



Auf einen Blick

Über den Autor	23
Einleitung.....	25
Teil I: Eindimensionale Analysis.....	31
Kapitel 1: Grundlagen der Analysis.....	33
Kapitel 2: Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen.....	61
Kapitel 3: Von Folgen und Reihen.....	101
Kapitel 4: Eindimensionale Integration.....	127
Teil II: Lineare Algebra.....	161
Kapitel 5: Die Grundlagen: Vektorräume und lineare Gleichungssysteme.....	163
Kapitel 6: Überleben in der Welt der Matrizen.....	185
Kapitel 7: Das Matrizen-Finale: Hauptachsentransformationen und euklidische Vektorräume.....	219
Teil III: Komplexe Analysis, Fourieranalysis und Differentialgleichungen.....	259
Kapitel 8: Nicht reell aber real – die komplexen Zahlen.....	261
Kapitel 9: Funktionentheorie: Komplexe Funktionen.....	277
Kapitel 10: Fourierreihen und -integrale.....	295
Kapitel 11: Gewöhnliche Differentialgleichungen.....	309
Teil IV: Mehrdimensionale Analysis.....	335
Kapitel 12: Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler.....	337
Kapitel 13: Mehrdimensionale Integration.....	371
Kapitel 14: Vektoranalysis in drei Dimensionen.....	397
Teil V: Der Top-Ten-Teil.....	435
Kapitel 15: Mehr als zehn wichtige Formeln.....	437
Kapitel 16: Zehn interessante Ansätze der Physik.....	443
Stichwortverzeichnis.....	451







Inhaltsverzeichnis

Über den Autor	23
Danksagung.....	23
Einleitung.....	25
Ein leicht verständlicher Einstieg in die höhere Mathematik anhand von Beispielen.....	25
Überall praktische Beispiele.....	26
Törichte Annahmen über den Leser.....	26
Konventionen in diesem Buch.....	27
Wie dieses Buch strukturiert ist.....	27
Teil I: Eindimensionale Analysis.....	27
Teil II: Lineare Algebra.....	28
Teil III: Komplexe Analysis und Differentialgleichungen.....	28
Teil IV: Mehrdimensionale Analysis.....	28
Teil V: Der Top-Ten-Teil.....	29
Die Symbole in diesem Buch.....	29
Den modularen Aufbau für sich nutzen.....	29
TEIL I EINDIMENSIONALE ANALYSIS.....	31
Kapitel 1 Grundlagen der Analysis.....	33
Was Funktionen eigentlich sind.....	33
Graphische Darstellung von Funktionen.....	35
Polynome einfach verstehen.....	36
Bruchrechnung: Rationale Funktionen.....	39
Rasch Wachsende Exponentialfunktionen.....	40
Umgekehrt betrachtet: Logarithmusfunktionen.....	41
Von Umkehr- und Inversen Funktionen.....	43
Trigonometrische Funktionen.....	44
Trigonometrische Funktionen zeichnen.....	45
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten.....	46
Grenzwerte einer Funktion Verstehen.....	46
Drei Funktionen erklären den Grenzwertbegriff.....	47
Links- und rechtsseitige Grenzwerte.....	48
Die formale Definition eines Grenzwertes – wie erwartet!.....	48
Unendliche Grenzwerte und Vertikale Asymptoten.....	49
Grenzwerte für x gegen unendlich.....	50
Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen.....	50
Einfache Grenzwerte auswerten.....	53
Einfachste Methode: Einsetzen und Auswerten.....	53





14 Inhaltsverzeichnis

Echte Aufgabenstellungen mit Grenzwerten	54
Methode 1: Faktorisieren	54
Methode 2: Konjugierte Multiplikation	54
Methode 3: Einfache algebraische Umformungen	55
Methode 4: Das Grenzwert-Sandwich	56
Grenzwerte bei unendlich auswerten	57
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten	58
Algebraische Tricks für Grenzwerte bei unendlich verwenden	59

