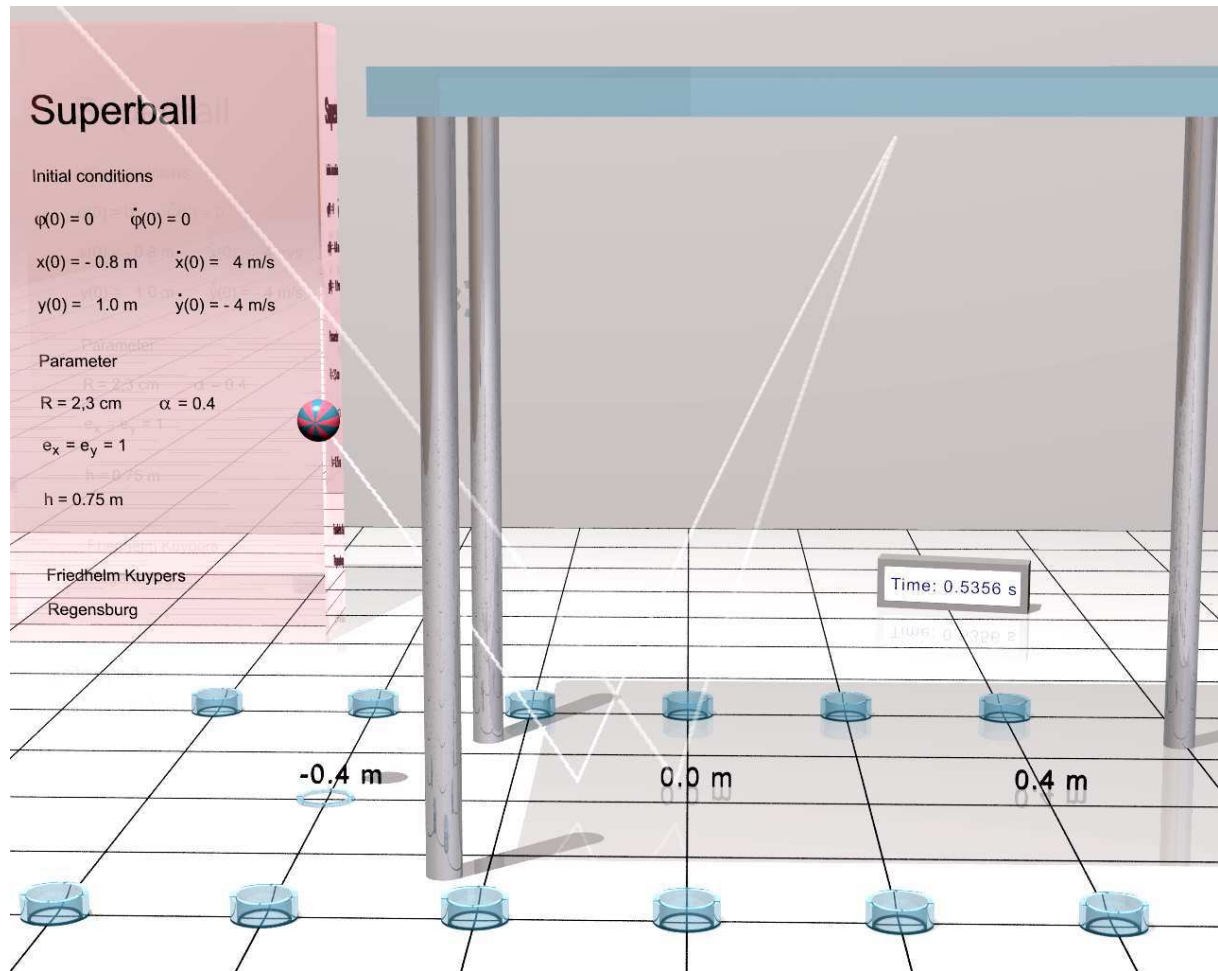
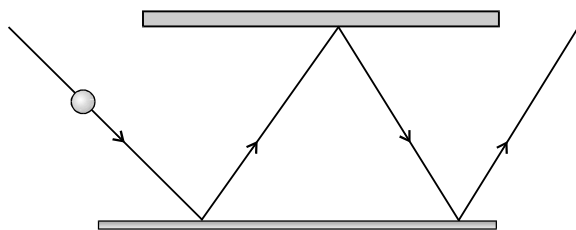


