



Auf einen Blick

Einführung	19
Teil I: Analysis – ein Überblick	25
Kapitel 1: Was ist Analysis?.....	27
Kapitel 2: Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis: Differenziation und Integration.....	33
Kapitel 3: Warum die Analysis funktioniert.....	39
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis	45
Kapitel 4: Überblick über Vor-Algebra und Algebra.....	47
Kapitel 5: Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen.....	63
Kapitel 6: Trigonometrie ist Trumpf!.....	81
Teil III: Grenzwerte	85
Kapitel 7: Grenzwerte und Stetigkeit.....	87
Kapitel 8: Grenzwerte auswerten.....	97
Teil IV: Differenziation	107
Kapitel 9: Differenziation – Orientierung.....	109
Kapitel 10: Regeln für die Differenziation – was sein muss, muss sein!.....	127
Kapitel 11: Differenziation und die Form von Kurven.....	137
Kapitel 12: Wunschlos glücklich: Der Differenziation sei Dank!.....	157
Teil V: Integration	177
Kapitel 13: Integration und Flächenannäherung – ein Einstieg.....	179
Kapitel 14: Integration: Differenziation rückwärts.....	195
Kapitel 15: Integrationstechniken für Profis.....	219
Kapitel 16: Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte Probleme lösen.....	233
Teil VI: Der Top-Ten-Teil	253
Kapitel 17: Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten.....	255
Kapitel 18: Zehn Dinge, die Sie vergessen können.....	257
Anhang: Lösungen	259
Abbildungsverzeichnis	279
Stichwortverzeichnis	283



Inhaltsverzeichnis

Einführung	19
Über dieses Buch.....	19
Konventionen in diesem Buch.....	20
Was Sie nicht lesen müssen.....	20
Törichte Annahmen über die Leser.....	20
Wie dieses Buch aufgebaut ist.....	21
Teil I: Analysis – ein Überblick.....	21
Teil II: Die Voraussetzungen für die Analysis.....	21
Teil III: Grenzwerte.....	21
Teil IV: Differenziation.....	22
Teil V: Integration.....	22
Teil VI: Der Top-Ten-Teil.....	22
Symbole, die in diesem Buch verwendet werden.....	22
Wie es weitergeht.....	23
TEIL I	
ANALYSIS – EIN ÜBERBLICK	25
Kapitel 1	
Was ist Analysis?	27
Was Analysis nicht ist.....	27
Was also ist Analysis?.....	28
Beispiele aus der Praxis.....	30
Aufgaben.....	31
Kapitel 2	
Die beiden wichtigen Konzepte der Analysis:	
Differenziation und Integration	33
Differenziation – Definition.....	33
Die Ableitung ist eine Steigung.....	33
Die Ableitung ist eine Änderungsrate.....	35
Und jetzt zur Integration.....	36
Aufgaben.....	38
Kapitel 3	
Warum die Analysis funktioniert	39
Das Grenzwertkonzept: Ein mathematisches Mikroskop.....	39
Was passiert beim Vergrößern?.....	40

12 Inhaltsverzeichnis

Zwei Warnungen – nur zur Vorsicht	43
Ich könnte meine Lizenz verlieren, Mathematik zub betreiben	43
Und was um alles in der Welt bedeutet »unendlich« überhaupt?.....	43
Aufgaben.....	44

TEIL II DIE VORAUSSETZUNGEN FÜR DIE ANALYSIS 45

Kapitel 4 Überblick über Vor-Algebra und Algebra 47

Was Sie über Brüche wissen sollten.....	47
Ein paar schnelle Regeln.....	48
Brüche multiplizieren.....	48
Brüche dividieren.....	49
Brüche addieren.....	49
Brüche subtrahieren.....	51
Brüche kürzen.....	51
Betrag – absolut einfach.....	53
Potenzen machen stark.....	53
Zu den Wurzeln... ..	55
Wurzeln, Wurzeln überall!	55
Logarithmen... wirklich keine Hexerei.....	56
Faktorisieren – das wollte ich schon immer!.....	57
Den größten gemeinsamen Teiler herausziehen.....	57
Quadratische Gleichungen lösen.....	58
Methode 1: Faktorisieren.....	58
Methode 2: Die <i>abc</i> -Formel.....	59
Methode 3: Quadratische Ergänzung.....	60
Aufgaben.....	61

