



IN DIESEM KAPITEL

Quantisierung: Unteilbare Einheiten

Experimente mit Wellen, die sich wie Teilchen
verhalten und mit Teilchen, die sich wie Wellen
verhalten

Unschärfe und Wahrscheinlichkeiten

Kapitel 1

Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik

Der klassischen Physik zufolge sind Teilchen Teilchen und Wellen Wellen. Beide haben keine Gemeinsamkeiten. Teilchen besitzen eine Energie E und einen Impulsvektor \mathbf{p} , und das ist alles. Dagegen besitzen Wellen, wie beispielsweise Lichtwellen, eine Amplitude A und einen Wellenvektor \mathbf{k} , für dessen Betrag $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ gilt mit der Wellenlänge λ . Der Wellenvektor zeigt in die Richtung, in die sich die Welle fortpflanzt. Und das ist, der klassischen Physik zufolge, auch hier alles.

Aber die Wirklichkeit sieht anders aus: Es zeigt sich, dass Teilchen einen wellenartigen Charakter besitzen können und Wellen einen Teilchencharakter. Hauptsächlich weil uns klar geworden ist, dass Wellen (zum Beispiel Licht) sich wie Teilchen (zum Beispiel Elektronen) verhalten können und umgekehrt, kann die Quantenmechanik heute eine so äußerst wichtige Rolle in der Welt der Physik spielen. Dieses Kapitel wirft einen Blick auf die Herausforderungen, denen sich die Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts gegenüber sah, und zeigt, wie die Quantenmechanik diese Herausforderungen nach und nach löste. Bis zu diesem Zeitpunkt war es der klassischen Physik möglich, alles, aber auch alles genau zu erklären. Aber diese vertrackten Experimentalphysiker waren unermüdlich und fanden schließlich eine ganze Reihe von Ergebnissen, die die theoretischen Physiker nicht erklären konnten. Das war für diese natürlich unerträglich, und so machten sie sich an die Arbeit. Die Probleme kamen aus der mikroskopischen Welt, jener Welt, die zu klein ist, als dass man sie sehen



26 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

könnte. In der üblichen, makroskopischen Welt konnte die klassische Physik fast alles erklären; wenn es aber um Effekte im Zusammenhang mit der Mikrowelt ging, begann sie zu versagen. Wenn man sich dieses Versagen genauer ansieht, erhält man eine gute Einführung in die Quantenmechanik und versteht, warum sie notwendig ist.

Wie alles begann: Der Ärger mit der Strahlung schwarzer Körper

Eine der wesentlichen Neuerungen der Quantenmechanik ist natürlich die *Quantisierung* – das Auftreten von diskreten, unteilbaren, nicht kontinuierlichen Objekten. Diese Idee der Quantisierung, etwa der Energie, wurde im Zusammenhang mit einer der ersten Herausforderungen der klassischen Physik entwickelt: der Strahlung eines schwarzen Körpers.

Wenn man einen Körper erhitzt, beginnt er zu glühen. Doch auch bevor dieses Glühen sichtbar wird, strahlt der Körper, nämlich im infraroten Bereich des Spektrums. Der Grund für dieses Glühen beim Erhitzen ist, dass Elektronen an der Oberfläche des Materials thermisch angeregt werden und dass beschleunigte oder abgebremste Elektronen Licht aussenden.

Die Physiker beschäftigten sich im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert vor allem mit dem Lichtspektrum, das von sogenannten schwarzen Körpern ausgesendet wird. Ein *schwarzer Körper* ist ein Stoff, der wie alle anderen Körper seiner Temperatur entsprechend strahlt, aber auch Licht aus seiner Umgebung absorbiert und reflektiert. Um das Problem möglichst einfach zu halten, nimmt die Physik jedoch an, dass ein idealer schwarzer Körper alles einfallende Licht absorbiert und nichts reflektiert (daher der Name *schwarzer Körper*, denn ein Objekt erscheint vollkommen schwarz, wenn es das gesamte einfallende Licht absorbiert). Wenn man einen schwarzen Körper erhitzt, beginnt er zu strahlen, das heißt, er emittiert Licht.

Es war nicht leicht, einen vollkommen schwarzen Körper zu entwickeln. Denn welches Material absorbiert schon exakt 100 Prozent des einfallenden Lichts und reflektiert überhaupt nicht? Aber Physiker sind zumeist überaus findig, und sie entwickelten Hohlkörper mit einem Loch, wie in Abbildung 1.1 dargestellt.