Kapitel 2

Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen 61

Erste Schritte des Ableitens	62
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert	62
Grundlegende Regeln der Differentiation	64
Die Konstantenregel	64
Die Potenzregel	64
Die Koeffizientenregel	65
Die Summenregel – und die kennen Sie schon	65
Trigonometrische Funktionen differenzieren	65
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzieren	66
Fortgeschrittene Regeln der Differentiation	67
Die Produktregel	67
Die Quotientenregel	67
Die Kettenregel	68
Implizite Differentiation	71
Logarithmische Differentiation	72
Differentiation von Umkehrfunktionen	73
Keine Angst vor höheren Ableitungen	75
Kurvendiskussion: Extrem-, Wende- und Sattelpunkte	76
Berg und Tal: Positive und negative Steigungen	76
Bauchgefühle: Konvexität und Wendepunkte	77
Am Tiefpunkt angelangt: Ein lokales Minimum	77
Atemberaubender Blick: Das globale Maximum	78
Achtung – Nicht auf der Spitze stecken bleiben	78
Halten Sie sich fest – nun geht's bergab!	78
Jetzt wird's kritisch an den Punkten!	78
Lokale Extremwerte finden	79
Die kritischen Werte suchen	80
Der Test mit der ersten Ableitung – wachsend oder fallend?	81
Der Test mit der zweiten Ableitung – Krümmungsverhalten!	82
Globale Extremwerte finden	83
Konvexität und Wendepunkte praktisch bestimmen	85
Die Graphen von Ableitungen – jetzt wird gezeichnet!	87
Der Zwischenwertsatz – Es geht nichts verloren	90
Der Mittelwertsatz – Es bleibt Ihnen nicht(s) erspart!	92
Das nützliche Taylorpolynom	93





Inhaltsverzeichnis 15

Die Regel von l'Hospital	96
Nicht akzeptable Formen in Form bringen	98
Kombinieren der Methoden – nur Geduld!	98

Kapitel 3

Von Folgen und Reihen 101

Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht	101
Folgen aneinanderreihen	102
Konvergenz und Divergenz von Folgen	103
Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital bestimmen	104
Reihen summieren	105
Partialsommen	105
Konvergenz oder Divergenz einer Reihe	105
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!	107
Das einfachste Kriterium auf Divergenz: Eine notwendige Bedingung	107
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz beziehungsweise Divergenz	108
Geometrische Reihen	108
Harmonische Reihe	109
Teleskop-Reihen	110
Drei Vergleichskriterien für Konvergenz beziehungsweise Divergenz	111
Der direkte Vergleich – Minoranten-/Majorantenkriterium	111
Das Grenzwertkriterium	112
Quotienten- und Wurzelkriterium	114
Das Quotientenkriterium	114
Das Wurzel-Kriterium	115
Alternierende Reihen	116
Absolute oder normale Konvergenz – das ist die Frage!	116
Leibniz und das Kriterium für alternierende Reihen	117
Ableitungen und Integrale für Grenzprozesse nutzen	120
Eine erste spezielle Reihenart, die Potenzreihen	122
Potenzreihen (er)kennen	122
Konvergenzbereich von Potenzreihen	123
Rechnen Sie mit Potenzreihen	124
Eine zweite spezielle Reihenart, die Taylorreihen	125

Kapitel 4

Eindimensionale Integration 127

Das bestimmte Integral – Flächen berechnen	127
Stammfunktionen suchen – rückwärts ableiten	129
Flächenfunktionen beschreiben	130
Achtung Tusch: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	131
Der andere Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	132
Stammfunktionen finden – Drei grundlegende Techniken	135
Umkehrregeln für Stammfunktionen	135
Umkehrregeln zum Aufwärmen	135
Die umgekehrte Potenzregel	135





16 Inhaltsverzeichnis

Genial einfach: Raten und Prüfen	136
Die Substitutionsmethode	137
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	140
Partielle Integration: Teile und Herrsche!	141
Wählen Sie weise!	143
Partielle Integration: Immer wieder dasselbe!	144
Im Kreis gelaufen und doch am Ziel	145
Integrale mit Sinus und Kosinus	146
Fall 1: Die Potenz vom Sinus ist ungerade und positiv	146
Fall 2: Die Potenz vom Kosinus ist ungerade und positiv	147
Fall 3: Die Potenzen von Sinus und Kosinus sind gerade aber nicht negativ	147
Integrieren mit dem A-B-C der Partialbrüche	148
Fall 1: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	149
Fall 2: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	150
Fall 3: Der Nenner enthält lineare oder quadratische Faktoren in höherer Potenz	151
Bonusrunde – Der Koeffizientenvergleich	152
Integrale rationaler Funktionen von Sinus und Kosinus	153
Grau ist alle Theorie – Praktische Integrale!	153
Die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen	154
Bogenlängen bestimmen	156
Oberflächen von einfachen Rotationskörpern bestimmen	158

