



IN DIESEM KAPITEL

Erst auf der ersten Seite und schon müssen Sie sich einem Analysistest stellen

Analysis – ein bisschen auffrisierte Mathematik

Der Trick liegt im Vergrößern

Die Welt vor und nach der Analysis

Kapitel 1

Was ist Analysis?

»Mein heiterstes Erlebnis in Analysis K13 war der Tag, an dem ich den Unterricht verlassen musste, um mich einer Wurzelbehandlung zu unterziehen.«

– Mary Johnson

»Mich verfolgt immer wieder dieser Traum, in dem mein Analysislehrer mit der Axt hinter mir her ist.«

– Tom Franklin, Student im zweiten Semester

»Analysis macht Spaß und ist völlig logisch. Ich weiß gar nicht, was sie immer alle haben.«

– Sam Einstein, Urenkel von Albert

In diesem Kapitel beantworte ich Ihnen die Frage »Was ist Analysis?« in verständlicher Sprache und zeige Ihnen durch Beispiele aus der Praxis, wie die Analysis genutzt wird. Nachdem Sie dieses und die beiden folgenden kurzen Kapitel gelesen haben, werden Sie *verstehen*, worum es sich bei Analysis handelt. Aber zuerst machen wir es ganz anders: Sie werden erfahren, was Analysis nicht ist.

Was Analysis nicht ist

Das Unvermeidbare hinauszuzögern, ist wenig sinnvoll. Bereit für den ersten Analysistest? Antworten Sie mit *richtig* oder *falsch*!



32 TEIL I Analysis - ein Überblick

Richtig? Wenn Sie nicht wirklich gerne einen Kopfschutz tragen, brauchen Sie sich gar nicht mit Analysis zu beschäftigen.

Richtig? Analysis gefährdet Ihre Gesundheit.

Richtig? Analysis ist längst überholt.

Falsch, falsch, falsch! Man erzählt sich heute noch über die Analysis, sie sei ein unheimlich schwieriges, unwahrscheinlich geheimnisvolles Thema, das kein Mensch, der noch halbwegs bei Verstand ist, lernen will – es sei denn, man braucht eine gute Note.

Lassen Sie sich nicht von diesem Irrglauben leiten. Natürlich ist Analysis nicht einfach – ich will Ihnen gar nichts vormachen –, aber es ist in jedem Fall machbar. Sie haben Algebra, Geometrie und Trigonometrie gelernt. Die Analysis macht genau da weiter, wo Sie dort aufgehört haben – sie bildet ganz einfach den nächsten Schritt in einer logischen Reihe.

Und die Analysis ist keine tote Sprache wie Latein, die nur von Akademikern gesprochen wird. Es handelt sich dabei um die Sprache der Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler – und ist damit vielleicht nicht Teil Ihres Alltagslebens und auch nicht unbedingt der Brüller auf Partys. Aber die Arbeit dieser Ingenieure, Natur- und Wirtschaftswissenschaftler hat einen wesentlichen Einfluss auf Ihr tägliches Leben – von Ihrer Mikrowelle, dem Handy, dem Fernsehgerät und dem Auto bis hin zu der Medizin, die Sie schlucken, den Leistungen der Wirtschaft und unserem Verteidigungssystem. In dem Moment, in dem Sie dies lesen, wird irgendetwas in Ihrer unmittelbaren Reichweite oder in Ihrem Blickfeld durch die Analysis beeinflusst.

Was also ist Analysis?

Analysis ist im Grunde genommen eine Fortsetzung der Algebra und der Geometrie. In gewisser Hinsicht handelt es sich dabei nicht einmal um einen neuen Themenbereich – hier werden die bekannten Regeln der Algebra und Geometrie angewendet, wenn auch vielleicht etwas optimiert, um sie für komplexere Aufgabenstellungen zu verwenden. (Der Punkt dabei ist natürlich, dass diese *gewisse Hinsicht* ein neues und viel komplizierteres Thema *ist*.)