Wenn nun Licht auf das Loch fällt, wird es in das Innere des Hohlkörpers gelangen, wo es dann wieder und wieder reflektiert wird, bis es schließlich absorbiert wird (nur ein verschwindend geringer Anteil kann wieder durch das Loch entkommen). Genau dies aber ist ein schwarzer Körper: eine Fläche, die Licht verschluckt und nicht reflektiert. Wenn man den Hohlkörper erhitzt, wird sein Inneres zu glühen beginnen, und diese »Temperaturstrahlung« tritt durch das Loch nach außen. Damit ist das Loch tatsächlich eine sehr gute Annäherung an einen vollkommenen schwarzen Körper.

Das Spektrum eines schwarzen Körpers und zwei Versuche, es zu modellieren, sind in Abbildung 1.2 dargestellt.



KAPITEL 1 Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik 27

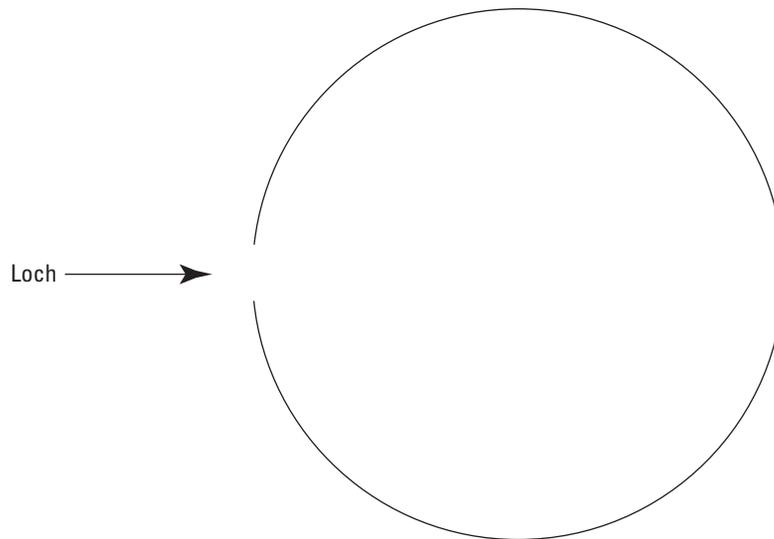


Abbildung 1.1: Ein Hohlraum mit sehr kleinem Loch ist ein so gut wie idealer schwarzer Körper

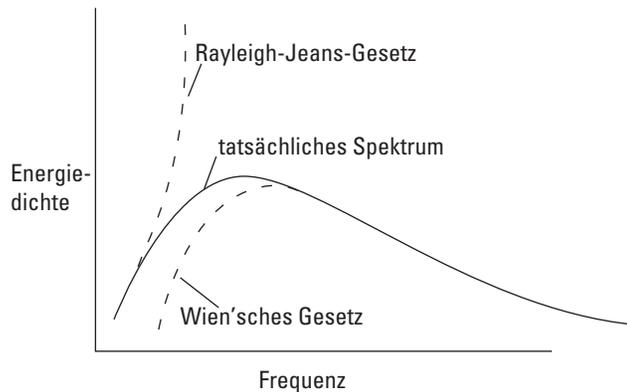


Abbildung 1.2: Zwei Ansätze für das Spektrum eines schwarzen Körpers

Der erste Versuch: Das Wien'sche Gesetz

Der Erste, dem es gelang, zumindest einen Teil des Spektrums eines schwarzen Körpers zu erklären, war 1889 Wilhelm Wien. Mithilfe der klassischen Thermodynamik entwickelte er folgende Formel:

$$u(\nu, T) = A\nu^3 e^{-\beta\nu/T}$$

Dabei sind A und β Konstanten, die sich aus der experimentellen Anordnung ergeben, ν ist die Frequenz des Lichts und T die Temperatur des schwarzen Körpers. (Das Spektrum





28 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

ist angegeben durch die Funktion $u(\nu, T)$, also die Energiedichte des emittierten Lichts als Funktion der Frequenz und der Temperatur.)

Diese Gleichung, das Wien'sche Verschiebungsgesetz, liefert sehr gute Ergebnisse für hohe Frequenzen, wie in Abbildung 1.2 zu sehen ist. Für niedrige Frequenzen liefert es hingegen zu kleine Werte.