TEIL II LINEARE ALGEBRA 161

Kapitel 5 Die Grundlagen: Vektorräume und lineare Gleichungssysteme 163

Vektoren erleben	163
Vektoren veranschaulichen	164
Mit Vektoren anschaulich rechnen	166
Mit Vektoren rechnen	167
Betrag eines Vektors berechnen	170
Das Skalarprodukt von Vektoren berechnen	171
Schöne Vektorraumteilmengen: Untervektorräume bestimmen	174
Vektoren und ihre Koordinaten bestimmen	176
Punkte, Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum	179
Arten von linearen Gleichungssystemen	180
Homogene Gleichungssysteme	181
Inhomogene Gleichungssysteme	181
Überbestimmte Gleichungssysteme	182
Unterbestimmte Gleichungssysteme	182
Quadratische Gleichungssysteme	183
Nicht lösbare Gleichungssysteme	184
Graphische Lösungsansätze für LGS	184

Inhaltsverzeichnis 17

Kapitel 6	
Überleben in der Welt der Matrizen	185
Was Matrizen wirklich sind.....	185
Addition von Matrizen	186
Skalarmultiplikation von Matrizen.....	187
Multiplikation von Matrizen.....	187
Matrizen in Produktionsprozessen	188
Transponierte und symmetrische Matrizen.....	190
Keine Angst vor inversen Matrizen.....	191
Matrizen und lineare Gleichungssysteme	192
Das Lösungsverfahren: Der Gaußsche Algorithmus	192
Der Rang von Matrizen	197
Matrizen invertieren in der Praxis	198
Kriterien für die Lösbarkeit von homogenen Gleichungssystemen.....	199
Kriterien für die Lösbarkeit von inhomogenen Gleichungssystemen.....	200
Matrizen und lineare Abbildungen.....	200
Lineare Abbildungen an Beispielen	201
Matrizen als lineare Abbildungen.....	202
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Theorie.....	202
Bilder und Kerne, Ränge und Defekte – in der Praxis.....	203
Lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen.....	205
Matrizen und ihre Determinanten	207
Determinanten von 2×2 - Matrizen	207
Determinanten von 3×3 - Matrizen	207
Determinanten von allgemeinen Matrizen	208
Determinanten, Matrizen & lineare Gleichungssysteme	210
Die Cramersche Regel.....	211
Die Inversen mittels Adjunktenformel berechnen	213
Flächen und Volumina mittels Determinanten berechnen	215
Kreuzprodukt von Vektoren.....	216
Kapitel 7	
Das Matrizen-Finale: Hauptachsentransformationen	
und euklidische Vektorräume	219
Basistransformation.....	220
Auf den Maßstab kommt es an!.....	220
Geben Sie mir Ihre Koordinaten!.....	221
Matrixdarstellung bei unterschiedlichen Basen	223
Basistransformationsmatrizen.....	225
Überzeugende Diagramme	226
Eigenwerte und Eigenvektoren.....	228
Was sind Eigenwerte und Eigenvektoren?	228
Eigenwerte einer Matrix berechnen.....	228
Eigenvektoren einer Matrix berechnen	230
Eigenräume finden und analysieren	231
Matrizen diagonalisieren.....	232



18 Inhaltsverzeichnis

Drehungen und Spiegelungen.....	236
Drehungen in der Ebene.....	237
Berechnung des Drehwinkels in der Ebene.....	239
Spiegelungen in der Ebene.....	239
Berechnung der Spiegelachse in der Ebene.....	241
Drehungen im dreidimensionalen Raum.....	244
Mit Skalarprodukten messen können.....	247
Starten mit dem Standard-Skalarprodukt.....	248
Die allgemeinen Skalarprodukte.....	250
Die Norm als Längenbegriff verstehen.....	251
Wichtige Eigenschaften der Norm.....	251
Alles Senkrecht? – Orthogonalität erwünscht.....	252
Den Öffnungswinkel zwischen Vektoren (er)kennen.....	252
Allgemeine euklidische Vektorräume untersuchen.....	253
Orthogonale Vektoren allgemein beschreiben.....	254
Orthogonalsysteme und orthogonale Basen.....	254
Orthonormale Systeme und orthonormale Basen.....	255

