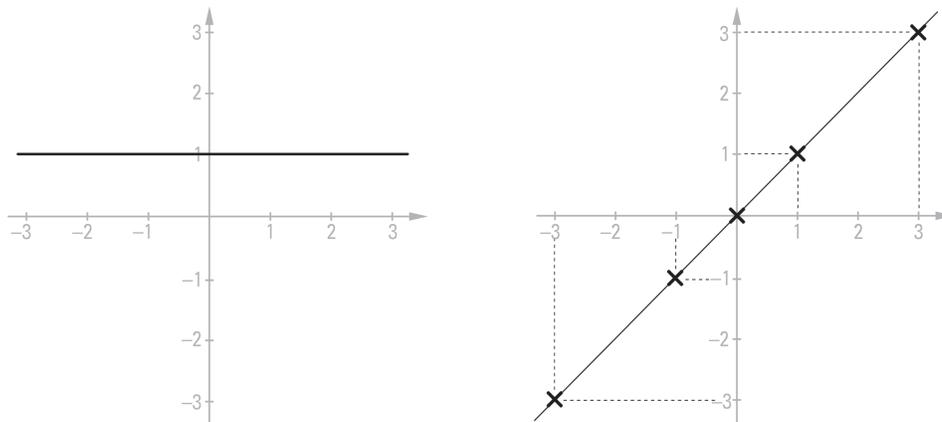
Nachdem Sie nun wissen, was Funktionen sind, betrachten wir einige Beispiele, auf die Sie in Ihren praktischen Anwendungen immer wieder stoßen werden. Je nach Schwierigkeitsgrad müssen Sie diese mal mehr, mal weniger besprechen. Wir starten mit den einfachen Polynomen.

Das sind die wohl einfachsten und dennoch wichtigsten Funktionen. Für die Polynome in den kommenden Beispielen werden wir als Definitions- und Wertebereich die reellen Zahlen betrachten. Stellen Sie sich zunächst die *konstante Funktion* vor, die immer auf die 1 abbildet. Alle reellen Zahlen werden auf die 1 abgebildet – langweilig, mögen Sie finden, aber damit haben Sie Ihr erstes Polynom:  $p_1(x) = 1$ . Abbildung 1.3a zeigt Ihnen den Graphen: eine Gerade, parallel zur  $x$ -Achse, die die  $y$ -Achse im Punkt  $y = 1$  schneidet.





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 37

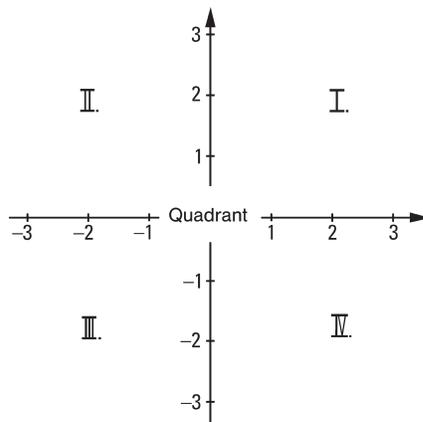


**Abbildung 1.3:** Zwei (sehr) einfache Polynome

Schauen Sie sich jetzt die Funktion  $p_2(x) = x$  in Abbildung 1.3b an. Diese ist nicht komplizierter: Jede reelle Zahl wird auf sich selbst abgebildet. In Abbildung 1.3b sehen Sie den dazugehörigen Graphen. Dieser ist eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung  $0, 0$  geht und eine *Winkelhalbierende* im ersten und dritten Quadranten darstellt. (Dabei wird der 90-Grad-Winkel zwischen den beiden Koordinatenachsen halbiert).



Ein  $x$ - $y$ -Koordinatensystem wird in vier Teile eingeteilt, die so genannten *Quadranten*. Bezeichnet werden diese – beginnend oben rechts – mit dem ersten Quadranten, entgegen dem Uhrzeigersinn bis zum vierten Quadranten (siehe Abbildung 1.4).



**Abbildung 1.4:** Die vier Quadranten eines Koordinatensystems

Die Normalparabel  $f_2(x) = x^2$  stellt ebenfalls ein Polynom dar. Dieses haben Sie in Abbildung 1.2b bereits kennen gelernt. Allgemein kann man sagen, dass Polynome zusammengesetzte Potenzen von  $x$  sind, die jeweils noch mit einem Faktor skaliert werden können.





## 38 TEIL I Eindimensionale Analysis



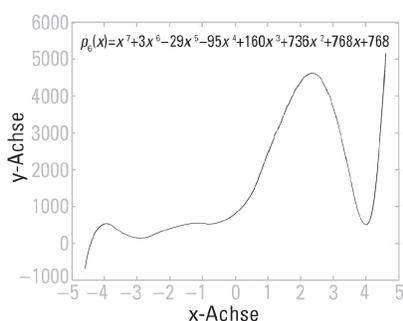
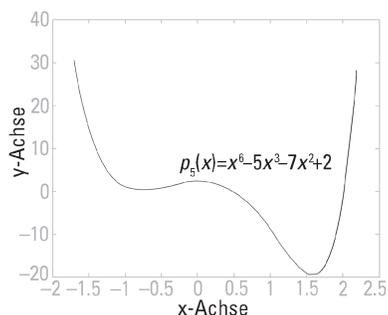
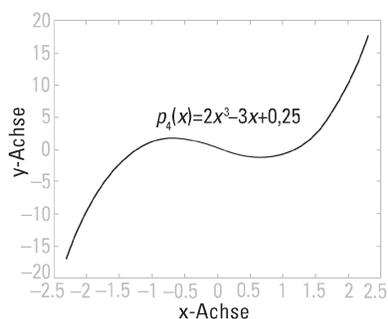
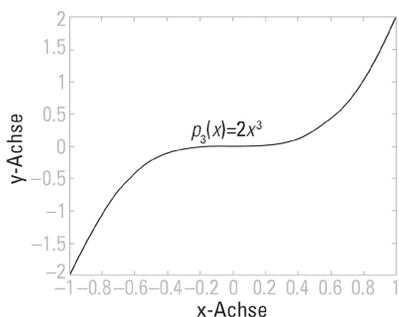
Ein reelles Polynom  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion, bei der es reelle Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n$  gibt mit:  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ .

**Einige Beispiele:** Folgende Funktionen sind ebenfalls Polynome:

$$p_3(x) = 2x^3, p_4(x) = 2x^3 - 3x + \frac{1}{4} \text{ und } p_5(x) = x^6 - 5x^3 - 7x^2 + 2, \text{ aber auch}$$

$$p_6(x) = x^7 + 3x^6 - 29x^5 - 95x^4 + 160x^3 + 736x^2 + 768x + 768$$

Die jeweiligen Graphen der vier Polynome sehen Sie in Abbildung 1.5.

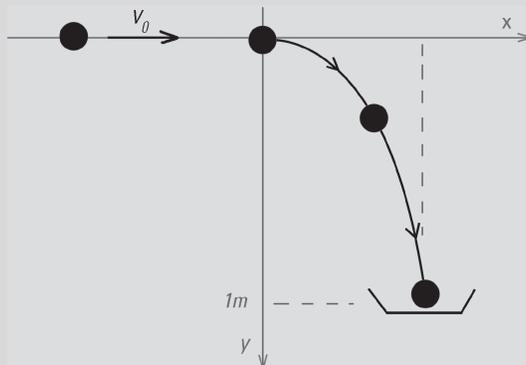


**Abbildung 1.5:** Vier Beispiele für Polynome

### Rollende Kugeln im Produktionsprozess

Im Verlaufe eines Produktionsabschnitts rollt eine Eisenkugel in einer Bahn von einem Tisch in einen Behälter, der auf dem Boden steht. Die Tischplatte hat eine Höhe von einem Meter. Die Kugel hat eine Anfangsgeschwindigkeit von zwei Metern pro Sekunde. In welchem Abstand vom Tisch ist mit dem Aufschlag der Kugel zu rechnen, damit dort ein Auffangbehälter stehen kann?

## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 39



Keine ganz einfache Aufgabenstellung, in die ein wenig Physik hineinspielt. Sie stellen sich die Ereignisse in Abhängigkeit der Zeit  $t$  (in Sekunden) vor: Ihre  $x$ -Koordinate gibt den horizontalen Verlauf an. Diese Bewegung hängt von der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = 2$  Meter pro Sekunde ab, also gilt  $x = v_0 \cdot t$ . Die  $y$ -Koordinate hängt von der Fallbeschleunigung  $g = 9,81$  Meter je Sekundenquadrat ab; der so genannte *freie Fall* kann dabei als die folgende Parabel (also ein quadratisches Polynom) dargestellt werden:  $y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ . Damit haben Sie alle Grundlagen zusammen. Stellen Sie die erste Gleichung nach  $t$  um und Sie erhalten  $t = \frac{x}{v_0}$ . Dies können Sie in die zweite Gleichung einsetzen und schon haben Sie das  $t$  dort eliminiert. Sie erhalten also:  $y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$ , und somit ebenfalls ein quadratisches Polynom in  $x$ . Da das gesuchte  $x$ , der Aufprall auf den Boden, positiv ist, stellen Sie die Gleichung wie folgt um und setzen schließlich alle bekannten Größen ein:

$$x = \sqrt{\frac{2 \cdot v_0^2}{g} \cdot y} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(2 \frac{m}{s}\right)^2}{9,81 \frac{m}{s^2}} \cdot 1m} \approx 0,90m$$

Somit sollte der Auffangbehälter in einer Entfernung von 90 Zentimetern stehen.

## Bruchrechnung: Rationale Funktionen

Betrachten Sie nun Brüche von Polynomen.



Rationale Funktionen sind Funktionen  $g(x)$  der Form  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , wobei  $p(x)$  und  $q(x)$  Polynome über den reellen Zahlen sind. Das Nennerpolynom  $q(x)$  darf natürlich an keiner Stelle  $x$  null werden, da eine Division durch null nicht erlaubt ist.

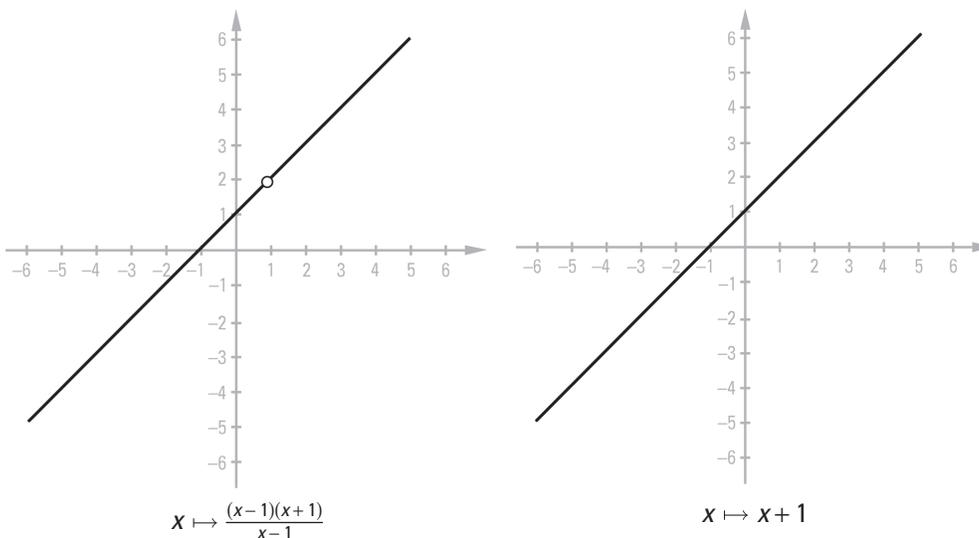
**Ein Beispiel:** Die Funktion  $g_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  ist eine rationale Funktion. Offensichtlich liegt die Zahl 1 nicht im Definitionsbereich dieser Funktion, denn für  $x = 1$  ist dieser Quotient nicht definiert, also können Sie sie bestenfalls als Funktion  $g_1 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten.

Erkennen Sie, dass der Zähler des in  $g_1$  definierten Terms eine binomische Formel ist? Es gilt nämlich:  $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ , so dass Sie versucht sind, den Term  $x-1$  im Zähler



## 40 TEIL I Eindimensionale Analysis

und Nenner zu kürzen, denn es gilt:  $\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ . Aber es gibt einen sehr wichtigen Unterschied zwischen der Funktion  $g_1$  und  $x \mapsto x + 1$ . Die erste ist im Gegensatz zur zweiten Funktion nicht in  $x = 1$  definiert! Seien Sie also vorsichtig mit dem Kürzen in solchen Funktionstermen. Zum besseren Verständnis noch einmal den entscheidenden Unterschied im Graphen der beiden Funktionen in Abbildung 1.6.

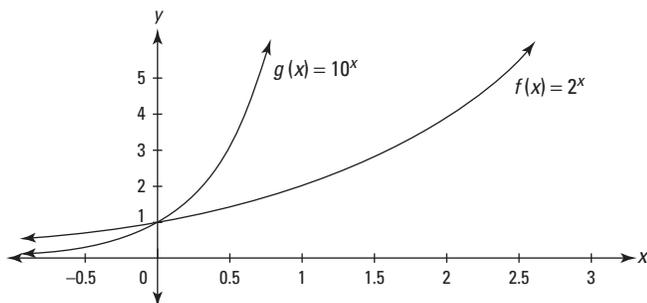


**Abbildung 1.6:** Zwei Funktionen im Vergleich

Rationale Funktionen werden Sie unter anderem im Abschnitt *Integration mit dem A-B-C der Partialbrüche* des Kapitels 4 beschäftigen, da sie sehr häufig in Anwendungsbeispielen zu finden sind.

## Rasch Wachsende Exponentialfunktionen

Eine Exponentialfunktion hat eine Potenz, die eine Variable enthält, beispielsweise  $f(x) = 2^x$  oder  $g(x) = 10^x$ . Abbildung 1.7 zeigt die Graphen dieser beiden Funktionen in einem einzigen  $x$ - $y$ -Koordinatensystem.



**Abbildung 1.7:** Die Graphen von  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = 10^x$





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 41

Beide Funktionen laufen durch den Punkt  $(0,1)$ , so wie alle Exponentialfunktionen der Form  $f(x) = a^x$  für  $a > 0$ . Wenn  $a > 1$ , liegt ein *exponentielles Wachstum* vor. Alle diese Funktionen wachsen nach rechts hin relativ schnell; und wenn sie links gegen  $-\infty$  gehen, dann schmiegen sie sich an die  $x$ - Achse an und kommen ihr immer näher, ohne sie jedoch ganz zu berühren. Mathematiker nennen dieses Verhalten *asymptotisch*. Mit diesen und ähnlichen Funktionen stellen Sie beispielsweise Investitionen, Inflation oder ein Populationswachstum dar.

Liegt  $a$  zwischen 0 und 1, haben Sie eine Funktion mit *exponentieller Abnahme*. Die Graphen solcher Funktionen stellen das Gegenteil von exponentiellen Wachstumsfunktionen dar. Funktionen für eine exponentielle Abnahme schneiden die  $y$ - Achse ebenfalls im Punkt  $(0,1)$ , aber sie steigen endlos nach links und nähern sich der  $x$ - Achse *rechts* an. Diese Funktionen stellen Zusammenhänge dar, die mit der Zeit kleiner werden, beispielsweise den Zerfall von Uran.

Meistens wird die Exponentialfunktion für  $a = e \approx 2,718281828459 \dots$  betrachtet. Hierbei bezeichnet man mit  $e$  die so genannte Eulersche Zahl.



Eigenschaften der Exponentialfunktion  $e^x$  – es gelten folgende Formeln:

- ✓  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$  und  $e^0 = 1$  sowie  $e^x > 0$
- ✓  $e^x \geq 1 + x$  für alle  $x$ , wobei die Gleichheit nur für  $x = 0$  gilt
- ✓ Aus  $x < y$  folgt  $e^x < e^y$  (Monotonie)
- ✓ Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Potenz von  $x$  (insbesondere auch als jedes Polynom) ab einer geeigneten Stelle auf der  $x$ - Achse

### Stirlingsche Formel: Die Fakultätsfunktion einholen

Die Fakultätsfunktion, die einer natürlichen Zahl  $n$  den Wert  $n!$  zuordnet, ist (rekursiv) über den natürlichen Zahlen definiert – es gilt:  $0! = 1$  und  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ . Damit ist also  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ . Diese Funktion wächst sehr schnell – probieren Sie es aus. Schon  $10!$  ist gleich 3.628.800. Aber dank der Stirlingschen Formel können wir diese *ungefähr* elementar einholen: Demnach wächst  $n!$  ungefähr so schnell wie  $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ . Diese Darstellung kann Ihnen nützliche Dienste erweisen, wenn Sie die Fakultätsfunktion gleichwertig abschätzen möchten.