Der zweite Versuch: Das Rayleigh-Jeans-Gesetz

Der nächste Versuch, das Spektrum eines schwarzen Körpers zu erklären, war das Rayleigh-Jeans-Gesetz, das um 1900 entwickelt wurde. Dieses Gesetz beschreibt das Spektrum durch folgende Formel:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Dabei ist $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K die Boltzmann-Konstante. Allerdings zeigte sich, dass beim Rayleigh-Jeans-Gesetz die Probleme – im Gegensatz zum Wien'schen Gesetz – im Bereich mittlerer und hoher Frequenzen lagen. Während es für niedrige Frequenzen gut mit den beobachteten Daten übereinstimmt (siehe Abbildung 1.2), divergiert es für mittlere und hohe Frequenzen. Dieses Phänomen nannte man die *Ultraviolett-Katastrophe*, da die beste Beschreibung, die man hatte, bei hohen Frequenzen (also im ultravioletten Bereich) unendlich hohe Energiedichten lieferte. Damit war die Zeit reif für etwas ganz Neues, was sich dann als die Quantenmechanik entpuppen sollte.

Ein intuitiver (Quanten-)Sprung: Das Planck'sche Spektrum

Max Planck machte 1900 einen revolutionären Vorschlag. Was ist, wenn der Betrag an Energie, den eine Lichtwelle mit Materie austauschen kann, nicht kontinuierlich ist, wie es die klassische Physik fordert, sondern nur ganz bestimmte *diskret* Werte annehmen kann? Mit anderen Worten: Planck behauptete, dass die Energie des Lichts, das von den Wänden des Schwarzkörper-Hohlraums ausgestrahlt wird, nur in nicht weiter unterteilbaren ganzzahligen Vielfachen einer Größe $h\nu$ auftritt, wobei h eine neue universelle Konstante ist:

$$E = nh\nu, \text{ wobei } n = 1, 2 \dots$$

Mit dieser Theorie, die am Anfang des 20. Jahrhunderts reichlich verrückt klang, wandelte Planck die in der der Rayleigh-Jeans-Theorie auftretenden kontinuierlichen Integrale über eine unendliche Zahl von Summanden in diskrete Summen um. Durch diese Änderung gelangte Planck zur folgenden Formel für das Spektrum der Strahlung eines schwarzen Körpers:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Diese Gleichung erwies sich als voller Erfolg; sie beschrieb das Spektrum eines schwarzen Körpers genau, sowohl für niedrige als auch für mittlere und hohe Frequenzen.



KAPITEL 1 Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik 29

Das war eine revolutionäre Vorstellung. Planck sagte, dass die Energie strahlender Oszillatoren im schwarzen Körper nicht jeden beliebigen Wert annehmen kann, wie es nach der klassischen Theorie möglich wäre; vielmehr gibt es nur bestimmte Werte, also *quantisierte* Energien. Planck nahm darüber hinaus an, dass dies für *jeden* Oszillator gilt; die Energie eines jeden Oszillators beträgt ein ganzzahliges Vielfaches von $h\nu$.



In der Folge wurde diese Planck'sche Theorie als *Planck'sches Gesetz* bekannt. Die Konstante h wiederum wird als *Planck'sches Wirkungsquantum* bezeichnet: $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js. Die Forderung, dass die Energie aller Oszillatoren quantisiert ist, war die Geburtsstunde der Quantenmechanik.

Man kann sich fragen, wie Planck auf diese Idee kam, da sie keine offensichtliche Lösung ist. Warum sollen Oszillatoren nur mit bestimmten Energien schwingen können? Wie kann man all das erklären? Unabhängig von den Antworten auf diese Fragen: Die Revolution war da, und niemand konnte sie aufhalten.

Stück für Stück: Licht als Teilchen

Licht als Teilchen? Besteht Licht nicht aus Wellen? Es stellte sich heraus, dass Licht sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften aufweisen kann. Der folgende Abschnitt liefert für beides Beweise.