Kapitel 5 Verrückte Funktionen und ihre wunderbaren Graphen..... 63

Was ist eine Funktion?.....	63
Die definierende Eigenschaft einer Funktion.....	64
Unabhängige und abhängige Variablen.....	65
Funktionsnotation.....	65
Zusammengesetzte Funktionen.....	66
Wie sieht eine Funktion aus?.....	67
Allgemeine Funktionen und ihre Graphen.....	68
Geradeheraus – Geraden in der Ebene.....	68

Inhaltsverzeichnis 13

Parabel- und Betragsfunktionen – gerade heraus	72
Einige ungerade Funktionen	73
Exponentialfunktionen	73
Logarithmische Funktionen	74
Inverse Funktionen	74
Schieben, spiegeln, dehnen, stauchen	76
Horizontale Transformationen	76
Vertikale Transformationen	78
Aufgaben	78

Kapitel 6

Trigonometrie ist Trumpf!	81
Trigonometrie im Crashkurs	81
Sinus, Kosinus und Tangens zeichnen	82
Inverse trigonometrische Funktionen	83
Aufgaben	84

TEIL III

GRENZWERTE	85
-------------------------	-----------

Kapitel 7

Grenzwerte und Stetigkeit	87
Bis an die Grenzen	87
Drei Funktionen erklären den Grenzwert	88
Jetzt wird es etwas einseitig	90
Die formale Definition eines Grenzwerts – wie erwartet!	91
Unendliche Grenzwerte und vertikale Asymptoten	91
Grenzwerte am Rand der Unendlichkeit – haben Sie gute Schuhe an?	92
Grenzwerte und Stetigkeit verknüpfen	93
Stetigkeit und Grenzwerte gehen normalerweise Hand in Hand	94
Die Ausnahme für ein Loch bringt die Wahrheit ans Licht	94
Die Mathematik der Stetigkeit	95
Aufgaben	96

Kapitel 8

Grenzwerte auswerten	97
Einfache Grenzwerte	97
Grenzwerte, die Sie sich merken sollten	97
Einsetzen und Auskochen	98
Die »echten« Aufgabenstellungen mit Grenzwert	98

14 Inhaltsverzeichnis

Einen Grenzwert mit dem Taschenrechner bestimmen.....	99
Aufgabenstellungen mit Grenzwert algebraisch lösen.....	100
Faktorisieren aus Leidenschaft.....	100
Grenzwerte bei unendlich auswerten.....	102
Grenzwerte bei unendlich und horizontale Asymptoten.....	103
Algebra für Grenzwerte bei unendlich verwenden.....	104
Aufgaben.....	105

TEIL IV**DIFFERENZIALION..... 107****Kapitel 9****Differenzialion – Orientierung..... 109**

Differenzialion: Sucht die Steigung!.....	109
Die Steigung einer Geraden.....	111
Die Ableitung einer Geraden.....	113
Die Ableitung: Einfach eine Änderungsrate.....	113
Geschwindigkeit – die uns vertrauteste Änderungsrate.....	113
Die Beziehung zwischen Änderungsrate und Steigung.....	114
Die Ableitung einer Kurve.....	115
Der Differenzenquotient.....	117
Durchschnittliche Änderungsrate und momentane Änderungsrate.....	123
Sein oder nicht sein? Drei Fälle, in denen die Ableitung nicht existiert.....	124
Aufgaben.....	125

Kapitel 10**Regeln für die Differenzialion – was sein****muss, muss sein!..... 127**