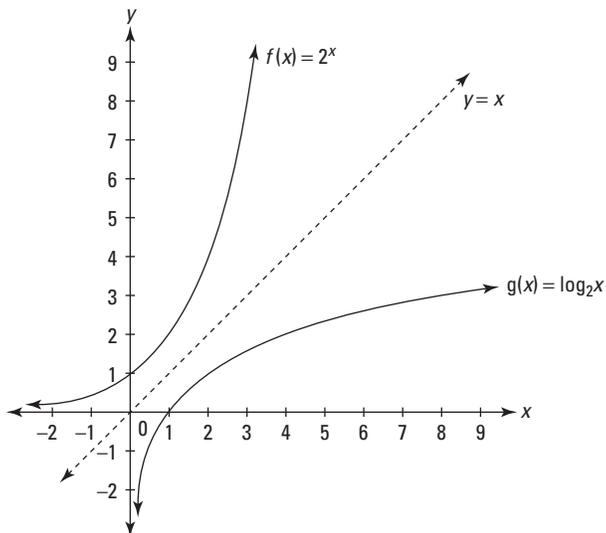
## Umgekehrt betrachtet: Logarithmusfunktionen

Eine logarithmische Funktion können Sie sich als Exponentialfunktion mit vertauschten  $x$ - und  $y$ - Achsen vorstellen. Sie sehen diese Beziehung in Abbildung 1.8 verdeutlicht, wo  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = \log_2(x)$  in einem Koordinatensystem dargestellt sind.





## 42 TEIL I Eindimensionale Analysis



**Abbildung 1.8:** Die Graphen für  $f(x) = 2^x$  und  $g(x) = \log_2(x)$

**Ein Beispiel:** Es gilt  $2^3 = 8$  und daher  $\log_2 8 = 3$ .

Sowohl Exponentialfunktionen als auch logarithmische Funktionen sind *monoton*.



Eine *monotone Funktion*, wenn man sie von links nach rechts betrachtet, steigt entweder innerhalb ihres gesamten Definitionsbereichs (monoton *steigende* Funktion), oder sie fällt innerhalb ihres gesamten Definitionsbereichs (monoton *fallende* Funktion).

Der für die Anwendungen wichtigste Logarithmus ist der zur Basis  $e$ . In diesem Fall schreiben Sie kurz  $\ln x$  statt  $\log_e x$ .



Eigenschaften der Logarithmusfunktion  $\ln x$  – es gelten:

- ✓  $e^{\ln x} = x$  für alle  $x > 0$  und  $\ln e^x = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$
- ✓  $\ln 1 = 0$  und  $\ln e = 1$
- ✓  $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$  und  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$  für alle  $a, b > 0$
- ✓  $\ln(x^n) = n \cdot \ln x$  für  $x > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$
- ✓  $\ln(1 + x) < x$  für alle  $x > -1$  mit  $x \neq 0$
- ✓ Der Logarithmus wächst jeweils ab einer bestimmten Stelle auf der  $x$ - Achse langsamer als jede lineare Funktion  $f(x) = c \cdot x$  für  $c > 0$  (sogar wenn Sie  $c$  beliebig klein wählen!)





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 43

Beachten Sie die Symmetrie der beiden Funktionen in Abbildung 1.8 zur Geraden  $y = x$ , der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Dies macht sie zu zueinander inversen Funktionen, womit Sie zum nächsten Thema kommen.

### Von Umkehr- und Inversen Funktionen

Die Funktion  $f(x) = x^2$  (für  $x \geq 0$ ) und die Funktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  (für  $x \geq 0$ , sprich » $f$  hoch minus 1 von  $x$ «) sind zueinander *inverse* Funktionen, weil die eine jeweils rückgängig macht, was die andere bewirkt. Mit anderen Worten,  $f(x) = x^2$  nimmt die Eingabe 3 entgegen und erzeugt die Ausgabe 9;  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  nimmt die 9 entgegen und macht wieder die 3 daraus. Beachten Sie, dass  $f(3) = 9$  und  $f^{-1}(9) = 3$  ist. Sie können das Ganze in einem einzigen Schritt als  $f^{-1}(f(3)) = 3$  schreiben. Es funktioniert auch, wenn Sie mit  $f^{-1}$  beginnen:  $f(f^{-1}(16)) = 16$ .



Man bezeichnet eine Funktion  $g(x)$  als *inverse Funktion* oder *Umkehrfunktion* einer Funktion  $f(x)$ , wenn für alle  $x$  gilt:  $g(f(x)) = x$  und  $f(g(x)) = x$ . In diesem Fall bezeichnet man  $g(x)$  auch als  $f^{-1}(x)$ . (Definitions- und Wertebereiche vernachlässige ich hier).

Achtung! Das Vernachlässigen des Definitions- und Wertebereichs ist grundsätzlich gefährlich. Denken Sie an die Funktion  $f(x) = x^2$ , die auf *allen* reellen Zahlen definiert ist und in dieselben abbildet. Sie schreiben kurz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die oben angegebene Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  ist allerdings nicht auf allen reellen Zahlen gegeben, sondern nur auf den *nicht negativen* reellen Zahlen (Kurzschreibweise:  $\mathbb{R}_0^+$ ), so dass  $f(x) = x^2$  nur eine Umkehrfunktion für die nicht negativen reellen Zahlen besitzt, das heißt aufgefasst als Abbildung  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ .

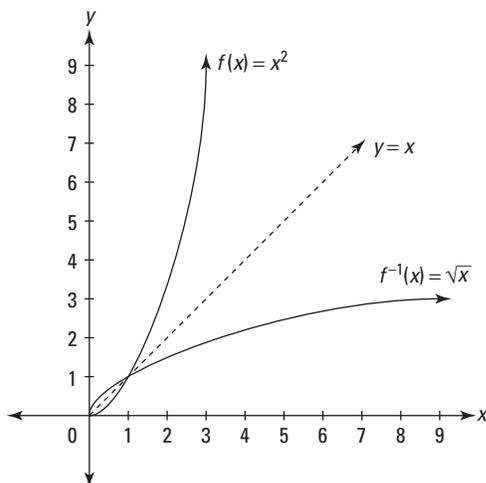


Verwechseln Sie  $f^{-1}(x)$  nicht mit  $f(x^{-1})$  oder gar  $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ . Dies sind im Allgemeinen völlig verschiedene Dinge; nur die Schreibweise ist ähnlich! Beachten Sie weiterhin, dass die *positiven* reellen Zahlen alle größer null sind, somit sind die *negativen* Zahlen alle kleiner null. Wenn ich also von den *nicht negativen* reellen Zahlen spreche, dann meine ich offenbar alle Zahlen, die größer gleich null sind. In der Mathematik muss man sich wirklich gut konzentrieren, um mit viel Liebe zum Detail zu argumentieren. Nur so ist garantiert, dass Sie keine Fehler machen.

Wenn Sie zwei zueinander inverse Funktionen graphisch darstellen, ist jede der Funktionen das Spiegelbild der anderen, und zwar gespiegelt an der Geraden  $y = x$ . Betrachten Sie Abbildung 1.9, in der die zueinander inversen Funktionen  $f(x) = x^2$  (für  $x \geq 0$ ) und  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  dargestellt sind.