TEIL III KOMPLEXE ANALYSIS, FOURIERANALYSIS UND DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.....259

Kapitel 8 Nicht reell aber real – die komplexen Zahlen.....261

Was komplexe Zahlen wirklich sind.....	261
Komplexe Rechenoperationen.....	263
Die komplexe Addition.....	263
Die komplexe Multiplikation.....	263
Die Konjugierte einer komplexen Zahl.....	264
Die komplexe Division.....	265
Zusammenhänge zwischen den komplexen Operationen.....	265
Komplexe quadratische Gleichungen.....	266
Darstellung komplexer Zahlen als Paare reeller Zahlen.....	267
Darstellung komplexer Zahlen durch Polarkoordinaten.....	268
Komplexe Potenzen und Wurzeln.....	271
Anwendungen komplexer Zahlen.....	273

Kapitel 9 Funktionentheorie: Komplexe Funktionen.....277

Tusch bitte: Holomorphe Funktionen.....	277
Komplexe versus reelle Differenzierbarkeit.....	281
Elementare komplexe Funktionen.....	282
Komplexe Exponentialfunktion.....	282
Komplexe Logarithmusfunktion.....	283
Komplexe trigonometrische Funktionen.....	284
Nicht über isolierte Singularitäten stolpern.....	284
Noch mehr Reihen: die Laurentreihen.....	286





Inhaltsverzeichnis 19

(Fast) Keine Angst vor den Residuen	287
Komplexe Kurvenintegrale berechnen.....	288
Integrale mittels Parametrisierungen lösen	289
Integrale mittels Stammfunktionen lösen	290
Integrale mittels Residuensatz lösen.....	290
Integrale mittels Cauchyscher Integralformeln lösen	291
Praktische Anwendung der komplexen auf reelle Integrale.....	292

Kapitel 10 Fourierreihen und -integrale 295

Periodische Funktionen erkennen und erschaffen.....	295
Der periodische Fall: Fourierreihen.....	297
Die komplexe Form der Fourierreihe.....	301
Der nicht-periodische Fall: Fouriertransformation	302
Praktische Berechnung der Fouriertransformierten.....	304
Anwendung der Fourieranalyse – kurzgefasst.....	306

Kapitel 11 Gewöhnliche Differentialgleichungen 309

Einführende Gedanken zu Differentialgleichungen	309
Mit Isoklinen zur Lösung.....	311
Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit	314
Einfache Spezialfälle von Differentialgleichungen	315
Der einfachste Fall: $y' = f(x)$	315
Der Fall: $y' = f(x) \cdot g(y)$ – Trennung der Variablen	315
Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.....	317
Homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.....	317
Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	318
Praktische Lösungsmethode: Variation der Konstanten	320
Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.....	321
Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	322
Inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	324
Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	326
Äquivalenz einer Differentialgleichung n -ter Ordnung mit einem System erster Ordnung.....	327
Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung lösen.....	328
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	328
Homogene lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.....	329
Spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung	331
Anwendungen in der Schwingungslehre.....	332





20 Inhaltsverzeichnis

TEIL IV MEHRDIMENSIONALE ANALYSIS 335

Kapitel 12 Differentiation von Funktionen mehrerer Variabler 337

Funktionen mehrerer Variabler graphisch darstellen	338
Mit Schnitten und Niveau zum Erfolg	341
Schnitte von Graphen	341
Höhen- und Niveaulinien von Graphen	343
Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variabler	344
Partielle Ableitungen – auch hier ein Kinderspiel	346
Unabhängiges Pärchen: Partielle Ableitungen und Stetigkeit	348
Tangentialebenen als Tangenten-Alternative	349
Volles Programm: Totale Differenzierbarkeit	349
Gewünschte Zugabe: Totales Differential	350
Rechenregeln des Ableitens für Funktionen mehrerer Variabler	351
Implizite Funktionen differenzieren können	353
Höhere Ableitungen: Hilfe durch den Satz von Schwarz	354
Kurvendiskussion für Funktionen mehrerer Variabler	356
Kritische Punkte von Funktionen in höheren Dimensionen	356
Hinreichende Kriterien für Extrema und Sattelpunkte	357
Hinreichende Kriterien für Funktionen in zwei Variablen	359
Extremwerte unter Nebenbedingungen	361
Nebenbedingung mithilfe des Lagrangeschen Ansatzes lösen	361
Nebenbedingung mithilfe des Einsetzverfahrens lösen	364
Kopf an Kopf Rennen – beide Verfahren im direkten Vergleich	365

