IN DIESEM KAPITEL

Über die Notwendigkeit von Mathematik

Die erste mathematische Schrift

Das deduktive System

Kapitel 1
Die Entstehung der Mathematik

Zum Einstieg möchte ich Ihnen einen ganz kurzen Einblick in die Mathematikgeschichte geben. Die Inhalte dieses Kapitels sind nicht prüfungsrelevant und dienen Ihnen als Hintergrundinformation. Ich persönlich fand es sehr interessant, etwas über die Ursprünge und die geschichtliche Entwicklung der Mathematik zu erfahren. Sollten Sie kein Interesse an diesen zusätzlichen Informationen haben, können Sie dieses Kapitel einfach überspringen.

Die Anfänge der Mathematik: Das Zählen

Bereits viele Jahre vor Christus erkannten die Menschen, dass es vorteilhaft ist, Dinge zu zählen und die Anzahl in irgendeiner Form zu dokumentieren. Zunächst wurde die Anzahl mehrerer Objekte mithilfe der Finger an der Hand gezählt. Da die menschliche Hand jedoch nur zehn Finger aufweist, bestand die Notwendigkeit für eine Möglichkeit, größere Anzahlen zu zählen. Dazu wurden unter anderem Steine verwendet, wobei für jedes gezählte Objekt ein weiterer Stein auf eine Stelle gelegt wurde. Immer wenn zehn Steine vorhanden waren, wurden diese durch einen größeren Stein ersetzt, wodurch beliebig große Anzahlen gezählt werden konnten. Zudem wurde mit mehreren Personen gezählt, wobei jeder weitere Helfer die Funktion der nächstgrößeren Steine mit seinen Fingern übernahm. Auf dieser Art und Weise zu zählen basiert das heute noch verwendete Zehnersystem der Zahlen. Die Grundlage dafür sind also die zehn Finger an der Hand des Menschen. Für dieses Zählsystem gibt es allerdings kaum Beweise, weshalb es häufig als Spekulation angesehen wird.

Als das älteste mathematische Artefakt, das die Anfänge des Zählens dokumentiert, wird der sogenannte Ishango-Knochen angesehen. Der Ishango-Knochen wurde 1935 gefunden und ist nach seinem Fundort Ishango benannt, der nahe der kongolesisch-ugandischen Grenze am Nordwestufer des Eduardsees liegt. Das Alter des Knochens wird auf zirka 20.000 Jahre geschätzt. Der Knochen ist in etwa zehn Zentimeter lang und besitzt mehrere Einkerbungen, die vermutlich mit einem Quarzstein, der an dem Knochen angebracht wurde, eingeritzt wurden. Man geht davon aus, dass die Einkerbungen die Dokumentation einer Zählung sind.

Viele Jahre Später im alten Ägypten wurden Hieroglyphen genutzt und in Stein gemeißelt, um Zahlen und Worte zu dokumentieren. Die alten Ägypter nutzten ebenfalls das Zehnersystem. So diente ein Strich für eine Eins, ein Bogen für eine Zehn, ein Strick für eine 100 und so weiter. Die ursprünglich verwendeten Hieroglyphen sind in Abbildung 1.1 zu sehen. Da sie ebenfalls das 10er-System verwendeten, war es sehr aufwendig, große Zahlen zu notieren. So bestand die Zahl 1.333.330 aus den Hieroglyphen, die in Abbildung 1.1 unten zu sehen sind. Um diese Zahl zu dokumentieren, wurden alle Hieroglyphen in Stein gemeißelt.