## 44 TEIL I Eindimensionale Analysis

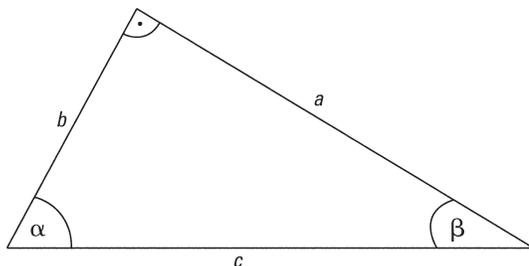


**Abbildung 1.9:** Die Graphen von  $f(x) = x^2$  (für  $x \geq 0$ ) und  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Wenn Sie den Graphen aus Abbildung 1.9 gegen den Uhrzeigersinn drehen, damit die Gerade  $y = x$  vertikal verläuft, erkennen Sie, dass  $f(x) = x^2$  und  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  Spiegelbilder voneinander sind. Eine Folge dieser Symmetrie ist, dass, wenn ein Punkt wie  $(2,4)$  auf einer der Funktionen liegt, der Punkt  $(4,2)$  auf der anderen Funktion liegt. Der Definitionsbereich von  $f(x)$  ist der Wertebereich von  $f^{-1}(x)$ , und der Wertebereich von  $f(x)$  ist der Definitionsbereich von  $f^{-1}(x)$ .

## Trigonometrische Funktionen

Jeder kennt sie, aber kaum einer mag mit ihnen rechnen: Sinus, Kosinus und Tangens. Schauen Sie sich aber zunächst den Zusammenhang dieser Funktionen zum rechtwinkligen Dreieck in Abbildung 1.10 an.



**Abbildung 1.10:** Das rechtwinklige Dreieck in Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen



## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 45

Man definiert den so genannten *Sinus*, *Kosinus* und *Tangens* eines Winkels als die folgenden Quotienten:

$$\checkmark \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\checkmark \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\checkmark \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}.$$



Am rechtwinkligen Dreieck wie in Abbildung 1.10 bezeichnet man die längste Seite  $c$  als *Hypotenuse* und die beiden anderen als *Katheten*. Für den Winkel  $\alpha$  ist die Seite  $a$  die *Gegenkathete* und  $b$  die *Ankathete*. Für den Winkel  $\beta$  ist die Seite  $b$  die *Gegenkathete* und  $a$  die *Ankathete*.

Manchmal benötigen Sie auch die entsprechenden Kehrwertfunktionen:

$$\checkmark \text{Kosekans} : \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\checkmark \text{Sekans} : \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\checkmark \text{Kotangens} : \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

## Trigonometrische Funktionen zeichnen

Abbildung 1.11 zeigt die Graphen von Sinus, Kosinus und Tangens, die Sie auch auf einem graphischen Taschenrechner oder einem Computer erzeugen können.



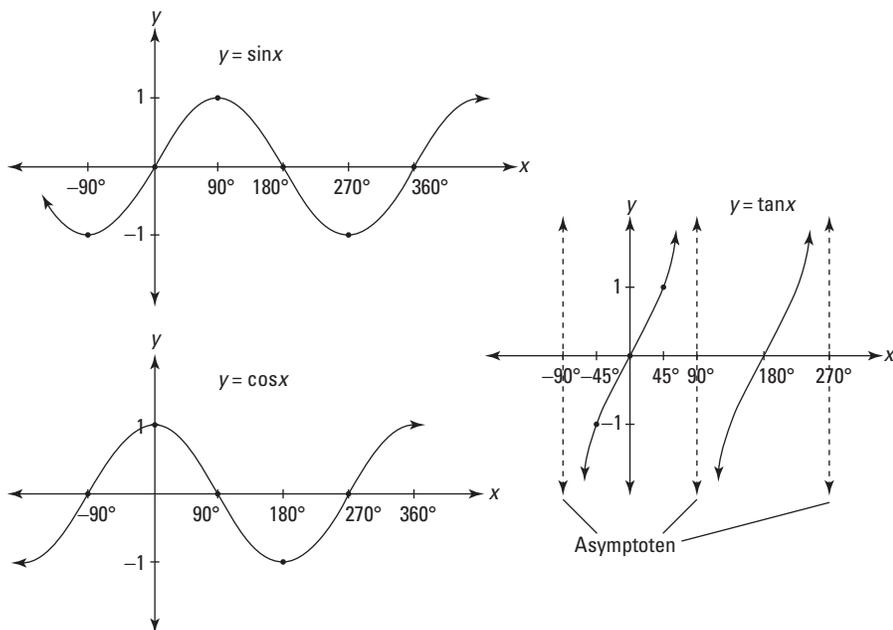
Sinus, Kosinus und Tangens – und ihre reziproken Versionen Kosekans, Sekans und Kotangens – sind *periodische Funktionen*, das heißt, ihre Graphen haben eine grundlegende Form, die sich immer wieder unendlich oft nach links und rechts wiederholt. Die *Periode* einer solchen Funktion ist die Länge eines ihrer Zyklen.

Beachten Sie, dass die Graphen für Sinus und Kosinus dieselbe Form haben: Der Kosinus sieht fast wie der Sinus aus, ist nur um 90 Grad (also  $\frac{\pi}{2}$ ) nach links verschoben. Beachten Sie außerdem, dass die einfache Wellenform der Graphen vertikal höchstens bis  $-1$  und  $1$  geht und dass sie endlos nach links und rechts verläuft und sich dabei alle 360 Grad wiederholt. Das ist die *Periode* der beiden Funktionen, also 360 Grad beziehungsweise  $2\pi$ . Beachten Sie weiterhin in Abbildung 1.11, dass die Periode der Tangensfunktion gleich 180 Grad (also  $\pi$ ) ist. Wenn Sie sich das merken, ebenso wie das grundlegende Muster der sich wiederholenden umgekehrten S-Formen, ist es nicht schwierig, eine Skizze anzufertigen. Weil sowohl  $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$  als auch  $\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right)$  undefiniert sind, zeichnen Sie vertikale *Asymptoten* an den Stellen  $\frac{\pi}{2}$  und  $-\frac{\pi}{2}$  ein.





## 46 TEIL I Eindimensionale Analysis



**Abbildung 1.11:** Die Graphen der Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens



Eine *Asymptote* ist eine gedachte Linie, der eine Funktion immer näherkommt, die sie aber nie berührt.

### Identifikation mit trigonometrischen Identitäten

Erinnern Sie sich an die trigonometrischen Identitäten, wie  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  oder  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ ? Geben Sie es einfach zu – die meisten Menschen erinnern sich an die trigonometrischen Identitäten so gut wie an alle Kurfürsten des Mittelalters. In der Analysis können sie jedoch sehr praktisch sein, deshalb finden Sie eine Liste der wichtigsten davon auf der Schummelseite ganz vorn in diesem Buch.

## Grenzwerte einer Funktion Verstehen

Grenzwerte von Funktionen können kompliziert sein. Machen Sie sich also keine Gedanken, wenn Sie das Konzept nicht sofort verstehen.



Der *Grenzwert*  $b$  einer Funktion (falls er denn existiert) an einem  $x$ -Wert  $a$  ist die Höhe der Funktion, der sich die Funktion immer weiter annähert, wenn  $x$  sich von links und rechts immer weiter der Stelle  $a$  annähert. Hierfür schreibt man kurz:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

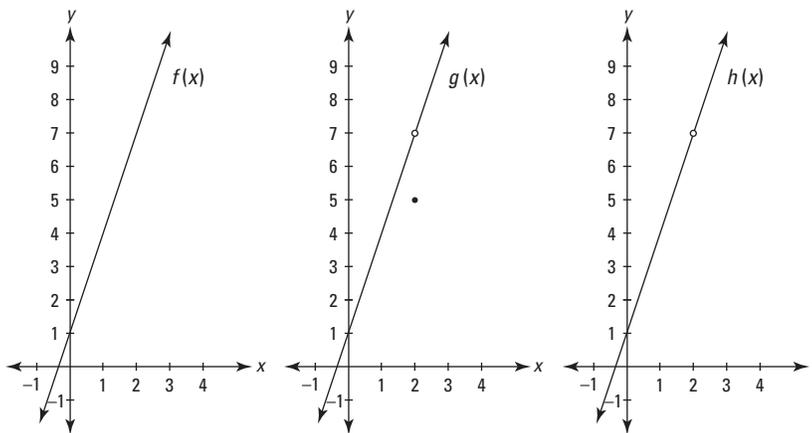


## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 47

Verstanden? – Ernsthaft? Am einfachsten versteht man das Konzept des Grenzwerts, indem man Beispiele betrachtet.

