



# Auf einen Blick

<b>Über den Autor</b> .....	<b>11</b>
<b>Einführung</b> .....	<b>23</b>
<b>Teil I: Analysis – ein Überblick</b> .....	<b>29</b>
<b>Kapitel 1:</b> Was ist Analysis? .....	31
<b>Kapitel 2:</b> Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis: Differenziation und Integration .....	37
<b>Kapitel 3:</b> Warum die Analysis funktioniert .....	45
<b>Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis</b> .....	<b>51</b>
<b>Kapitel 4:</b> Überblick über Vor-Algebra und Algebra .....	53
<b>Kapitel 5:</b> Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen .....	73
<b>Kapitel 6:</b> Trigonometrie ist Trumpf! .....	93
<b>Teil III: Grenzwerte</b> .....	<b>109</b>
<b>Kapitel 7:</b> Grenzwerte und Stetigkeit .....	111
<b>Kapitel 8:</b> Grenzwerte auswerten .....	129
<b>Teil IV: Differenziation</b> .....	<b>147</b>
<b>Kapitel 9:</b> Differenziation – Orientierung .....	149
<b>Kapitel 10:</b> Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein! .....	171
<b>Kapitel 11:</b> Differenziation und die Form von Kurven .....	193
<b>Kapitel 12:</b> Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank! .....	223
<b>Teil V: Integration und unendliche Reihen</b> .....	<b>261</b>
<b>Kapitel 13:</b> Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg .....	263
<b>Kapitel 14:</b> Integration: Die Rückwärtsdifferenziation .....	291
<b>Kapitel 15:</b> Integrationstechniken für Profis .....	321
<b>Kapitel 16:</b> Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen .....	349
<b>Kapitel 17:</b> Unendliche Reihen .....	379
<b>Teil VI: Der Top-Ten-Teil</b> .....	<b>407</b>
<b>Kapitel 18:</b> Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten .....	409
<b>Kapitel 19:</b> Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten .....	413
<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	<b>419</b>







# Inhaltsverzeichnis

<b>Über den Autor .....</b>	<b>11</b>
<b>Einführung .....</b>	<b>23</b>
Über dieses Buch .....	23
Konventionen in diesem Buch .....	24
Wie Sie dieses Buch einsetzen .....	24
Törichte Annahmen über den Leser .....	25
Wie dieses Buch aufgebaut ist .....	25
Teil I: Analysis – ein Überblick .....	25
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis .....	25
Teil III: Grenzwerte .....	26
Teil IV: Differenziation .....	26
Teil V: Integration und unendliche Reihen .....	26
Teil VI: Der Top-Ten-Teil .....	27
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden .....	27
Wie es weitergeht .....	27
<b>TEIL I</b>	
<b>ANALYSIS – EIN ÜBERBLICK .....</b>	<b>29</b>
<b>Kapitel 1</b>	
<b>Was ist Analysis? .....</b>	<b>31</b>
Was Analysis nicht ist .....	31
Was also ist Analysis? .....	32
Beispiele für die Analysis aus der Praxis .....	34
<b>Kapitel 2</b>	
<b>Die beiden wichtigsten Konzepte der Analysis:</b>	
<b>Differenziation und Integration .....</b>	<b>37</b>
Differenziation – Definition .....	37
Die Ableitung ist eine Steigung .....	37
Die Ableitung ist eine Änderungsrate .....	39
Und jetzt zur Integration .....	40
Unendliche Reihen .....	41
Divergierende Reihen .....	42
Konvergierende Reihen .....	42
<b>Kapitel 3</b>	
<b>Warum die Analysis funktioniert .....</b>	<b>45</b>
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop .....	45
Was passiert beim Vergrößern? .....	46
Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht .....	49
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zu betreiben .....	49
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« eigentlich? .....	49