Die Erklärung des photoelektrischen Effekts

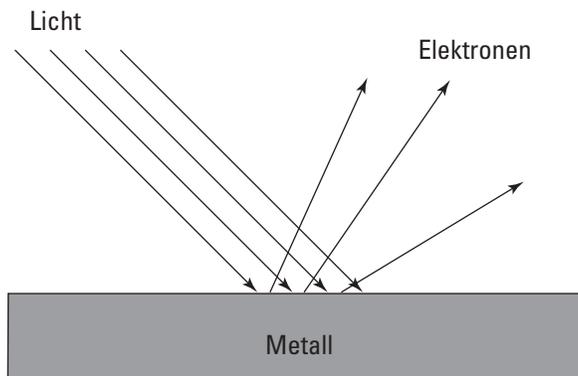
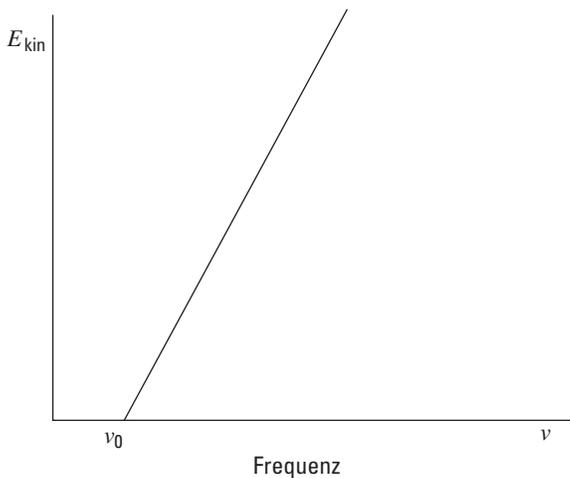
Der photoelektrische Effekt war ein weiteres der vielen experimentellen Ergebnisse, die die Krise der klassischen Physik am Beginn des 20. Jahrhunderts auslösten. Seine Erklärung war einer der ersten Erfolge Albert Einsteins; zudem liefert der Effekt einen Beweis für die Quantisierung von Licht. Es ging dabei um Folgendes.

Wenn man ein Metall mit Licht bestrahlt, wie es in Abbildung 1.3 dargestellt ist, werden Elektronen emittiert, denn sie absorbieren das einfallende Licht, und wenn sie genügend Energie aufnehmen, können sie die Metalloberfläche verlassen. Der klassischen Physik zufolge besteht Licht aus Wellen, und diese können jeden beliebigen Energiebetrag mit dem Metall austauschen. Wenn man also ein Stück Metall mit Licht bestrahlt, sollten die Elektronen im Metall das Licht absorbieren, egal, wie schwach die Wellen auch sein mögen, und so nach und nach genügend Energie aufnehmen, um es verlassen zu können. Daraus folgt, dass die kinetische Energie der emittierten Elektronen umso größer sein sollte, je mehr Licht auf das Metall fällt. Bei sehr schwachen Lichtstrahlen sollten nach entsprechend langer Wartezeit ebenfalls Elektronen austreten.

Aber das entspricht nicht den Beobachtungen: Wenn hochfrequentes (»blaues«) Licht auf das Metall fällt, treten wie erwartet Elektronen aus. Wird dagegen niederfrequentes (»rotes«) Licht eingestrahlt, passiert gar nichts, egal, wie lange man wartet. Und die Energie der emittierten Elektronen hängt nur davon ab, wie hoch die Lichtfrequenz ist, nicht aber von dessen Intensität (Abbildung 1.4).



30 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

**Abbildung 1.3:** Der photoelektrische Effekt**Abbildung 1.4:** Kinetische Energie E_{kin} der emittierten Elektronen als Funktion der Frequenz ν des einfallenden Lichts

Dabei wird ν_0 *Schwellenfrequenz* genannt; benutzt man Licht mit einer geringeren Frequenz, werden überhaupt keine Elektronen emittiert. Die emittierten Elektronen stammen aus dem sogenannten freien Elektronengas des Metalls (alle Metalle besitzen ein solches freies Elektronengas). Damit sie aus dem Metall austreten können, muss man ihnen eine Energie zuführen, die man die Austrittsarbeit W des Metalls nennt. Es gilt $W = h\nu_0$.

Diese Ergebnisse konnte man klassisch nicht erklären. Hier kommt nun Einstein ins Spiel. Das war in seinem großen Jahr 1905. Ermutigt von Plancks Erfolg (siehe den vorangegangenen Abschnitt) forderte Einstein, dass nicht nur Oszillatoren quantisiert sind, sondern auch das Licht selbst: Es besteht demnach aus unteilbaren Einheiten, die man heute *Photonen* nennt. Licht, so schlug Einstein vor, kann sich sowohl wie ein Teilchen als auch wie eine Welle verhalten.