## Drei Funktionen erklären den Grenzwertbegriff

**Ein Beispiel:** Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = 3x + 1$  in Abbildung 1.12. Wenn Sie sagen, dass der Grenzwert von  $f(x)$ , wenn sich  $x$  dem Wert 2 annähert, gleich 7 ist, dargestellt als  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$ , meinen Sie damit, dass sich  $f(x)$ , wenn sich  $x$  von links oder rechts immer weiter an 2 annähert, immer mehr dem Wert 7 annähert. Sie werden jetzt vielleicht denken, das ist einfach, denn ich könnte einfach die 2 in meine Funktionsvorschrift einsetzen und erhalte  $f(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ . Das klappt auch, wenn die Funktion keine Löcher beziehungsweise Lücken hat.



**Abbildung 1.12:** Die Graphen von  $f(x)$ ,  $g(x)$  und  $h(x)$

Die Funktion  $g(x)$  in Abbildung 1.12 ist identisch mit der Funktion  $f(x)$ , außer dass sie an der Stelle  $x = 2$  einen anderen Funktionswert hat, nämlich  $g(2) = 5$ . Sie können es noch weiter treiben. Stellen Sie sich vor, dass der Funktionswert nicht wie erwartet 7 wäre, oder nein, es gar keinen gäbe – dann sind Sie auch schon bei der Funktion  $h(x)$ .

Für  $g(x)$  und  $h(x)$  nähert sich der Funktionswert immer weiter einer Höhe von 7 an, wenn  $x$  sich von links und rechts immer weiter an 2 annähert. Für alle drei Funktionen ist der Grenzwert, wenn sich  $x$  dem Wert 2 annähert, gleich 7; es gilt nämlich:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 7$$

Damit kommen wir zu einem kritischen Punkt: Wenn man den Grenzwert einer Funktion bestimmt, ist der Wert der Funktion in diesem Punkt – und sogar die Tatsache, ob dieser überhaupt existiert – völlig irrelevant. Erschreckend, oder?



## 48 TEIL I Eindimensionale Analysis

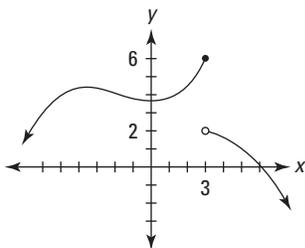
### Links- und rechtsseitige Grenzwerte



*Links- und rechtsseitige Grenzwerte* (»einseitige« Grenzwerte) verhalten sich wie normale (»beidseitige«) Grenzwerte, außer dass sich  $x$  dem  $x$ -Wert nur von links oder nur von rechts annähert.

Um einen einseitigen Grenzwert darzustellen, schreiben Sie ein Minuszeichen neben den  $x$ -Wert, wenn sich  $x$  dem  $x$ -Wert von links annähert, oder ein Pluszeichen, wenn sich  $x$  dem  $x$ -Wert von rechts annähert. Etwa so:  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$  oder  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

**Ein Beispiel:** Betrachten Sie Abbildung 1.13. Wenn Sie den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 3} p(x)$  angeben sollen, so ist dies nicht möglich, da der Grenzwert nicht existiert, weil sich  $p(x)$  zwei unterschiedlichen Werten annähert, je nachdem, ob sich  $x$  von links oder rechts der 3 annähert! Es existieren jedoch beide einseitigen Grenzwerte; es gilt  $\lim_{x \rightarrow 3^-} p(x) = 6$  und  $\lim_{x \rightarrow 3^+} p(x) = 2$ .



**Abbildung 1.13:** Die Funktion  $p(x)$  – eine Darstellung einseitiger Grenzwerte

Eine Funktion wie  $p(x)$  in Abbildung 1.13 wird als *stückweise Funktion* bezeichnet, weil sie in separaten Stücken vorliegt. Jeder Teil einer *stückweisen* Funktion hat eine eigene Gleichung – wie beispielsweise die folgende dreiteilige Funktion:

$$p(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 3x - 2 & \text{für } 1 < x \leq 10 \\ x + 5 & \text{für } x > 10 \end{cases}$$

Manchmal verbindet sich ein Abschnitt einer stückweisen Funktion mit seinem benachbarten Abschnitt, dann ist die Funktion dort stetig. Manchmal verbindet sich jedoch ein Stück nicht mit dem benachbarten Abschnitt, wie bei  $p(x)$  – dann entsteht eine *Unstetigkeitsstelle*. (Mehr über Stetigkeit lesen Sie im Abschnitt *Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen*).

### Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!

Nachdem Sie die einseitigen Grenzwerte kennen gelernt haben, kann ich Ihnen die formale mathematische Definition eines Grenzwerts vorstellen:



## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 49



**Definition des Grenzwerts:** Sei  $f$  eine Funktion und  $a$  eine reelle Zahl. Dann existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existieren

Es gilt:  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Nur um sicherzugehen, dass es richtig angekommen ist: Wenn Sie sagen, ein Grenzwert existiert, dann bedeutet das, dass der Grenzwert eine Zahl und somit endlich ist. Dennoch geben Sie in besonderen (schönen) Fällen der Nicht-Existenz des Grenzwerts an, wie er nicht existiert, nämlich, wenn die Werte gegen  $\infty$  oder  $-\infty$  streben. Mehr dazu gleich weiter unten im nächsten Abschnitt.

## Unendliche Grenzwerte und Vertikale Asymptoten

Die rationale Funktion  $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)}{(x-3)(x+1)}$  hat vertikale Asymptoten an den Stellen  $x = -1$  und  $x = 3$ . erinnern Sie sich an die Asymptoten?



Eine *Asymptote* ist eine gedachte Linie am Graphen einer Funktion, an die sich eine Funktion immer weiter annähert, wenn Sie sie nach oben, unten, links oder rechts unendlich lang weiterverfolgen.

Betrachten Sie den Grenzwert der Funktion in Abbildung 1.14 für  $x$  gegen 3. Wenn sich  $x$  dem Wert 3 von links annähert, geht  $f(x)$  nach oben gegen  $\infty$ , und wenn sich  $x$  dem

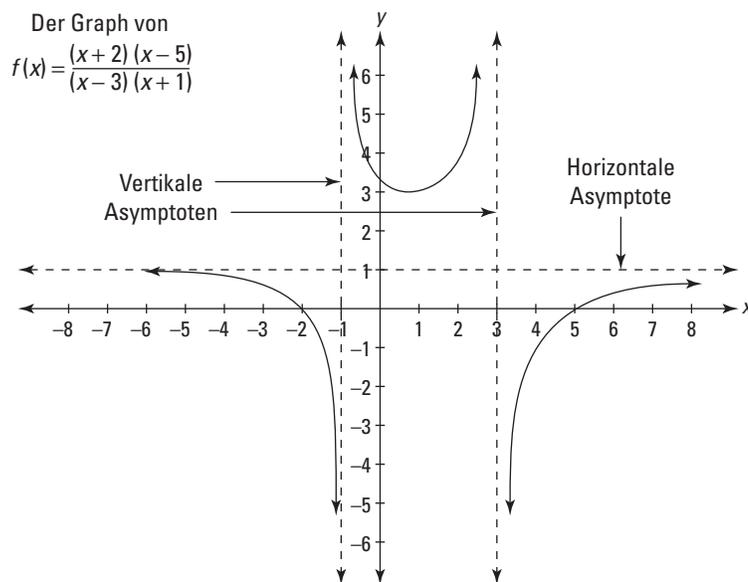


Abbildung 1.14: Eine typische rationale Funktion



## 50 TEIL I Eindimensionale Analysis

Wert 3 von rechts annähert, geht  $f(x)$  nach unten gegen  $-\infty$ . Dies wird folgendermaßen geschrieben:  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty$  beziehungsweise  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ . Lassen Sie sich nicht durch die Schreibweise beirren. Die Grenzwerte existieren nicht – dies ist nur eine Schreibweise.

### Grenzwerte für $x$ gegen unendlich

Bisher haben wir Grenzwerte betrachtet, bei denen sich  $x$  einer Zahl annähert. Aber  $x$  kann sich auch  $\infty$  oder  $-\infty$  annähern.



Grenzwerte bei  $\infty$  existieren, wenn eine Funktion eine horizontale Asymptote hat.