## 16 Inhaltsverzeichnis

<b>TEIL II</b>	
<b>DIE VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE ANALYSIS.....</b>	<b>51</b>
<b>Kapitel 4</b>	
<b>Überblick über Vor-Algebra und Algebra.....</b>	<b>53</b>
Was Sie über Brüche wissen sollten.....	53
Ein paar schnelle Regeln.....	54
Brüche multiplizieren.....	54
Brüche dividieren.....	54
Brüche addieren.....	55
Brüche subtrahieren.....	58
Brüche kürzen.....	58
Betrag (Absolutwert) – absolut einfach.....	60
Potenzen machen stark.....	61
Zu den Wurzeln der Wurzeln.....	62
Wurzeln, überall Wurzeln!.....	62
Wurzeln vereinfachen.....	63
Logarithmen ... wirklich keine Hexerei.....	64
Faktorisieren – wer braucht denn so was?.....	65
Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen.....	65
Die Mustersuche.....	66
Faktorisierung quadratischer Polynome.....	67
Quadratische Gleichungen lösen.....	67
Methode 1: Faktorisieren.....	67
Methode 2: Die <i>abc</i> -Formel oder Mitternachtsformel.....	69
Methode 3: Quadratische Ergänzung.....	70
<b>Kapitel 5</b>	
<b>Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen.....</b>	<b>73</b>
Was ist eine Funktion?.....	73
Die definierende Eigenschaft einer Funktion.....	74
Unabhängige und abhängige Variablen.....	76
Funktionsnotation.....	77
Verkettete Funktionen.....	77
Wie sieht eine Funktion aus?.....	79
Allgemeine Funktionen und ihre Graphen.....	80
Geradeheraus – Geraden in der Ebene.....	80
Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus.....	84
Einige ungerade Funktionen.....	85
Exponentialfunktionen.....	85
Logarithmusfunktionen.....	86
Inverse Funktionen.....	87
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen.....	88
Horizontale Transformationen.....	89
Vertikale Transformationen.....	90





## Inhaltsverzeichnis 17

<b>Kapitel 6</b>	
<b>Trigonometrie ist Trumpf!</b> .....	<b>93</b>
Trigonometrie im Crashkurs .....	93
Zwei spezielle rechtwinklige Dreiecke .....	95
Das 45°-45°-90°-Dreieck .....	95
Das 30°-60°-90°-Dreieck .....	96
Im Einheitskreis gefangen! .....	97
Winkel im Einheitskreis .....	98
Winkel im Bogenmaß messen .....	98
Liebling, ich habe die Hypotenuse geschrumpft! .....	99
Und jetzt das Ganze zusammen .....	100
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen .....	102
Inverse trigonometrische Funktionen .....	104
Identifikation mit trigonometrischen Identitäten .....	107
<b>TEIL III</b>	
<b>GRENZWERTE</b> .....	<b>109</b>
<b>Kapitel 7</b>	
<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b> .....	<b>111</b>
Bis an die Grenzen – NEIN .....	111
Drei Funktionen erklären den Grenzwert .....	112
Einseitige Betrachtungen .....	115
Einseitige und zweiseitige Grenzwerte: Der Teil und das Ganze! .....	116
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten .....	117
Grenzwerte im Unendlichen – haben Sie gute Schuhe an? .....	119
Die Momentangeschwindigkeit berechnen – mithilfe von Grenzwerten ....	119
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen .....	122
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand .....	123
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht .....	124
Drei Bedingungen für die Stetigkeit .....	126
Die 33333-Eselsbrücke für den Grenzwert .....	126
<b>Kapitel 8</b>	
<b>Grenzwerte auswerten</b> .....	<b>129</b>
Einfache Grenzwerte .....	129
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten .....	129
Grenzwerte geometrisch bestimmen .....	130
Einsetzen und Einkochen .....	131
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwerten .....	132
Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen .....	132
Grenzwertaufgaben algebraisch lösen .....	134
Guten Appetit – mit einem Grenzwertsandwich .....	137
Grenzwerte bei unendlich auswerten .....	141
Grenzwerte im Unendlichen und horizontale Asymptoten .....	143
Grenzwerte im Unendlichen mit einem Taschenrechner lösen .....	144
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden .....	145