KAPITEL 1 Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik 31

Nach dieser Vorstellung treffen die Photonen, wenn Licht auf eine Metalloberfläche fällt, auf die freien Elektronen und werden dabei jeweils von einem Elektron absorbiert. Des geschieht aber nur, wenn die Energie $h\nu$ des Photons größer als die Austrittsarbeit des Metalls ist. Es gilt:

$$h\nu = W + E_{\text{kin}}$$

Dabei ist W die Austrittsarbeit des Metalls und E_{kin} die kinetische Energie des emittierten Elektrons. Auflösen nach E_{kin} ergibt:

$$E_{\text{kin}} = h\nu - W$$

Man kann diese Gleichung auch mithilfe der Schwellenfrequenz ν_0 schreiben:

$$E_{\text{kin}} = h(\nu - \nu_0)$$

Ganz augenscheinlich ist Licht also nicht nur eine Welle, sondern manchmal verhält es sich auch wie eine Horde Teilchen, die Photonen. Mit anderen Worten: Licht ist quantisiert.

Dieses Ergebnis Einsteins hatte niemand erwartet, obwohl es auf die früheren Arbeiten Plancks zurückgriff. Licht ist also *auch quantisiert*? Es besteht aus unteilbaren Strahlungseinheiten? Was kommt als Nächstes?

Billard mit Licht: Der Compton-Effekt

Einer Welt, die sich immer noch weigerte, sich Licht als Teilchen vorzustellen (siehe den vorhergehenden Abschnitt), versetzte Arthur Compton mit dem nach ihm benannten Effekt den letzten Schlag. Seine Experimente befassten sich mit der Streuung von Photonen an Elektronen, wie Abbildung 1.5 zeigt.

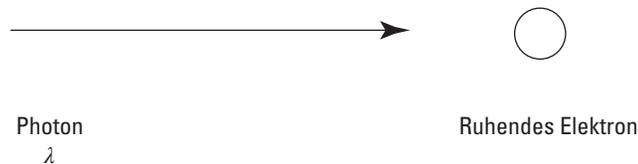


Abbildung 1.5: Licht fällt auf ein ruhendes Elektron

Licht mit einer Wellenlänge λ fällt auf ein ruhendes Elektron. Dabei wird es gestreut, wie Abbildung 1.6 zeigt.

Der klassischen Physik zufolge sollte Folgendes passieren: Das Elektron absorbiert das einfallende Licht, beginnt zu schwingen und emittiert dann Licht mit der ursprünglichen Wellenlänge und mit einer Intensität, die von der Intensität des einfallenden Lichts abhängt. Aber genau dies wurde nicht beobachtet; vielmehr erhöht sich die Wellenlänge um einen Betrag $\Delta\lambda$, den sogenannten *Wellenlängenshift*. Das gestreute Licht besitzt also eine größere Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$, was mit anderen Worten bedeutet, dass es an Energie verloren hat. $\Delta\lambda$ hängt im Übrigen vom Streuwinkel θ ab, nicht aber von der Intensität des einfallenden Lichts.





32 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

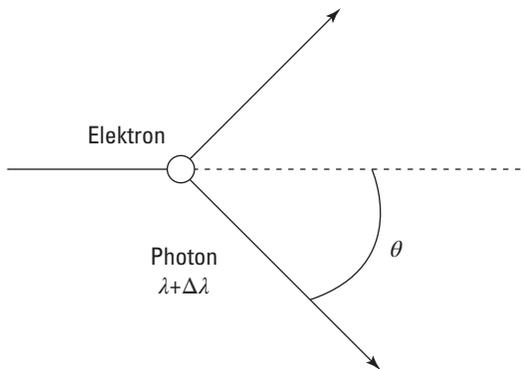


Abbildung 1.6: Photonenstreuung an einem Elektron

Arthur Compton konnte die Ergebnisse seiner Experimente nur erklären, wenn er annahm, dass er es mit einem ganz klassischen Stoß zwischen zwei Teilchen zu tun hatte, nämlich einem Photon und einem Elektron. Das bedeutet, dass auch er Licht als einzelne Teilchen behandeln musste, nicht als Welle. Wenn Photon und Elektron einen elastischen Stoß ausführen, bei dem sowohl die gesamte kinetische Energie als auch der Gesamtimpuls erhalten bleiben, also das Photon den Impuls aufs Elektron überträgt, kommt die Rechnung hin.