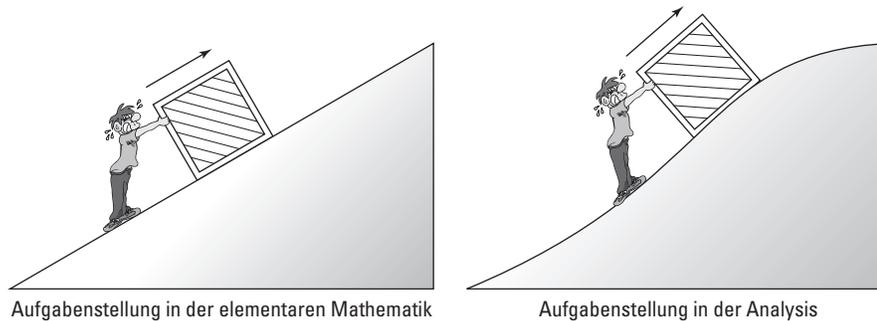
Betrachten Sie jetzt Abbildung 1.1. Auf der linken Seite schiebt ein Mann eine Kiste eine gerade Straße hinauf – die Straße ist an jeder Stelle gleich steil, sie besitzt überall die gleiche Steigung. Rechts schiebt der Mann dieselbe Kiste eine gekrümmte Straße entlang, hier ändert sich also die Steigung der Straße unterwegs. In beiden Situationen lautet die Frage, wie viel Energie erforderlich ist, um die Kiste ganz nach oben zu schieben. Für die rechte Seite brauchen Sie die Analysis (vorausgesetzt, Sie kennen keine Abkürzung aus der Physik).

Für die gerade Straße schiebt der Mann mit *unveränderter* Kraft und die Kiste wird entlang der Straße in *unveränderter* Richtung bewegt. Mit ein paar Formeln aus der Physik und ganz normaler Mathematik (einschließlich Algebra und Trigonometrie) können Sie berechnen, wie viel Energie erforderlich ist, um die Kiste die Straße hinaufzuschieben. Beachten Sie, dass die pro Zeiteinheit verbrauchte Energie (für die Physikexperten unter Ihnen: also die Leistung) gleich bleibt.

Für die gekrümmte Straße dagegen *ändern* sich die Dinge ständig. Die Steigung ändert sich – und zwar nicht nur so, dass eine Steigung für die ersten 10 m und eine andere für



KAPITEL 1 Was ist Analysis? 33



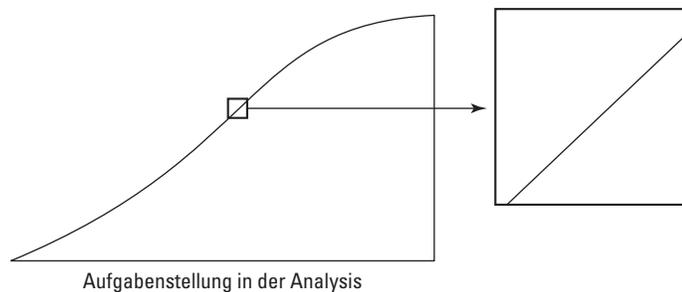
Aufgabenstellung in der elementaren Mathematik

Aufgabenstellung in der Analysis

Abbildung 1.1: Der Unterschied zwischen elementarer Mathematik und Analysis: die Kurve

die nächsten 10 m gilt –, sie *ändert sich permanent*. Und der Mann schiebt mit einer sich ständig *ändernden* Kraft – je steiler die Straße, desto schwerer ist das Schieben. Das Ergebnis ist, dass sich auch die Menge der pro Zeiteinheit verbrauchten Energie ständig *ändert*. Aus diesem Grund handelt es sich hier um eine Aufgabe für die Analysis. Es sollte Sie also nicht überraschen, dass man die Analysis auch als die »Mathematik der Veränderung« bezeichnet. Die Analysis erweitert die Regeln der »elementaren« Mathematik und wendet sie auf Probleme an, in denen die Grundgrößen (wie im Beispiel die Steigung der Straße und demzufolge die erforderliche Kraft und die Leistung) nicht mehr konstant sind.