## 18 Inhaltsverzeichnis

<b>TEIL IV</b>	
<b>DIFFERENZIALION</b> .....	<b>147</b>
<b>Kapitel 9</b>	
<b>Differenziation – Orientierung</b> .....	<b>149</b>
Differenziation: Such die Steigung! .....	150
Die Steigung einer Geraden .....	153
Die Ableitung einer Geraden .....	155
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate .....	155
Analysis auf dem Spielplatz .....	155
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate .....	157
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung .....	158
Die Ableitung einer Kurve .....	158
Der Differenzenquotient .....	160
Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate .....	167
Sein oder Nichtsein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert .....	168
<b>Kapitel 10</b>	
<b>Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!...</b> .....	<b>171</b>
Grundlegende Regeln der Differenziation .....	172
Die Konstantenregel .....	172
Die Potenzregel .....	172
Die Faktorregel .....	174
Die Summenregel – die kennen Sie schon .....	175
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied .....	175
Trigonometrische Funktionen differenzieren .....	176
Exponential- und Logarithmusfunktionen differenzieren .....	176
Differenziationsregeln für Profis – Wir sind die Champions! .....	178
Die Produktregel .....	178
Die Quotientenregel .....	179
Die Kettenregel .....	181
Implizite Differenziation .....	186
Logarithmische Differenziation – der Rhythmus macht's .....	188
Inverse Funktionen differenzieren .....	189
Ableitungen höherer Ordnung – die Leiter hinabsteigen .....	191
<b>Kapitel 11</b>	
<b>Differenziation und die Form von Kurven</b> .....	<b>193</b>
Ein Ausflug mit der Analysisgruppe .....	193
Über die Berge und durch die Täler: Positive und negative Steigungen .....	194
Mir fällt einfach keine Reisetapher für diesen Abschnitt ein:	
Krümmung und Wendepunkte .....	195
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum .....	196
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum .....	196
Autopanne: Auf dem Gipfel hängen geblieben .....	196
Von nun an geht's bergab! .....	196
Ihr Reisetagebuch .....	197



## Inhaltsverzeichnis 19

Extremwerte finden.....	198
Die kritischen Stellen herausleiern.....	198
Der Test der ersten Ableitung.....	200
Der Test der zweiten Ableitung – Tests, Tests, Tests!.....	202
Absolute Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden.....	205
Und wenn der Definitionsbereich kein abgeschlossenes Intervall ist?.....	208
Krümmung und Wendepunkte bestimmen.....	210
Die Graphen von Ableitungen – bis zum Abwinken.....	212
Der Mittelwertsatz – es bleibt einem nichts erspart!.....	215
Die Regel von L'Hôpital: Analysis für den Notfall.....	218
Nicht akzeptable Formen in Form bringen.....	219
Drei weitere nicht akzeptable Formen.....	220

### Kapitel 12

#### **Problemlos glücklich: Der Differenziation sei Dank!..... 223**

Wie Sie das meiste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme.....	223
Das maximale Volumen einer Schachtel.....	224
Die maximale Fläche eines Weidezauns berechnen – Cowboys unter sich!.....	226
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung.....	229
Geschwindigkeit und Tempo.....	231
Maximale und minimale Höhe.....	232
Positionsänderung, zurückgelegter Weg und Abstand.....	233
Gummigeruch und Brems Spuren: Beschleunigung und Abbremsen.....	235
Und jetzt alles zusammen.....	236
Voneinander abhängige Änderungsraten.....	237
Einen Ballon aufblasen.....	237
Einen Trog auffüllen.....	240
Schnallen Sie sich an: Wir nähern uns einer Analysiskreuzung.....	242
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben.....	245
Die Aufgabenstellung mit der Tangente.....	245
Und jetzt zur Normale.....	247
Leichtes Spiel mit linearen Näherungen.....	250
Aufgabenstellungen aus der Geschäftswelt und aus der Wirtschaft.....	253
Verwaltung von Grenzkosten in der Wirtschaft.....	253

### TEIL V

#### **INTEGRATION UND UNENDLICHE REIHEN..... 261**

### Kapitel 13

#### **Integration und Flächenberechnung – ein Einstieg..... 263**

Integration: Einfach eine seltsame Addition.....	263
Die Fläche unter einer Kurve bestimmen.....	266
Der Umgang mit negativen Flächen.....	269



## 20 Inhaltsverzeichnis

Flächen annähern .....	270
Flächen mithilfe linker Summen annähern .....	270
Flächen mithilfe rechter Summen annähern .....	273
Flächen mit Mittelpunktsummen annähern .....	275
Die Summennotation .....	277
Die Grundlagen summieren .....	278
Riemann-Summen in Sigma-Notation .....	278
Flächeninhalte mithilfe des bestimmten Integrals exakt bestimmen .....	282
Flächen annähern mit der Trapezregel und der Simpson-Regel .....	286
Die Trapezregel .....	287
Die Simpson-Regel – Thomas (1710–1761), nicht Homer (1987–) .....	289

### Kapitel 14

#### Integration: Die Rückwärtsdifferenziation ..... 291

Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differenziation .....	291
Das Vokabular: Welchen Unterschied macht es? .....	293
Die müßige Flächenfunktion .....	294
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung .....	297
Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Teil 2 .....	301
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 1 .....	304
Warum der Hauptsatz funktioniert: Flächenfunktionen, Erklärung 2 .....	306
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen	
Integration und Differenziation .....	307
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken .....	309
Umkehrregeln für Stammfunktionen .....	309
Raten und Prüfen .....	312
Die Substitutionsmethode .....	313
Flächen mithilfe der Substitutionsmethode bestimmen .....	318