# Superball

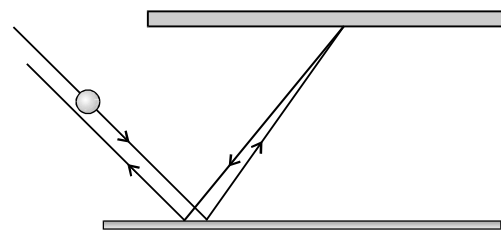


**Abb. 1** Ein unter den Tisch geworfener Superball kehrt nach drei Stößen zum Werfer zurück.

Ein Superball – in vielen Spielzeuggeschäften auch „Trickball“ genannt – ist ein Gummiball, der auf harten Oberflächen **nahezu elastische Stöße** macht. Er kostet etwa ein Euro.



**Abb. 2a** Ein normaler Ball, der unter einen Tisch geworfen wird, kommt am anderen Ende wieder unter dem Tisch hervor.



**Abb. 2b** Ein Superball, der unter einen Tisch geworfen wird, kommt erstaunlicherweise nach drei Stößen zum Werfer zurück.

Der kalifornische Chemiker Norman Stingley erfand den Superball anfangs der 1960-er Jahre zufällig, als er in seiner Freizeit synthetisches Gummimaterial bei  $165^\circ\text{C}$  mit 80 bar komprimierte. Das Unternehmen Wham-O, das für sportliche Spielzeuge mit Kultstatus – unter anderem die Original Frisbee-Wurfscheiben aus Plastik und den Hula-Hoop-Reifen – bekannt ist, brachte den Ball nach einigen Verbesserungen 1965 auf den Markt und verkaufte über 20 Millionen Exemplare. Der Sicherheitsberater des amerikanischen Präsidenten Lyndon B. Johnson kaufte 5 Duzend Superbälle, um die Mitarbeiter des Weißen Hauses bei Laune zu halten.

Das Unternehmen Wham-O versprach, dass ein aus der Höhe  $h$  herab fallender Superball nach dem Bodenaufschlag auf die Höhe  $0,92 \cdot h$  hochspringt.

Bei einer großen Werbeveranstaltung wurde ein Superball von der Größe eines Bowlingballes ( $d = 21,8\text{ cm}$ ) aus einem Fenster im 23. Stockwerk eines australischen Hotels geworfen. Der Ball fiel herunter, sprang bis zum 15. Stock hoch und stürzte dann auf ein geparktes Auto, das einen Totalschaden erlitt. Laut Bericht überlebte der Ball selber den „test in perfect condition“.

Kraftvolle Spieler können den Ball aus dem Stand so hart auf die Straße werfen, dass er anschließend über ein dreistöckiges Haus fliegt. Anhaltspunkt: Beim Handball sind Wurfgeschwindigkeiten über 30 m/s möglich.

Lamar Hunt, einer der einflussreichsten amerikanischen Sportpersönlichkeiten und Gründer der American Football League erfand den Begriff „Super Bowl“ für das Endspiel der American Football-Meisterschaft, als er seinen Sohn mit dem Superball spielen sah.

Später haben andere Firmen Materialien mit ähnlichen Eigenschaften entwickelt.

## Eigenschaften von Superbällen

Superbälle haben erstaunliche Eigenschaften:

- Superbälle springen nach einem Bodenaufprall sehr hoch zurück.
- Ihre Oberfläche sieht glatt aus, hat aber **sehr hohe Gleit- und Haftreibungszahlen**  $f, f_0$ . Daher **rutschen Superbälle nicht**. Aufgrund ihrer Trägheit können sie bei einem schrägen Stoß nicht sofort rollen. Vielmehr verformen sie sich beim Stoß und „kippen nach vorne“, wobei ein unterer Teil des stoßenden Balles in Ruhe ist. Dabei werden **horizontale Vibrationen** des Balles angeregt. (Wir kommen darauf später zurück.)
- Bei Messungen mit Piezosensoren hat man festgestellt, dass die horizontale **Reibungskraft** zwischen dem Ball und dem Untergrund **während des Stoßes das Vorzeichen ändert**. Auch diese Eigenschaft ist auf Vibrationen des Balles in horizontaler Richtung zurückzuführen.
- Superbälle, die unter einen Tisch geworfen werden, **kommen zum Werfer zurück** (siehe Abb. 2b).