Grundlegende Regeln der Differenzialion.....	127
Die Konstantenregel.....	128
Die Potenzregel.....	128
Die Regeln zu dem Vielfachen von Konstanten.....	129
Die Summenregel – die kennen Sie schon.....	130
Die Differenzregel – macht kaum einen Unterschied.....	130
Trigonometrische Funktionen differenzialion.....	130
Exponentielle und logarithmische Funktionen differenzialion.....	130
Differenzialionsregeln für Profis – Wir sind die Champs!.....	132
Die Produktregel.....	132
Die Quotientenregel.....	132
Die Kettenregel: implizite Differenzialion.....	133
Aufgaben.....	136

Kapitel 11

Differenziation und die Form von Kurven 137

Ein Ausflug mit der Analysisgruppe.....	137
Über Berge und durch Täler: Positive und negative Steigungen.....	137
Krümmung und Wendepunkte.....	138
Das Tal der Tränen: Ein lokales Minimum.....	139
Ein atemberaubender Ausblick: Das absolute Maximum.....	139
Autopanne: Auf dem Scheitelpunkt hängen geblieben.....	139
Von nun an ging's bergab!.....	140
Ihr Reisetagebuch.....	140
Lokale Extremwerte finden.....	141
Die kritischen Werte herausleiern.....	141
Der Test der ersten Ableitung.....	142
Der Test der zweiten Ableitung – Testen, bis die Ärztin kommt.....	144
Absolute Extremwerte für ein abgeschlossenes Intervall finden.....	145
Die absoluten Extremwerte über den gesamten Definitionsbereich einer Funktion finden.....	147
Krümmung und Wendepunkte bestimmen.....	149
Die Graphen von Ableitungen – Bildschön!.....	152
Aufgaben.....	155

Kapitel 12

Wunschlos glücklich: Der Differenziation

sei Dank!..... 157

Wie Sie das Beste aus Ihrem Leben machen: Optimierungsprobleme.....	157
Das maximale Volumen einer Schachtel.....	158
Husch, husch: Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung.....	160
Maximale und minimale Höhe.....	161
Geschwindigkeit und Abstand.....	163
Gesamte zurückgelegte Distanz.....	164
Gummigeruch und Bremsstreifen: Beschleunigung und Abbremsen.....	165
Und jetzt alles zusammen.....	165
(Relativ) verkettete Änderungsraten.....	166
Einen Trog auffüllen.....	166
Tangenten und Normalen: Auf die Spitze getrieben.....	169

16 Inhaltsverzeichnis

Die Aufgabenstellung mit der Tangente	170
Das Normallinienproblem	171
Aufgaben	174

TEIL V INTEGRATION 177

Kapitel 13 Integration und Flächenannäherung – ein Einstieg 179

Die Fläche unter einer Kurve bestimmen	179
Der Umgang mit negativen Flächen	181
Flächen annähern	182
Flächen mithilfe linker Summen annähern	182
Flächen mithilfe rechter Summen annähern	184
Die Summennotation	186
Die Grundlagen summieren	186
Riemann-Summen in Sigma-Notation	187
Exakte Flächen mithilfe des bestimmten Integrals ermitteln	190
Aufgaben	193

Kapitel 14 Integration: Differenziation rückwärts 195

Stammfunktionen suchen – die umgekehrte Differenziation	195
Wenn es ganz genau zugehen soll	197
Die müßige Flächenfunktion	197
Ruhm und Ehre mit dem Hauptsatz der Analysis	199
Der Hauptsatz der Analysis: Teil 2	204
Warum der Hauptsatz funktioniert: Die Verbindung zwischen Integration und Differenziation	205
Stammfunktionen finden: Drei grundlegende Techniken	209
Umkehrregeln für Stammfunktionen	209
Umkehrregeln für Denkschwache	209
Die etwas schwierigere umgekehrte Potenzregel	210
Raten und Prüfen	211
Die Substitutionsmethode	213
Flächen mithilfe von Substitutionsaufgaben bestimmen	214
Aufgaben	216