Beispielsweise hat die Funktion in Abbildung 1.14,  $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)}{(x-3)(x+1)}$ , eine horizontale Asymptote in  $y = 1$ , an der sich die Funktion entlangtastet, wenn sie von rechts gegen  $\infty$  und von links gegen  $-\infty$  geht. Die Grenzwerte sind gleich der Höhe der horizontalen Asymptote und werden geschrieben als  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ . Weitere Informationen über Grenzwerte bei  $\infty$  finden Sie am Ende dieses Kapitels.

## Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

Bevor ich weiter auf die wunderbare Welt der Grenzwerte eingehe, möchte ich ein verwandtes Konzept erwähnen – die *Stetigkeit* von Funktionen. Dies ist zwar allgemein betrachtet kein ganz einfaches Konzept, aber da Sie sich hier in relativ seichten Gewässern bewegen, kommen Sie ohne große Probleme da durch.



Eine *stetige* Funktion wird oft lax als *eine Funktion ohne Lücken und Sprünge* beschrieben, also als eine Funktion, die Sie zeichnen können, ohne Ihren Bleistift vom Papier abzuheben.

Das stimmt zumindest für unsere Betrachtungen – und das kann man sich doch leicht merken, oder? Betrachten Sie etwa die vier Funktionen in Abbildung 1.15.

Die beiden ersten Funktionen in Abbildung 1.15  $f(x)$  und  $g(x)$  haben keine Lücken oder Sprünge – sie sind stetig. Die beiden nächsten Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  haben Lücken beziehungsweise Sprünge an der Stelle  $x = 3$ , sie sind also nicht stetig. So weit nicht schwer, oder? Na gut, nicht ganz. Beachten Sie, dass Teile dieser Funktionen dennoch stetig sind. Und manchmal ist eine Funktion überall dort stetig, wo sie definiert ist.

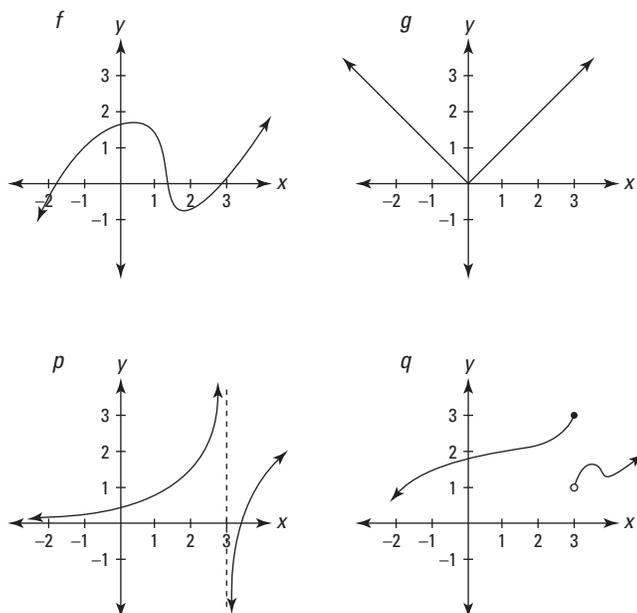


Eine solche Funktion wird als *stetig auf dem gesamten Definitionsbereich* bezeichnet, das heißt ihre Lücken oder Sprünge treten an  $x$ -Werten auf, wo die Funktion nicht definiert ist.





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 51



**Abbildung 1.15:** Die Graphen für  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $p(x)$  und  $q(x)$

Die Funktion  $p(x)$  ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich;  $q(x)$  dagegen ist nicht in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig, weil sie an der Stelle  $x = 3$  nicht stetig ist, die aber im Definitionsbereich der Funktion enthalten ist. Diese Lücken oder Sprünge bezeichnet man auch als *Unstetigkeitsstellen*.

**Zwei Beispielklassen:** Alle Polynome sind in jeder Stelle stetig. Alle rationalen Funktionen sind jeweils auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig (wie  $p(x)$  aus Abbildung 1.15).

**Noch ein Beispiel:** Betrachten Sie nun die vier Funktionen in Abbildung 1.15 in der Stelle  $x = 3$ . Überlegen Sie, ob jede Funktion dort stetig ist und ob es in diesem  $x$ -Wert einen Grenzwert gibt. Die beiden ersten Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  sind in der Stelle  $x = 3$  stetig, haben dort auch Grenzwerte und in beiden Fällen ist der Grenzwert gleich dem jeweiligen Funktionswert. Denn wenn  $x$  sich von links und rechts immer weiter an 3 annähert, nähern sich die Funktionswerte immer weiter an  $f(3)$  beziehungsweise  $g(3)$  an.

Die Funktionen  $p$  und  $q$  dagegen sind nicht stetig in der Stelle  $x = 3$ . Beide Funktionen haben in dieser Stelle auch keinen Grenzwert; sie pendeln sich *nicht* auf einem bestimmten Funktionswert ein.

**Es gibt noch einen Fall:** Betrachten Sie jetzt die beiden Funktionen in Abbildung 1.16.





## 52 TEIL I Eindimensionale Analysis

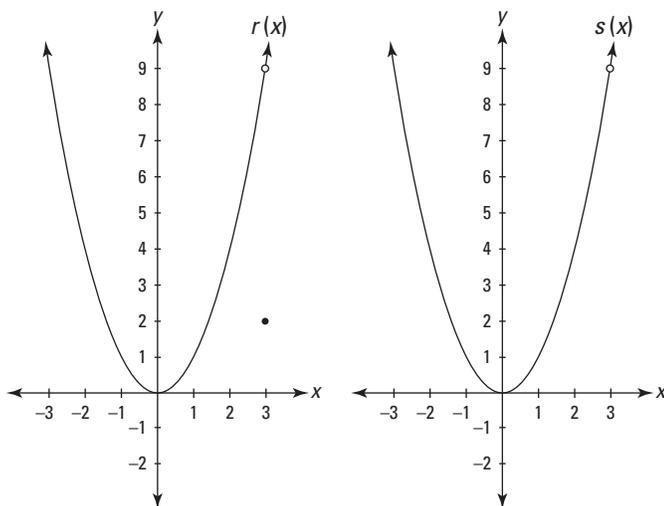


Abbildung 1.16: Die Graphen von  $r(x)$  und  $s(x)$

Diese Funktionen haben Lücken an der Stelle  $x = 3$  und offensichtlich sind sie dort nicht stetig, aber sie *haben* Grenzwerte, wenn sich  $x$  dem Wert 3 annähert. In beiden Fällen ist der Grenzwert gleich der Höhe (dem  $y$ -Wert) der Lücke; in beiden Fällen 9.



**Definition der Stetigkeit:** Eine Funktion  $f(x)$  ist *stetig* an der Stelle  $x = a$ , wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $f(a)$  ist **definiert** und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  **existiert** sowie
2.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Das Rechnen mit stetigen Funktionen ist ganz leicht:



*Summe, Differenz, Produkt* und *Quotient* stetiger Funktionen sind wiederum stetig, das heißt sind  $f$  und  $g$  stetige Funktionen, so auch  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$ . (Beachten Sie beim Quotienten, dass der Nenner an keiner Stelle null sein darf, damit  $\frac{f}{g}$  überhaupt definiert ist).

Beachten Sie, dass diese Verknüpfungen *punktweise* definiert sind, das heißt es gilt, dass  $f + g$  an der Stelle  $x$  definiert ist als  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ .



Das *Einsetzen* von stetigen Funktionen in stetige Funktionen ergibt wieder eine stetige Funktion, das heißt wenn  $f(x)$  und  $g(x)$  stetig sind, so ist auch  $f(g(x))$  stetig, sofern die Einsetzung überhaupt definiert ist.





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 53

Sie haben es fast geschafft, aber ich zeige Ihnen noch drei Möglichkeiten von *Unstetigkeitsstellen*:

- ✓ Eine *hebbare Unstetigkeitsstelle* wie die Lücken der Funktionen  $r$  und  $s$  in Abbildung 1.16
- ✓ Eine *unendliche Unstetigkeit* wie bei  $x = 3$  für die Funktion  $p$  in Abbildung 1.15
- ✓ Eine *Sprungstelle*, wie bei  $x = 3$  für die Funktion  $q$  in Abbildung 1.15

Ich beende jetzt den kleinen Ausflug in die Welt der stetigen Funktionen und komme zurück zu den Grundkonzepten der Grenzwerte.