## Modellbildung

Wie lassen sich diese Eigenschaften theoretisch erklären?

- Naiverweise betrachtet man einen schräg auf den Boden fallenden Ball als Körper, der nur in vertikaler Richtung verformt wird, der also keine horizontalen Verformungen erleidet und der mit der Gleitreibungskraft  $F_R = f N$  über den Boden rutscht und anschließend –

falls die Kontaktzeit genügend groß ist – ins Rollen übergeht. Mit einem solch einfachen Modell lassen sich aber die Eigenschaften von Superbällen nicht berechnen; so kann z. B. die **Vorzeichenumkehr der horizontalen Reibungskraft** hiermit nicht erfasst werden.

- **Numerische Berechnungen mit der Unterteilung der Kontaktfläche in viele Einzelflächen** und mit der Untersuchung der Verformung am Boden kommen aus zeitlichen Gründen hier nicht in Frage.
- Stöße werden oft mit sog. „**Stoßzahlen**“ beschrieben. Dabei kommen Gleit- und Haftreibungszahl  $f, f_0$  nicht vor.

Wir untersuchen das Verhalten der Superbälle mit Stoßzahlen. Dies ist in der Literatur die gebräuchlichste Methode.

Zur Einführung in die Theorie der Stoßzahl betrachten wir zuerst einen zentralen Stoß zwischen zwei Körpern mit den Massen  $m_1, m_2$  und den Geschwindigkeiten  $v_{1v}, v_{2v}$  vor dem Stoß und den Geschwindigkeiten  $v_{1n}, v_{2n}$  nach dem Stoß. Dann wird die Stoßzahl  $e$  definiert als der Quotient aus den Geschwindigkeitsdifferenzen nach und vor dem Stoß – multipliziert mit minus Eins:

$$e := - \frac{v_{1n} - v_{2n}}{v_{1v} - v_{2v}} \quad (1)$$

	Masse $m$	Radius $R$	$\alpha$	Vertikale Stoßzahl $e_y$	Horizontale Stoßzahl $e_x$	Abstand $D$
<b>Superball</b> bei $\vartheta_v = 36^\circ$	46,4 g	23 mm	0,40	$e_y \approx 0,9$	$e_x \approx 0,5$	0,1 mm
Tennisball bei $\vartheta_v = 24^\circ$ rauer Boden	57,4 g	33 mm	0,55	$e_y \approx 0,8$	$e_x \approx 0,12$	3,8 mm
Baseball bei $\vartheta_v = 41^\circ$	194,4 g	36 mm	0,40	$e_y \approx 0,4$	$e_x \approx 0,2$	3,2 mm
Basketball bei $\vartheta_v = 66^\circ$	589,4 g	120 mm	0,66	$e_y \approx 0,86$	$e_x \approx 0,1$	1,1 mm

**Tabelle 1** Typische Parameter einiger Bälle – nach Veröffentlichung [2]. Die Parameter in den letzten zwei Spalten können vom Einfallswinkel  $\vartheta_v$  des Balles und von der Beschaffenheit des Bodens abhängen.

Beim Superball ist  $e_x$  **wesentlich größer als bei anderen Bällen**, aber nur halb so groß wie der ideale Wert 1.

$\alpha$  wird definiert durch die Gl. des Trägheitsmomentes  $I = \alpha m R^2$  für Drehungen um den Schwerpunkt. Bei einer homogenen Vollkugel gilt  $\alpha = 0,4$ , bei einer dünnwandigen Hohlkugel gilt  $\alpha = 2/3$ .