Kapitel 15 Integrationstechniken für Profis 219

Partielle (teilweise) Integration: Teile und Herrsche!	219
Das u auswählen	222

**Inhaltsverzeichnis 17**

Partielle Integration: Beim zweiten wie beim ersten Mal	223
A, B und C in Partialbrüchen (Teilbrüchen).....	225
1. Fall: Der Nenner enthält nur lineare Faktoren	226
2. Fall: Der Nenner enthält nicht zu kürzende quadratische Faktoren	227
Bonustrack: Koeffizienten ähnlicher Terme gleichsetzen	229
Aufgaben.....	230

Kapitel 16**Grau ist alle Theorie: Mit Integralen echte****Probleme lösen 233**

Der Mittelwertsatz für Integrale und der Durchschnittswert.....	234
Die Fläche zwischen zwei Kurven – der doppelte Spaß.....	237
Das Volumen eines unregelmäßigen Körpers.....	241
Die Pfannkuchenstapelmethode.....	241
Die Stapel-Donuts-auf-die-sich-jemand-gesetzt- hat-Methode	242
Bogenlängen bestimmen.....	244
Die Regel von L'Hôpital: Analysis nicht nur im Krankenhaus.....	246
Uneigentliche Integrale: Am Verlauf zu erkennen	248
Uneigentliche Integrale mit vertikalen Asymptoten.....	248
Eine vertikale Asymptote an einer der Integrationsgrenzen	248
Uneigentliche Integrale mit einer oder zwei unendlichen Integrationsgrenzen.....	250
Aufgaben.....	252

TEIL VI**DER TOP-TEN-TEIL..... 253****Kapitel 17****Zehn Dinge, die Sie sich merken sollten..... 255**

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	255
$\frac{0}{5} = 0$, aber $\frac{5}{0}$ ist undefiniert. Und $\frac{0}{0}$ erst recht!.....	255
Irgendetwas ⁰ = 1	255
SghCahTga	256
Trigonometrische Werte für 30-, 45- und 60-Grad-Winkel.....	256
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	256
Die Produktregel.....	256
Die Quotientenregel.....	256
$\frac{d}{dx} e^x = e^x$; $\int e^x dx = e^x + C$	256
Wo Sie Ihre Schlüssel hingelegt haben	256

18 Inhaltsverzeichnis

Kapitel 18**Zehn Dinge, die Sie vergessen können..... 257** $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ – Falsch!..... 257 $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ – Falsch!..... 257Die Steigung ist $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ – Falsch!..... 257 $\frac{3a+b}{3a+c} = \frac{b}{c}$ – Falsch!..... 257 $\frac{d}{dx} \pi^3 = 3\pi^2$ – Falsch!..... 258Wenn k eine Konstante ist, dann ist $\frac{d}{dx} kx = k'x + kx'$ – Falsch!..... 258Quotientenregel: $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{v'u - uv'v}{v^2}$ – Falsch!..... 258 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ – Falsch!..... 258 $\int (\sin x) dx = \cos x + C$ – Falsch!..... 258

Den Satz von Green. Schon richtig, aber... .. 258

Anhang: Lösungen..... 259

Kapitel 1..... 259

Kapitel 2..... 259

Kapitel 3..... 260

Kapitel 4..... 262

Kapitel 5..... 263

Kapitel 6..... 264

Kapitel 7..... 264

Kapitel 8..... 265

Kapitel 9..... 266

Kapitel 10..... 267

Kapitel 11..... 268

Kapitel 12..... 269

Kapitel 13..... 270

Kapitel 14..... 272

Kapitel 15..... 273

Kapitel 16..... 275

Abbildungsverzeichnis..... 279**Stichwortverzeichnis..... 283**