Unter der Annahme, dass Photonen den Impuls $p = E/c$ tragen, konnte Compton die folgende Formel für die Erhöhung der Wellenlänge herleiten (die Ableitung ist sogar ziemlich einfach):

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \lambda_C (1 - \cos \theta)$$

Dabei ist h die Planck'sche Konstante, m_e die Elektronenmasse, c die Lichtgeschwindigkeit und θ der Streuwinkel. $\lambda_C = h/m_e c$ ist die sogenannte Compton-Wellenlänge. Manchmal wird diese Gleichung auch wie folgt geschrieben:

$$\Delta\lambda = 4\pi\lambda_C \sin^2(\theta/2)$$

Es soll an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen werden, dass Compton zur Herleitung dieser Gleichung annehmen musste, dass sich Licht wie ein Teilchen verhält, nicht wie eine Welle. Ein weiteres Mal dominierte der Teilchencharakter von Licht über dessen Wellencharakter.

Das Positron als Beweis? Dirac und die Paarerzeugung

Im Jahr 1928 sagte der Physiker Paul Dirac die Existenz eines positiv geladenen Anti-Elektrons voraus, des sogenannten *Positrons*. Er arbeitete an einer Erweiterung der sich gerade entwickelnden Quantenmechanik durch Kombination mit der Relativitätstheorie zur sogenannten relativistischen Quantenmechanik. Diese Theorie sagte nun, wenn man mit den Vorzeichen Plus und Minus spielte, die Existenz des Positrons voraus.





KAPITEL 1 Entdeckungen und wesentliche Grundlagen der Quantenmechanik 33

Das war eine kühne Vorhersage: ein *Antiteilchen* des Elektrons? Aber es vergingen nur vier Jahre, bis Physiker das Positron wirklich beobachteten. In der heutigen Zeit können die gut ausgerüsteten Elementarteilchenphysiker verschiedenste Teilchenbeschleuniger benutzen, um all die Elementarteilchen zu erzeugen, die sie gerade benötigen, aber im frühen 20. Jahrhundert sah das ganz anders aus.

Damals mussten die Physiker die kosmische Strahlung als Teilchenquelle benutzen, also die Teilchen und hochenergetischen Photonen (die sogenannten Gamma-Strahlen), die aus dem Weltall auf die Erde treffen. Sie verwendeten *Nebelkammern*, die mit dem Dampf von Trockeneis gefüllt waren, um die Spuren dieser Teilchen sichtbar zu machen. Wenn man diese Kammern in Magnetfelder brachte, konnte man anhand der Krümmung der Bahnen den Impuls der Teilchen bestimmen.

Im Jahr 1932 beobachtete ein Physiker ein sehr überraschendes Ereignis: Ein Paar von entgegengesetzt geladenen Teilchen (das konnte man anhand der Krümmungen im Magnetfeld feststellen) erschien plötzlich wie aus dem Nichts. Es gab keine Teilchenspur, die zum Entstehungsort der beiden neuen Teilchen führte. Diesen Prozess nennt man *Paarerzeugung*: die Umwandlung eines hochenergetischen Photons in ein Elektron und ein Positron, zu der es kommen kann, wenn das Photon an einem schweren Atomkern vorbeifliegt.

Die Physiker hatten nun also experimentell beobachtet, wie sich ein Photon in ein Teilchenpaar umwandelt. Mehr Beweise für die Teilchennatur von Licht brauchte man nun wirklich nicht! Später wurde übrigens auch die *Paarvernichtung* beobachtet: die Umwandlung eines Elektrons und eines Positrons in Licht.

Es stellte sich heraus, dass Paarerzeugung und -vernichtung von Einsteins neuer Relativitätstheorie bestimmt werden. Insbesondere gilt seine berühmte Formel $E = mc^2$, die eine Beziehung zwischen Energie und Masse herstellt. Zu diesem Zeitpunkt verfügte man also über eine Vielzahl von Beweisen für die Teilchennatur von Licht.

Eine doppelte Identität: Die Wellennatur von Teilchen

Im Jahr 1923 schlug der Physiker Louis de Broglie vor, dass nicht nur Wellen Teilchencharakter besitzen, sondern dass umgekehrt auch alle Materie-Teilchen wellenartige Eigenschaften aufweisen.