## Einfache Grenzwerte auswerten

Einige Grenzwertprobleme sind *sehr* einfach, man muss nicht lange darüber sprechen und dennoch sollten Sie diese unbedingt kennen. Wenn Sie sich die letzten drei nicht merken, könnten Sie *sehr* viel Zeit damit vergeuden, diese herauszufinden.

$$\begin{array}{cccccc} \lim_{x \rightarrow a} c = c & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 \end{array}$$



## Einfachste Methode: Einsetzen und Auswerten

Aufgabenstellungen, bei denen Sie einsetzen und dann weiterrechnen, gehören zur zweiten Kategorie einfacher Grenzwerte. Sie setzen einfach den  $x$ -Wert in die Grenzwertfunktion ein und wenn die Berechnung durchführbar ist (also ein Ergebnis herauskommt), haben Sie die Lösung. Betrachten Sie folgendes Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 10) = -1$$

Diese Methode funktioniert sehr gut für Grenzwerte von stetigen Funktionen. Dies sind wunderbare Aufgabenstellungen für Grenzwerte. Aber wenn ich ganz ehrlich bin, sind sie nicht besonders aufregend. Der Grenzwert ist der Funktionswert.



Wenn Sie den  $x$ -Wert in einen Grenzwert wie  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{10}{x-5}$  einsetzen und eine beliebige Zahl (ungleich 0) erhalten, die durch 0 dividiert wird, etwa  $\frac{10}{5-5} = \frac{10}{0}$ , wissen Sie, dass der Grenzwert *nicht* existiert.





## 54 TEIL I Eindimensionale Analysis

# Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten

Für »echte« Grenzwertprobleme verwenden Sie am besten eine der folgenden vier grundlegenden Methoden, die Sie sicher zum Ziel führen werden:

## Methode 1: Faktorisieren

**Ein Beispiel:** Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5}$  schrittweise.

1. **Versuchen Sie, die Zahl 5 für  $x$  einzusetzen.**

Sie sollten *immer* zuerst die Substitution, also das Einsetzen, probieren. Sie erhalten eine Division durch 0 – nicht gut, also weiter mit Plan B.

2. **Der Zähler  $x^2 - 25$  kann faktorisiert werden; es gilt nämlich  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$ .**

3. **Kürzen Sie nun  $(x - 5)$  aus dem Nenner und Zähler.**

4. **Sie rechnen weiter:  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 5+5 = 10$ .**

Also gilt  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x-5} = 10$ . War gar nicht schwer, oder?

Übrigens ist die Funktion, die Sie nach dem Kürzen von  $(x-5)$  erhalten haben, nämlich  $(x+5)$ , identisch mit der ursprünglichen Funktion  $\frac{x^2-25}{x-5}$ , außer, dass die Lücke in der ursprünglichen Funktion an der Stelle  $x = 5$  gefüllt wurde.

## Methode 2: Konjugierte Multiplikation

Probieren Sie diese Methode zum Beispiel für rationale Funktionen aus, die Quadratwurzeln enthalten. Die konjugierte Multiplikation *rationalisiert* den Zähler oder den Nenner eines Bruchs, das heißt man schafft sich die Quadratwurzel vom Leib.

**Ein Beispiel:** Berechnen Sie dazu  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ .

1. **Sie versuchen es zunächst mit Substitution.**

Setzen Sie 4 ein und Sie kommen nicht weiter – weiter mit Plan B:

2. **Multiplizieren Sie Zähler und Nenner mit dem Konjugierten von  $\sqrt{x} - 2$ , das ist dann  $\sqrt{x} + 2$ .**



Die Konjugierte von  $(a + b)$  ist  $(a - b)$ , so dass dabei im Produkt die dritte binomische Formel zum Greifen kommt; es gilt nämlich:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ .





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 55

Dies können Sie für das Beispiel anwenden, um schließlich den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$  zu berechnen:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

### 3. Nach dem Kürzen können Sie die Substitution wieder problemlos anwenden.

So erhalten Sie schließlich die Lösung:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$ .

## Methode 3: Einfache algebraische Umformungen

Wenn die Faktorisierung und die konjugierte Multiplikation nicht funktionieren, probieren Sie es mit anderer Algebra, wie dem Addieren und Subtrahieren von Brüchen, dem Multiplizieren oder Dividieren von Brüchen, dem Kürzen oder irgendeiner anderen Art der Vereinfachung, die Ihnen einfällt.

**Ein Beispiel:** Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x}$ . Probieren Sie es mit Substitution. Setzen Sie 0 ein.

Sie erhalten nichts Gutes. Vereinfachen Sie daher den Doppel-Bruch (das ist ein großer Bruch, der wiederum Brüche enthält), indem Sie zum Beispiel den Hauptnenner suchen.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{4}\right)}{x} \cdot \frac{4(x+4)}{4(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (x+4)}{4x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{4x(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{4 \cdot (x+4)} = \frac{-1}{4 \cdot (0+4)} = -\frac{1}{16}\end{aligned}$$

Am Ende der Berechnung hat die Substitution wieder funktioniert.



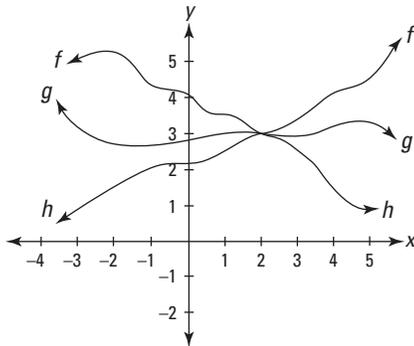
Eine ganz wichtige Regel werden Sie in Kapitel 2 noch kennen lernen: die *Regel von l'Hospital*. Diese sehr nützliche Regel dient der Lösung von Grenzwerten bei kritischen Quotienten, nur müssen Sie zunächst den Begriff der Ableitung einer Funktion verstehen, weshalb ich Sie leider noch auf das nächste Kapitel vertragen muss – aber seien Sie gespannt!



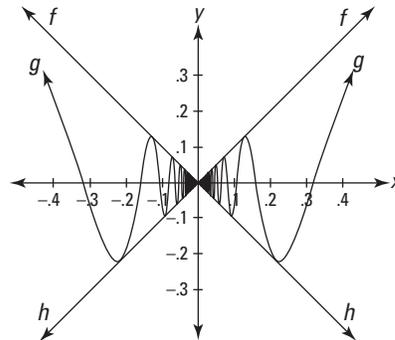
## 56 TEIL I Eindimensionale Analysis

## Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich

Eine weitere nützliche Methode ist das so genannte Grenzwert-Sandwich. Am besten verstehen Sie die Sandwich-Methode, indem Sie die Abbildungen 1.17a und 1.17b betrachten, die ich mit Ihnen in den folgenden Beispielen besprechen werde:



**Abbildung 1.17a:** Die Sandwich-Methode für die Bestimmung eines Grenzwerts der Funktion  $g$



**Abbildung 1.17b:** Der Graph von  $f(x) = |x|$ ,  $h(x) = -|x|$  und  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$

**Ein Beispiel:** Betrachten Sie die Funktionen  $f$ ,  $g$  und  $h$  in Abbildung 1.17a: Die Werte von  $g$  liegen immer zwischen den Werten von  $f$  und  $h$ , das heißt es gilt immer  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ . In dem Punkt 2, in dem  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x)$  gilt, muss die Funktion  $g$  dann den gleichen Grenzwert haben, wenn er existiert. Also gilt:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$ , weil  $g$  zwischen  $f$  und  $h$  eingeklemmt ist.