### Kapitel 15

#### Integrationstechniken für Profis ..... 321

Teilweise (partielle) Integration: Teile und Herrsche! .....	321
Das $u$ auswählen .....	325
Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal .....	327
Alles im Kreis! .....	328
Tricks mit Trig-Integralen .....	330
Integrale mit Sinus und Kosinus .....	331
Integrale mit Sekans und Tangens .....	334
Integrale mit Kosekans und Kotangens .....	337
Ihr schlimmster Albtraum: Trigonometrische Substitution .....	337
1. Fall: Tangens .....	338
2. Fall: Sinus .....	341
3. Fall: Sekans .....	342
$A$ , $B$ und $C$ in Teilbrüchen (Partialbrüchen) .....	343
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren .....	344
2. Fall: Der Nenner enthält quadratische Faktoren ohne Nullstellen .....	345





## Inhaltsverzeichnis 21

3. Fall: Der Nenner enthält mehrere gleiche lineare oder quadratische Faktoren.....	347
Bonusrunde: Koeffizientenvergleich .....	347

### Kapitel 16

#### Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte

<b>Probleme lösen .....</b>	<b>349</b>
Der Mittelwertsatz der Integralrechnung und der Durchschnittswert.....	350
Die Fläche zwischen zwei Kurven – der doppelte Spaß.....	353
Die Volumen unregelmäßiger Körper ermitteln .....	357
Die Wurstscheibenmethode.....	357
Die Pfannkuchenstapelmethode.....	359
Die Stapel-Donuts-auf-den-sich-jemand-gesetzt-hat-Methode.....	360
Die Methode mit den Matroschkas.....	362
Bogenlängen analysieren.....	365
Drehoberflächen – entstehen durch Drehen! .....	367
Uneigentliche Integrale – am Verlauf zu erkennen .....	370
Vertikale Asymptoten.....	371
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei Integrationsgrenzen im Unendlichen.....	373
Und jetzt zu Gabriels Horn.....	375

### Kapitel 17

<b>Unendliche Reihen .....</b>	<b>379</b>
Folgen und Reihen: Worum es eigentlich geht.....	380
Folgen aneinanderreihen.....	380
Reihen summieren.....	382
Konvergenz oder Divergenz? Das ist hier die Frage!.....	385
Der einfachste Test auf Divergenz: Die Prüfung auf den $n$ -ten Term.....	385
Drei grundlegende Reihen und die zugehörigen Prüfungen auf Konvergenz/Divergenz.....	387
Drei Vergleichstests für Konvergenz/Divergenz .....	390
Tests auf Quotienten und Wurzeln.....	396
Alternierende Reihen.....	399
Absolute oder bedingte Konvergenz bestimmen.....	399
Der Test mit den alternierenden Reihen .....	400
Nehmen Sie die Tests leicht.....	405

### TEIL VI

#### DER TOP-TEN-TEIL .....

**407**

### Kapitel 18

<b>Zehn Dinge, die Sie sich unbedingt merken sollten.....</b>	<b>409</b>
Die drei binomischen Formeln.....	409
$\frac{0}{5} = 0$ , aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert.....	409
$0/0$ ist nicht definiert .....	410



## 22 Inhaltsverzeichnis

$0 \cdot \infty$ ist nicht definiert.....	410
Irgendetwas <sup>0</sup> = 1 .....	410
Die GAGA-HühnerHof-AG.....	410
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel.....	411
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .....	411
Die Produktregel.....	411
Die Quotientenregel.....	411

### Kapitel 19

#### Noch zehn Dinge, die Sie nicht vergessen sollten ..... 413

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ - falsch!.....	413
$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ - falsch!.....	413
Steigung einer Geraden = $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ - falsch!.....	413
$\frac{3a + b}{3a + c} = \frac{b}{c}$ - falsch!.....	414
$e^{a+b} = e^a + e^b$ und $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ - falsch!.....	414
$\frac{d}{da}x^3 = 3x^2$ - falsch!.....	414
Wenn $k$ eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx}kx = k'x + kx'$ - na ja ...	414
Die Quotientenregel ist $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v'u - vu'}{v^2}$ - falsch!.....	415
$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ - falsch!.....	415
$\int (\sin x) dx = \cos x + C$ - falsch!.....	415

#### Stichwortverzeichnis ..... 419