Wie kann man sich das vorstellen? Ein Photon besitzt den Impuls $p = h\nu/c = h/\lambda$, wobei ν die Frequenz des Photons und λ seine Wellenlänge ist. Sein Wellenvektor \mathbf{k} ist $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ (mit $\hbar = h/2\pi$; sprich »h quer«). De Broglie postulierte, dass die folgenden beiden Beziehungen für alle Teilchen gelten sollten:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}$$



34 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen

De Broglie machte diese augenscheinlich überraschenden Vorschläge in seiner Doktorarbeit. Um sie zu überprüfen und festzustellen, ob sich ein Elektronenstrahl wie ein Teilchen oder wie eine Welle verhält, wurde ein Experiment entwickelt, bei dem ein Elektronenstrahl auf eine Doppelspaltanordnung fällt. Versuchsaufbau und Ergebnisse sind in Abbildung 1.7 dargestellt.

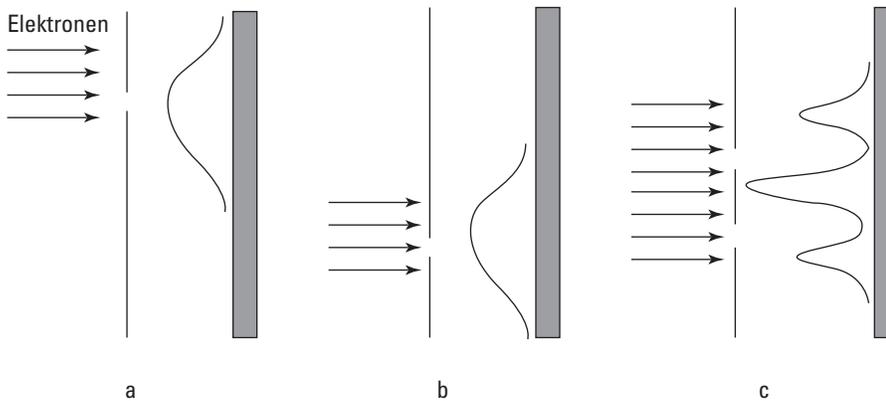


Abbildung 1.7: Ein Elektronenstrahl passiert eine Doppelspaltanordnung

Abbildung 1.7a zeigt einen Elektronenstrahl, der auf einen einzelnen Spalt fällt, sowie die sich auf einem dahinter befindlichen Schirm ergebende Intensitätsverteilung. In Abbildung 1.7b passieren die Elektronen einen zweiten Spalt. Klassisch würde man erwarten, dass sich die Intensitäten aus den Abbildungen 1.7a und 1.7b einfach addieren, wenn beide Spalte offen sind:

$$I = I_1 + I_2$$

Aber genau das passiert nicht. Tatsächlich beobachtet man, wenn beide Spalte offen sind, ein für die Überlagerung von Wellen typisches Interferenzmuster (Abbildung 1.7c) und nicht einfach die Summe der Elektronenintensitäten der Einzelspalte.

Dieses Ergebnis war ein Beweis für de Broglies Annahme des Wellencharakters von Teilchen. Die Experimente ergaben, dass die Beziehung $\lambda = h/p$ gilt, wie de Broglie gefordert hatte.



Der Wellencharakter von Teilchen spielt eine große Rolle im Rest dieses Buches. Speziell ergibt sich, dass man die Amplituden der Wellenfunktionen $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ und $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ addieren muss und nicht die Intensitäten:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t)$$

Man quadriert die Amplitude, um die Intensität zu erhalten. Die beobachteten Interferenzmuster beruhen auf der Phasendifferenz von $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ und $\psi_2(\mathbf{r}, t)$. Kommt Ihnen das merkwürdig vor? Wir kommen noch ausführlich darauf zurück.





Man kann nicht alles wissen (aber die Wahrscheinlichkeiten berechnen)



Ganz augenscheinlich besitzen Teilchen Wellencharakter und Wellen Teilchencharakter. Aber was ist nun ein Elektron: Ist es eine Welle oder ein Teilchen? Die Antwort ist, dass physikalisch gesehen ein Elektron ein Elektron ist und man nicht von vornherein sagen kann, ob es sich wie eine Welle oder wie ein Teilchen verhält. Erst der Prozess der Messung legt den Charakter des Elektrons fest. Diese Vorstellung wird uns durch das ganze Buch begleiten.