**Noch ein Beispiel:** Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$ .

- Probieren Sie es mit Substitution.** Setzen Sie 0 für  $x$  ein. Durch 0 kann man nicht dividieren. Weiter mit Plan B.
- Probieren Sie die algebraischen Methoden aus oder andere Rechenricks, die Sie auf Lager haben.** Auch das bringt Sie nicht weiter. Sie nutzen Plan C.
- Probieren Sie das Grenzwert-Sandwich.** Das Schwierige bei der Sandwich-Methode ist, die »Brot«-Funktionen zu finden, das heißt die begrenzenden Funktionen. Es gibt keinen Algorithmus dafür. In unserem Beispiel überlegen Sie wie folgt: Da der Wertebereich der Sinusfunktion von  $-1$  bis  $1$  geht, behält das Ergebnis, wenn Sie eine Zahl mit dem Sinus von irgendetwas multiplizieren, entweder denselben Abstand von 0 oder es rückt näher an 0 heran. Die Funktion  $x \cdot \sin \frac{1}{x}$  gelangt also nie über  $|x|$  oder unter  $-|x|$ . Versuchen Sie es daher mit den Funktionen  $f(x) = |x|$  und  $h(x) = -|x|$  und zeichnen Sie beide zusammen mit  $g(x)$  in ein Koordinatensystem ein, um zu prüfen, ob Sie richtig liegen. Betrachten Sie dazu Abbildung 1.17b. Somit gilt:  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$ .





## KAPITEL 1 Grundlagen der Analysis 57



Die *Sandwich-Methode*: Wenn  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \geq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ ; insbesondere gilt: Wenn  $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ , so gilt  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ .

### Eine lange und kurvige Straße bis zum Ziel

Betrachten Sie den Grenzwert  $g(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ , den ich in Abbildung 1.17b gezeigt und im Abschnitt über das Grenzwert-Sandwich beschrieben habe. Die Funktion ist an jeder Stelle definiert, außer bei 0. Wenn Sie sie jetzt leicht verändern, indem Sie  $f(0) := 0$  und  $f(x) := x \cdot \sin \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$  definieren, erzeugen Sie eine Funktion mit seltsamen Eigenschaften. Die Funktion ist jetzt überall stetig; mit anderen Worten: Sie hat keine Lücken oder Sprünge. Aber an der Stelle  $(0,0)$  scheint sie dem grundlegenden Konzept der Stetigkeit zu widersprechen, das besagt, dass Sie die Funktion verfolgen können, ohne Ihren Stift vom Papier abzuheben.

Stellen Sie sich vor, Sie starten irgendwo auf  $g(x)$  links auf der  $y$ -Achse und fahren die kurvige Straße in Richtung Ursprung. Sie können Ihre Fahrt so nah am Ursprung beginnen, wie Sie wollen, zum Beispiel ein Proton vom Ursprung entfernt, und die Länge der Straße zwischen Ihnen und dem Ursprung ist *unendlich* lang! Die Straße windet sich umso mehr nach oben und unten, je näher Sie an den Ursprung gelangen. Dadurch sehen Sie, dass die Länge Ihrer Fahrt tatsächlich unendlich ist.

Diese veränderte Funktion ist anscheinend in jedem Punkt stetig (mit der möglichen Ausnahme von  $(0,0)$ ), weil sie eine glatte, zusammenhängende und kurvige Straße ist und weil  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = 0$  (siehe den Abschnitt *Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich* in diesem Kapitel) und  $f(0) = 0$  definiert ist. Die Funktion ist also überall stetig.

Aber wie kann die Kurve je den Ursprung erreichen oder von links oder von rechts eine Verbindung zum Ursprung schaffen? Angenommen, Sie können eine unendliche Distanz überwinden, indem Sie unendlich schnell fahren. Wenn Sie schließlich durch den Ursprung fahren, befinden Sie sich dann auf einem Weg nach unten oder auf einem Weg nach oben? Nichts von beidem scheint möglich zu sein, denn egal wie nah Sie am Ursprung sind, Sie haben immer unendlich viele Wege und unendlich viele Kurven vor sich. Es gibt keine letzte Kurve, bevor Sie den Ursprung erreichen. Es scheint also so als ob die Funktion keine Verbindung zum Ursprung herstellen kann. Aber dank des GrenzwertSandwiches wissen Sie es besser.

## Grenzwerte bei unendlich auswerten

Sie könnten auch Grenzwerte haben, bei denen sich  $x$  plus oder minus unendlich annähert.

**Ein Beispiel:** Betrachten Sie dazu die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; den dazugehörigen Graphen sehen Sie in Abbildung 1.18.





## 58 TEIL I Eindimensionale Analysis

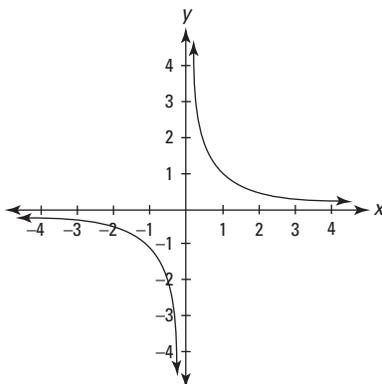


Abbildung 1.18: Der Graph von  $f(x) = \frac{1}{x}$

Sie sehen auf dem Graphen, dass, wenn  $x$  immer größer wird, das heißt, wenn  $x$  gegen  $\infty$  strebt, die Höhe der Funktion immer kleiner wird, aber nie 0 erreicht. Dieser Graph hat also eine horizontale Asymptote von  $y = 0$  (die  $x$ - Achse) und Sie sagen,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . Die Funktion  $f$  nähert sich auch dann 0 an, wenn  $x$  gegen  $-\infty$  geht ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ).

## Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten

Horizontale Asymptoten und Grenzwerte bei  $\infty$  gehen Hand in Hand. Wenn Sie eine rationale Funktion wie  $f(x) = \frac{3x-7}{2x+8}$  haben, ist die Bestimmung des Grenzwerts bei  $\infty$  oder  $-\infty$  dasselbe, als wenn Sie die Position der horizontalen Asymptote suchen. Und das geht wie folgt: Stellen Sie zuerst fest, welchen Grad der Zähler hat (das heißt die höchste Potenz von  $x$  im Zähler) und welchen Grad der Nenner hat. Es gibt drei Möglichkeiten:

- ✓ Wenn der Grad des Zählers größer als der Grad des Nenners ist, beispielsweise bei  $f(x) = \frac{6x^4+x^3-7}{2x^2+8}$ , gibt es keine horizontale Asymptote und der Grenzwert der Funktion für  $x$  gegen  $\infty$  (oder  $-\infty$ ) existiert nicht. Die Funktion strebt gegen  $\infty$  (oder  $-\infty$ ).
- ✓ Wenn der Grad des Nenners größer als der Grad des Zählers ist, beispielsweise bei  $g(x) = \frac{4x^2-9}{x^3+12}$ , ist die  $x$ - Achse die horizontale Asymptote und es gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ .
- ✓ Wenn Zähler und Nenner den gleichen Grad haben (wie bei unserem Ausgangsbeispiel), setzen Sie den Koeffizienten der höchsten Potenz von  $x$  in den Zähler und dividieren ihn durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von  $x$  im Nenner. Dieser Quotient ist die Lösung für das Grenzwertproblem und die Höhe der Asymptote. Wenn beispielsweise  $h(x) = \frac{4x^2-10x+1}{5x^3+2x^2-x}$ , dann ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \frac{4}{5}$  und die Funktion  $h$  hat eine horizontale Asymptote an der Stelle  $y = \frac{4}{5}$ .





Die Substitution funktioniert für die Aufgabenstellungen in diesem Abschnitt nicht. Wenn Sie versuchen  $\infty$  für  $x$  in die rationalen Funktionen in diesem Abschnitt einzusetzen, erhalten Sie  $\frac{\infty}{\infty}$ , und das ist *nicht* immer gleich 1. Dieses Ergebnis sagt Ihnen daher *nichts* über die Lösung für ein Grenzwertproblem.

## Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden

**Ein Beispiel:** Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ .

### 1. Probieren Sie es mit der Substitution – eine gute Idee.

Aber Sie haben keinen Erfolg. Sie erhalten  $\infty - \infty$ , das Ihnen gar nichts sagt. Weiter mit Plan B. Da  $(\sqrt{x^2 + x} - x)$  eine Quadratwurzel enthält, wäre die konjugierte Multiplikation die Methode der Wahl, auch wenn diese Methode typischerweise für Bruchfunktionen verwendet wird.

### 2. Multiplizieren Sie Zähler und Nenner mit der konjugierten Form von $(\sqrt{x^2 + x} - x)$ und kürzen Sie:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)}{1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \end{aligned}$$

### 3. Jetzt funktioniert auch die Substitution wieder – weiter geht's:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Das Ergebnis lautet also:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \frac{1}{2}$ .