Für die Aufgabenstellung mit der gekrümmten Straße bleiben die Formeln aus der Physik dieselben und die Algebra und die Trigonometrie, die Sie verwenden, bleiben ebenfalls gleich. Der Unterschied (und gleichzeitig die Grundidee) ist, dass Sie – im Gegensatz zu der Aufgabenstellung mit der geraden Straße, bei der Sie alles in einem einzigen Schritt berechnen können – die gekrümmte Straße in kleine Abschnitte zerlegen und jeden Abschnitt separat berechnen. Abbildung 1.2 zeigt einen kleinen Abschnitt der gekrümmten Straße, der hier um ein Vielfaches vergrößert wurde.



Aufgabenstellung in der Analysis

Abbildung 1.2: Wenn man die Kurve ausreichend vergrößert, wird sie gerade (zumindest fast).

Wenn Sie weit genug vergrößern, wird der kleine Abschnitt der gekrümmten Straße, den Sie dabei betrachten, »praktisch gerade«. Und weil er »praktisch gerade« ist, können Sie diesen kleinen Abschnitt wie eine gerade Straße berechnen. Jeder dieser kleinen Abschnitte wird auf dieselbe Weise berechnet, und anschließend addieren Sie alle Ergebnisse.

Das ist die Analysis im Groben. Sie betrachtet Aufgabenstellungen, die mit der elementaren Mathematik nicht gelöst werden können, weil sich die Gegebenheiten ständig ändern – die

34 TEIL I Analysis - ein Überblick

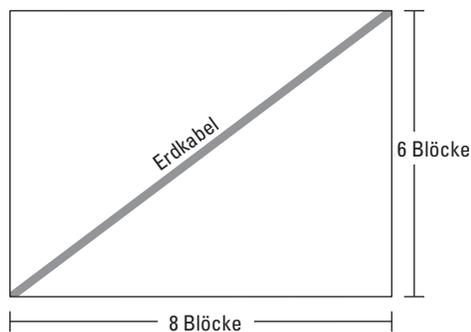
sich ändernden Größen kann man grafisch als Kurven darstellen. Die Analysis vergrößert die Kurve, bis sie schließlich »praktisch gerade« wird, und wendet dann die elementare Mathematik zur Lösung der Aufgabe an.

Wie weit muss man denn nun eigentlich vergrößern, bis die Kurve »praktisch gerade« wird? Antwort: *Unendlich* weit – denn wenn sich die Steigung permanent ändert, dann ändert sie sich auch in jedem noch so kleinen Abschnitt! Das ist das Fantastische an der Analysis: Sie rechnen auf die eine oder andere Art immer mit unendlich großen oder unendlich kleinen Größen. (Und das ist nebenbei bemerkt auch der Grund, weswegen die Analysis als so schwierig verrufen ist!)

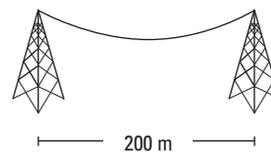
Beispiele für die Analysis aus der Praxis

Mithilfe der elementaren Mathematik können Sie die Aufgabe mit der konstanten Steigung lösen; mithilfe der Analysis können Sie auch die Aufgabenstellung mit der variablen Steigung lösen. Nachfolgend zeige ich Ihnen noch ein paar weitere Beispiele.

Mit der herkömmlichen Mathematik können Sie die Länge eines Erdkabels berechnen, das diagonal von einer Ecke eines Grundstücks zur anderen Ecke verläuft. Mithilfe der Analysis können Sie die Länge eines Kabels berechnen, das zwischen zwei Türmen hängt und die Form einer *Seilkurve* hat (die sich übrigens von einem einfachen Kreisbogen oder einer Parabel unterscheidet; der Fachausdruck für diese Kurve heißt *Kettenlinie* oder *Katenoide* – falls Sie mal jemanden beeindrucken müssen). Die Kenntnis der genauen Länge ist selbstverständlich wichtig für ein Energieversorgungsunternehmen, das Hunderte Kilometer neuer Elektrokabel verlegen muss. Sehen Sie sich dazu auch Abbildung 1.3 an.