Die Quantenmechanik lebt eigentlich sehr gut mit Unbestimmtheiten wie »mal Welle, mal Teilchen«. Zu Beginn missfiel das vielen bedeutenden Physikern, insbesondere Albert Einstein, dessen berühmter Ausspruch lautete: »Gott würfelt nicht.« Der folgende Abschnitt erläutert den Begriff der Unschärfe und wie die Physiker mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten.

Die Heisenberg'sche Unschärferelation

Die Tatsache, dass Teilchen einen wellenartigen Charakter besitzen, wirft ein weiteres Problem auf: Wellen sind im Raum nicht lokalisiert. Das Wissen um dieses Problem veranlasste im Jahr 1927 Werner Heisenberg dazu, seine berühmte Unschärferelation zu entwickeln.

In der klassischen Physik ist es möglich, ein Objekt durch die Angabe seines Impulses und seines Ortes zu beschreiben. Beide können sehr genau gemessen werden. Mit anderen Worten: Die klassische Physik ist vollständig *deterministisch*.

Auf atomarer Ebene hingegen zeichnet die Quantenmechanik ein völlig anderes Bild. Die Heisenberg'sche Unschärferelation besagt, dass eine inhärente Unschärfe in der Beziehung zwischen Ort und Impuls existiert. Für die x -Richtung lautet sie beispielsweise

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

wobei Δx die Messunschärfe der Position eines Teilchens in x -Richtung ist, Δp_x die Unschärfe des Impulses in x -Richtung und $\hbar = h/2\pi$.

Dies bedeutet mit anderen Worten Folgendes: Je genauer man die Position eines Teilchens kennt, umso größer ist die Unschärfe des Impulses – und umgekehrt. Diese Beschreibung gilt genauso für die anderen beiden Raumrichtungen:

$$\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}; \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

Die Heisenberg'sche Unschärferelation ist eine direkte Folge des Wellencharakters von Teilchen, da man eine Welle nicht genau lokalisieren kann.



36 TEIL I Ist die Welt nicht klein? Die Grundlagen



Anders als die klassische Physik ist die Quantenmechanik undeterministisch. Man kann Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig *genau* kennen. Man kann für diese gekoppelten Größen nur Wahrscheinlichkeiten angeben.

Die Würfel rollen: Quantenmechanik und Wahrscheinlichkeiten

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens durch seine Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ beschrieben. Diese Wellenfunktion gibt die De-Broglie-Welle des Teilchens an, wobei ihre Amplitude eine Funktion von Raum und Zeit ist. (Weitere Einzelheiten über de Broglie findet man weiter vorne im Abschnitt »Eine doppelte Identität: Die Wellennatur von Teilchen«.)



Man beachte, dass die Wellenfunktion die Amplitude eines Teilchens angibt, nicht die Intensität. Wenn man die Intensität einer Wellenfunktion wissen will, muss man die Wellenfunktion quadrieren: $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$. Diese *Intensität* einer Wellenfunktion ergibt dann die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort anzutreffen.

Auf diese Weise wandelt die Quantenmechanik Angaben von Ort und Impuls in Wahrscheinlichkeitsaussagen um. Sie benutzt Wellenfunktionen, deren Quadrat die *Wahrscheinlichkeitsdichte* angibt, dass ein Teilchen sich (zu einer bestimmten Zeit) an einem bestimmten Ort befindet oder einen bestimmten Impuls besitzt. Mit anderen Worten: $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Teilchen zur Zeit t in einem Volumenelement um den Ort \mathbf{r} herum befindet.

Neben der Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ im Ortsraum gibt es auch eine entsprechende Wellenfunktion $\varphi(\mathbf{p}, t)$ im Impulsraum.

Dieses Buch beschäftigt sich vorwiegend mit derartigen Wellenfunktionen: Wellenfunktionen freier Teilchen, von Teilchen, die innerhalb eines Potentials gefangen sind, von identischen Teilchen, die gegeneinanderstoßen, von Teilchen, die harmonische Bewegungen ausführen, von Licht, das an Teilchen gestreut wird, und so weiter. Mit dieser Art von Physik kann man das Verhalten aller möglichen physikalischen Systeme vorhersagen.