Kapitel 13 Mehrdimensionale Integration 371

Flächenintegrale – ein Einstieg	371
Das Prinzip des Cavalieri – Volumen der Drehkörper	377
Volumenintegrale – der Aufstieg	379
Das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel	381
Volumen eines dreidimensionalen Rotationskörpers	382
Das Volumen des Torus auf zwei Arten berechnen	383
Parametrisierung des Torus	384
Volumen des Torus als Rotationskörper	385
Volumen des Torus mithilfe der zweiten Guldinschen Regel	387
Integrierbare Funktionen mehrerer Variabler – der Gipfel	387
Mit feinsten (Quader-)Rasterung zum Ziel kommen	388
Endlich Gebiete erkennen	389
Offene und (weg-)zusammenhängende Mengen	390
Integrale überzeugend definieren und verstehen	391
Substitution durch Transformation	393



Inhaltsverzeichnis 21

Kapitel 14	
Vektoranalysis in drei Dimensionen	397
Skalar- und Vektorfelder	397
Keine Angst vor Differentialoperatoren	399
Gradient eines Skalarfeldes	400
Divergenz eines Vektorfeldes	400
Rotation eines Vektorfeldes	402
Rechenregeln für Gradient, Divergenz, Rotation, Laplace und Nabla	403
Das übersichtliche Nabla-Kalkül	404
Langsam durch Kurven und ihre Integrale	405
Kurven in der Ebene und im Raum	406
Kurven und ihre (Bogen-)Länge	408
Massen, Schwerpunkte und Oberflächen rotierender Kurven	410
Die Oberfläche des Torus auf zwei Arten berechnen	412
Skalare Kurvenintegrale – der Länge nach integrieren	413
Vektorielle Kurvenintegrale – gut für die Zirkulation	414
Wegunabhängigkeit von Gradientenfeldern	415
Integrale über geschlossenen Kurven	415
Integrabilitätsbedingung für Gradientenfelder	416
Oberflächlich durch den Raum	419
Flächen im dreidimensionalen Raum	419
Massen und Schwerpunkte von Flächen im Raum	421
Flächen orientieren – Außenseiten bestimmen	421
Skalare Oberflächenintegrale – Oberflächen berechnen	423
Vektorielle Oberflächenintegrale – im Fluss stehen	423
Den Fluss am Kreiskegel schrittweise berechnen	425
Formeln von Gauß, Stokes, Green und Maxwell	428
Gaußscher Integralsatz – der erste Höhepunkt	428
Stokesscher Integralsatz – der zweite Höhepunkt	429
Greensche Formeln – in Kürze und Würze	432
Maxwellgleichungen – kurz und knapp!	433

TEIL V	
DER TOP-TEN-TEIL	435

Kapitel 15	
Mehr als zehn wichtige Formeln	437
Wichtiger Grenzwert	437
Wichtiger Mittelwertsatz	437
Wichtiger Taylorreihenansatz	438
Wichtiger Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	438
Wichtiger Betrag eines Vektors	438
Wichtiger Dimensionssatz für lineare Abbildungen	438
Wichtiges Orthonormalisierungsverfahren	439
Wichtige komplexe Wurzeln	439
Wichtiger Residuensatz	439
Wichtige Fouriertransformation	439



22 Inhaltsverzeichnis

Wichtige Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung.....	440
Wichtige Hessematrix.....	440
Wichtige Integrale über Gebieten.....	440
Wichtige Sätze von Gauß und Stokes.....	440
Bonusrunde: Wichtige Gleichung.....	441

Kapitel 16

Zehn interessante Ansätze der Physik 443

Lorentz und die relativen Geschwindigkeiten.....	443
Dopplers Effekte.....	445
Keplers Planetengesetze.....	445
Galileis Fallgesetz.....	446
Newtons Trägheitsgesetz.....	446
Maxwell und seine Gleichungen.....	446
Plancks Wirkung.....	447
Schrödingers Gleichung.....	447
Heisenbergsche Unschärfe.....	448
Einsteins $E = mc^2$ und seine spezielle Theorie zur Relativität.....	448
Bonusrunde: Einsteins allgemeine Relativitätstheorie.....	449

Stichwortverzeichnis..... 451