Die Stoßzahlen werden durch die Gln. (4a/b) definiert.  $D$  ist der Hebelarm der Normalkraft  $N$  (siehe Abb. 3).

Mit dem **Impulssatz**

$$m_1 v_{1v} + m_2 v_{2v} = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}$$

$$\text{folgt: } v_{1n} = v_{1v} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_{1v} - v_{2v}) (1+e) \quad (2a)$$

$$v_{2n} = v_{2v} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_{1v} - v_{2v}) (1+e) \quad (2b)$$

Der Verlust an kinetischer Energie beträgt demnach

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) (v_{1v} - v_{2v})^2 \quad (3)$$

Die Gln. (2a/b) und (3) zeigen:

- Für  $e = 0$  ist der **Energieverlust maximal**. Wegen

$$v_{1n} = v_{2n} = \frac{m_1 v_{1v} + m_2 v_{2v}}{m_1 + m_2}$$

ist dieser Stoß voll plastisch.

- Für  $e = 1$  ist der Stoß **elastisch**. Für zentrale elastische Stöße sind die **Geschwindigkeitsdifferenzen vorher und nachher immer entgegengesetzt gleich groß**:  $v_{2n} - v_{1n} = v_{1v} - v_{2v}$ .

Wir betrachten der Einfachheit halber nur Bälle, die sich **in der vertikalen x,y-Ebene** bewegen (siehe Abb. 3). Dann können sich die Bälle vor dem Stoß nur mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_v$  um die z-Achse drehen. Für  $\dot{\phi} > 0$  dreht sich ein Ball im positiven mathematischen Sinn, also im Gegenuhrzeigersinn. Vor einem Stoß am Boden hat der jeweils tiefste Punkt des Balles die horizontale Geschwindigkeit

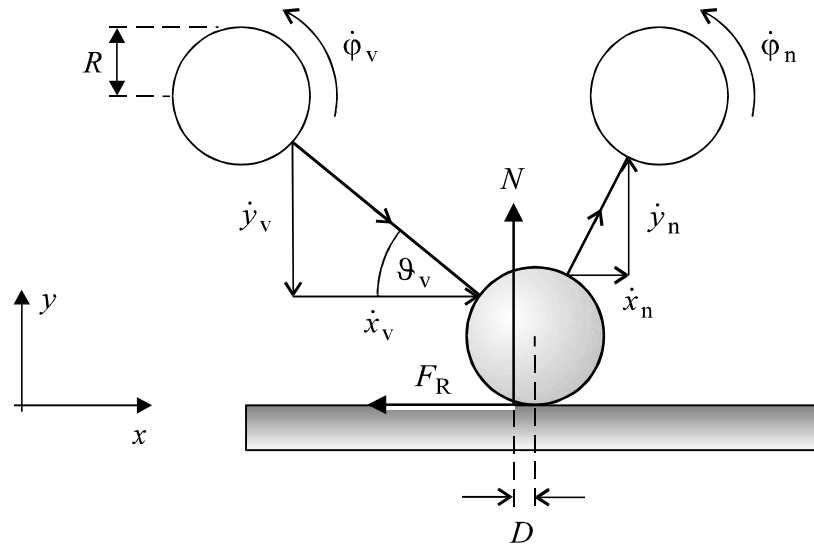
$$\dot{x}_v + R \dot{\phi}_v$$

In Anlehnung an Gl. (1) definieren wir für Superbälle, die **am Boden stoßen**, eine **vertikale** und eine **horizontale Stoßzahl** wie folgt:

$$e_y := - \frac{\dot{y}_n}{\dot{y}_v} \quad (4a)$$

$$e_x := - \frac{\dot{x}_n + R \dot{\phi}_n}{\dot{x}_v + R \dot{\phi}_v} \quad (4b)$$

Für  $e_x = 1$  ändert der stoßende Punkt des Balles das Vorzeichen seiner horizontalen Geschwindigkeit.



**Abb. 3** Stoß auf dem Fußboden. Da sich der Gummiball, der hier vereinfacht als Kugel dargestellt wird, aufgrund der Reibungskraft  $F_R$  während des Stoßes etwas nach vorne neigt, hat die Wirkungslinie der Normalkraft  $N$  den Abstand  $D$  vom Schwerpunkt.