Aufgabenstellung für die elementare Mathematik:
Wie lang ist das Kabel?



Aufgabenstellung für die Analysis:
Wie lang ist das Kabel?

Abbildung 1.3: Ohne und mit Analysis

Die Fläche eines normalen Hausdachs können Sie mithilfe der elementaren Mathematik berechnen. Mithilfe der Analysis können Sie die Fläche eines komplizierten, nicht kreisrunden Dachs berechnen, wie beispielsweise der Kuppel der Frauenkirche oder des Daches des Münchener Olympiastadions. Architekten, die ein solches Gebäude planen, müssen die Fläche der Kuppel kennen, um die Materialkosten zu ermitteln und um das Gewicht der Kuppel

KAPITEL 1 Was ist Analysis? 35

berechnen zu können (mit und ohne Schnee). Das Gewicht braucht man natürlich für die Planung der Stützstruktur. Sehen Sie sich dazu Abbildung 1.4 an.



Abbildung 1.4: Mit und ohne Analysis

Mit der elementaren Mathematik und ein bisschen einfacher Physik können Sie berechnen, um wie viel ein Mittelfeldspieler seinem Linksaußen voraus sein muss, um einen Pass spielen zu können. Beachten Sie, dass der Linksaußen in einer *geraden* Linie und bei *konstanter* Geschwindigkeit läuft. Als jedoch die NASA 1975 den »Vorlauf« für die Zielrichtung der Sonde Viking I auf den Mars berechnete, brauchte man dazu die Analysis, weil sich sowohl die Erde als auch der Mars in elliptischen Umlaufbahnen (unterschiedlicher Formen) bewegen und sich die Geschwindigkeiten von beiden ständig ändern – nicht zu erwähnen, dass die Sonde auf ihrem Weg zum Mars den verschiedenen und sich von Ort zu Ort ändernden Gravitationsfeldern von Erde, Mond, Mars und Sonne ausgesetzt ist (Abbildung 1.5).

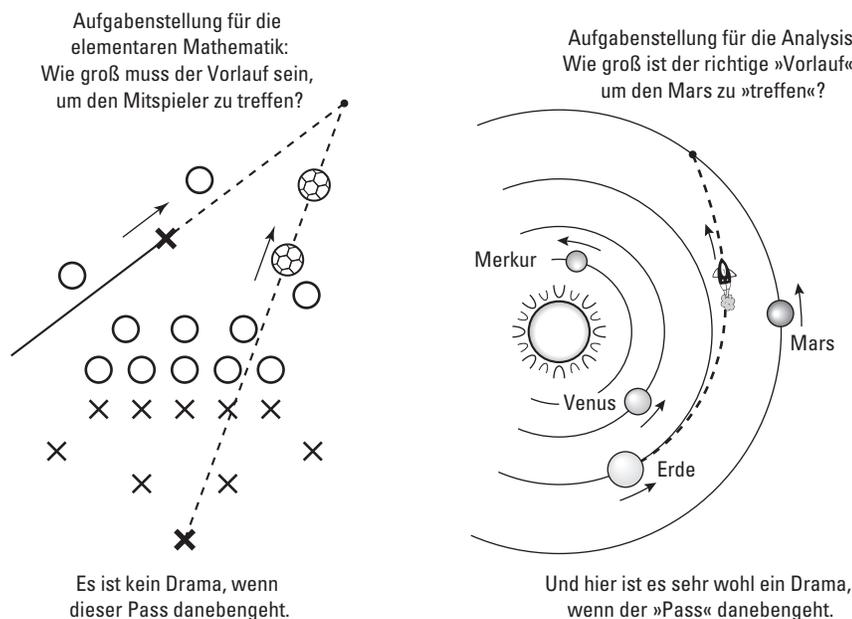


Abbildung 1.5: v. A. und n. A. (vor Analysis und nach Analysis)