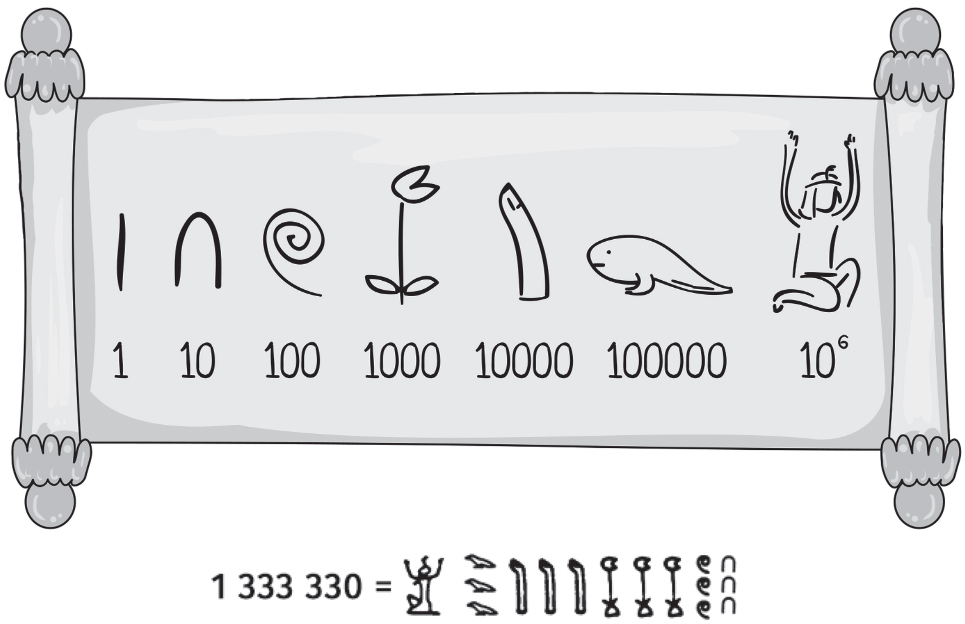

Abbildung 1.1: Hieroglyphen © BNP Design Studio – `stock.adobe.com`

Die erste mathematische Schrift

Die erste bekannte mathematische Schrift ist das sogenannte »Papyrus Rhind«, das im 16. Jahrhundert vor Christus im alten Ägypten entstanden sein soll. Auf dem Papyrus Rhind wurden konkrete Rechnungen und Lösungen von mathematischen Problemen auf Papyrus (einer Art Papier, das aus den Blättern von der schilfähnlichen Papyruspflanze hergestellt wurde) dokumentiert. So zeigt es beispielsweise die Berechnung von Dreiecken und die Lösungen linearer Gleichungen. Allerdings zeigt es lediglich angewandte Rechnungen mit Zahlen und keine allgemeingültigen Formeln oder Beweise. Es wird angenommen, dass diese Zusammenhänge erkannt und angewendet wurden, ohne sie zuvor zu beweisen.

Das deduktive System

Etwa 300 Jahre vor Christus entwickelten die alten Griechen das deduktive System, das logische Schlussweisen, basierend auf einem Axiomensystem, ermöglicht. Mathematische Axiome sind mathematische Grundsätze, die als wahr angenommen werden. Basierend auf diesen Voraussetzungen können weitere Aussagen bewiesen werden. Dies wird am Beispiel der »Peano-Axiome der natürlichen Zahlen« verdeutlicht.

Die natürlichen Zahlen sind alle ganzen positiven Zahlen, die man ganz einfach mit den Fingern zählen kann. Da sie allerdings unendlich viele Zahlen beinhalten, kann man sie niemals alle aufzählen oder aufschreiben. Wie kann man dennoch alle unendlich vielen Zahlen exakt und eindeutig beschreiben und darstellen? Dies ermöglicht ein Axiomensystem, das den Zusammenhang beziehungsweise die Beziehung zwischen den einzelnen Elementen (den Zahlen) erklärt. Das Axiomensystem ist nach dem Entwickler Peano benannt und heißt »Peano-Axiome der natürlichen Zahlen«. Dieses Axiomensystem ist sehr abstrakt und mit Sicherheit nicht einfach verständlich. Dennoch möchte ich es als Beispiel aufzeigen, um Ihnen einen Eindruck zu vermitteln, auf welcher Basis reine Mathematik funktioniert.

Beispiel 1

Als Beispiel dienen die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen. Um einen Eindruck davon zu bekommen, was dieses abstrakte Konstrukt beschreibt, erläutere ich zunächst die Aussagen der einzelnen Axiome in Worten:

1. Die 1 ist eine natürliche Zahl.

2. Für jede natürliche Zahl n existiert ein Nachfolger n', welcher ebenfalls eine natürlich Zahl ist. Zum Beispiel ist die Zahl 3 der Nachfolger der Zahl 2 oder die Zahl 1245 der Nachfolger der Zahl 1244 und so weiter.

3. Die 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl. Somit ist sie die erste natürliche Zahl.

4. Natürliche Zahlen mit dem gleichen Nachfolger sind gleich. Dies zeigt die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen.

5. Wenn eine beliebige Menge X die Zahl 1 und alle Nachfolger enthält, so sind die natürlichen Zahlen eine Teilmenge dieser Menge X. Zum Beispiel enthalten die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sowohl die 1 als auch alle Nachfolger aus den natürlichen Zahlen und somit sind die natürlichen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen und es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

In Form von mathematischen Formeln lauten die Axiome:

1. $1 \in \mathbb{N}$

2. Für alle n gilt: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$

3. Für alle n gilt: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1$

4. Für alle n, m gilt: $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \rightarrow m = n)$

5. Für jede Menge X gilt: $1 \in X$ und wenn $n \in X \Rightarrow n' \in X \Rightarrow \mathbb{N} \subset X$

Auf Basis dieser Axiome lassen sich mittels verschiedener Beweisverfahren weitere mathematische Aussagen und Formeln beweisen. Mit diesen lassen sich dann weitere Aussagen beweisen, die sich die zuerst bewiesene Aussage zunutze machen und diese wieder aufgreifen. Somit entsteht eine Art Schneeballsystem mathematischer Aussagen, in dem zuvor bewiesene Aussagen aufgegriffen und weiterentwickelt werden, wodurch unzählige Aussagen und Zusammenhänge allgemeingültig bewiesen werden können. Durch dieses System kann sichergestellt werden, dass die Aussagen in allen Fällen (also immer dann, wenn die Voraussetzungen erfüllt sind) wahr sind und keine Fehler bei der Anwendung entstehen. Die Allgemeingültigkeit nachzuweisen, ist von zentralem Interesse, da es nicht möglich ist, alle Fälle, also die Aussagen für alle möglichen Zahlen, nachzurechnen (da es ja unendlich viele Zahlen gibt).

Wenn dieser ganz kurze Einblick in die Geschichte der Mathematik Ihr Interesse geweckt haben sollte, möchte ich Ihnen zwei etwas ausführlichere Beiträge zu diesem Thema empfehlen:

- ✔ Die Dokumentation »Geschichte der Mathematik« von BBC. Die Dokumentation besteht aus vier Teilen und ist kostenfrei auf DAILYMOTION zu finden.
- ✔ Die Vorlesungen »Geschichte der Mathematik« von Andreas Vohns, die kostenfrei auf YouTube zu finden sind.