In den Rechnungen wird  $D$  vernachlässigt, da bei Superbällen  $D$  unter 1% von  $R$  liegt.

Diese zwei Gln. reichen noch nicht, um die drei Größen  $\dot{y}_n$ ,  $\dot{x}_n$ ,  $\dot{\phi}_n$  zu berechnen. Die dritte Gl. wird durch den **Drehimpulssatz** geliefert. Nach Abb. 3 gilt für den Stoß am Fußboden bei **Vernachlässigung von  $D$** :<sup>1</sup>

$$I \ddot{\phi} = -R F_R \quad \text{mit } I = \text{Trägheitsmoment für Drehungen um den Ball-Schwerpunkt} \quad (5)$$

Mit

$$m \ddot{x} = -F_R$$

erhalten wir:

$$I \ddot{\phi} = R m \ddot{x} \quad (6)$$

Die Zeitintegration über die Stoßzeit führt dann sofort auf die gesuchte dritte Gl.:

$$I (\dot{\phi}_n - \dot{\phi}_v) = m R (\dot{x}_n - \dot{x}_v) \quad (7)$$

Die Gln. (4a/b) und (7) liefern die gesuchten Größen

---

<sup>1</sup> Messungen in Experimenten zeigen, dass der Spin der Bälle nach einem Stoß oft größer ist, als er aufgrund der Reibungskraft  $F_R$  sein kann. Diese Beobachtung kann nur so erklärt werden, dass die **Wirkungslinie der Normalkraft  $N$  hinter dem Schwerpunkt des Balles liegt**. Die Verschiebung der Wirkungslinie ist plausibel, wenn man bedenkt, dass der Ball beim Stoß nach „vorne kippt“. Wir vernachlässigen die Verschiebung  $D$  im Folgenden, da bei Superbällen  $D < 0,01 \cdot R$  gilt.

nach dem **Stoß am Fußboden**:

$$\dot{y}_n = -e_y \dot{y}_v \quad (8a)$$

$$\dot{x}_n = \frac{1}{1+\alpha} \left[ (1-\alpha e_x) \dot{x}_v - \alpha (1+e_x) R \dot{\phi}_v \right] \quad (8b)$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{1}{1+\alpha} \left[ -\frac{1+e_x}{R} \dot{x}_v + (\alpha - e_x) \dot{\phi}_v \right] \quad (8c)$$

Beachte, dass die Stoßzahl  $e_y$  nur die vertikale Bewegung und dass die Stoßzahl  $e_x$  nur die horizontale Bewegung und den Winkel  $\phi$  beeinflusst.

Beim **Stoß unter dem Tisch** gilt nach Abb. 4 – wieder bei Vernachlässigung des Abstandes  $D$  :

$$I \ddot{\phi} = R F_R \quad \text{und} \quad m \ddot{x} = -F_R$$

$$\Rightarrow I \ddot{\phi} = -R m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow -I (\dot{\phi}_n - \dot{\phi}_v) = m R (\dot{x}_n - \dot{x}_v)$$

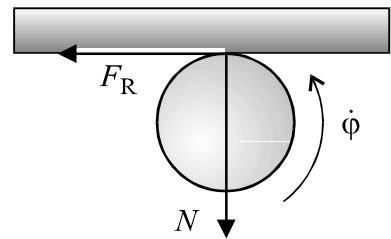


Abb. 4 Stoß unter dem Tisch.

Dies entspricht der Gl. (7) für Stöße am Boden – mit Ausnahme der **Vorzeichenänderung der Winkelgeschwindigkeit**. Da für Stöße unter dem Tisch auch die Gl. der horizontalen Stoßzahl

$$e_x := -\frac{\dot{x}_n - R \dot{\phi}_n}{\dot{x}_v - R \dot{\phi}_v} \quad (9)$$

in Zähler und Nenner je eine Vorzeichenänderung der Winkelgeschwindigkeit enthält (vgl. mit Gl. (4b)), finden wir leicht die Variablen

nach dem **Stoß unter dem Tisch**:

$$\dot{y}_n = -e_y \dot{y}_v \quad (10a)$$

$$\dot{x}_n = \frac{1}{1+\alpha} \left[ (1-\alpha e_x) \dot{x}_v + \alpha (1+e_x) R \dot{\phi}_v \right] \quad (10b)$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{1}{1+\alpha} \left[ \frac{1+e_x}{R} \dot{x}_v + (\alpha - e_x) \dot{\phi}_v \right] \quad (10c)$$

Die Stoßzahlen liegen in folgenden Bereichen:

Die vertikale Stoßzahl  $e_y$  liegt zwischen Null und Eins:

$$0 \leq e_y \leq 1 \quad (11a)$$

Die horizontale Stoßzahl  $e_x$  kann auch negative Werte annehmen und liegt zwischen minus und plus Eins:

$$-1 \leq e_x \leq 1 \quad (11b)$$

- Für  $e_x = -1$  sind  $\dot{x}, \dot{\phi}$  nach den Gln. (8b/c) bzw. (10b/c) konstant; der Ball stößt mit  $F_R = 0$  gegen einen **glatten Boden** oder gegen die **glatte Unterseite eines Tisches** (siehe Abb. 9).
- Für  $-1 < e_x < 0$  **wird das Vorzeichen der horizontalen Geschwindigkeit des stoßenden Ballpunktes** nach Gl. (4b) bzw. nach Gl. (9) **nicht geändert**. Ein Ball, der ohne Spin unter den Tisch geworfen wird, springt **immer weiter nach rechts**, wobei  $\dot{x}(t)$  bei jedem Stoß abnimmt (siehe Abb. 9).
- Für  $e_x = 0$  hat der stoßende Punkt des Balles nach dem Stoß keine Geschwindigkeit mehr. Der **Energieverlust ist maximal**. Ein ohne Spin unter den Tisch geworfener Ball ändert seine  $x$ -Koordinate nach wenigen Stößen kaum noch (siehe Abb. 9).
- Für  $0 < e_x < 1$  **ändert der stoßende Punkt des Balles** nach Gl. (4b) bzw. nach Gl. (9) **das Vorzeichen seiner horizontalen Geschwindigkeit**. Ein ohne Spin unter den Tisch geworfener Ball bewegt sich **nach dem ersten Stoß unterm Tisch nach links** mit  $\dot{x}(t) < 0$ , falls  $e_x$  genügend groß ist (siehe Abb. 7).
- Für  $e_x = e_y = 1$  ist der Stoß **elastisch ohne Energieverlust**. Auch hier ändert der stoßende Punkt des Balles das Vorzeichen seiner horizontalen Geschwindigkeit.

## Vereinfachte Parameter

Die mit Superbällen erzielten experimentellen Ergebnisse können gut durch eine vereinfachte Parameterwahl wiedergegeben werden:

Für einen **idealen Superball** mit den vereinfachten Parametern

$$e_x = e_y = 1 \quad \alpha = \frac{2}{5} \quad (D = 0) \quad (12)$$

folgt für den

**Stoß am Fußboden**

$$\dot{y}_n = -\dot{y}_v$$

$$\dot{x}_n = \frac{3}{7} \dot{x}_v - \frac{4}{7} R \dot{\phi}_v$$

$$\dot{\phi}_n = -\frac{10}{7R} \dot{x}_v - \frac{3}{7} \dot{\phi}_v$$

**Stoß unter dem Tisch**

$$\dot{y}_n = -\dot{y}_v \quad (13a/14a)$$

$$\dot{x}_n = \frac{3}{7} \dot{x}_v + \frac{4}{7} R \dot{\phi}_v \quad (13b/14b)$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{10}{7R} \dot{x}_v - \frac{3}{7} \dot{\phi}_v \quad (13c/14c)$$

Daraus folgt für den idealen Superball: Für den Stoß am Boden und unter dem Tisch gilt:

$$\dot{x}_n \pm R \dot{\phi}_n = -(\dot{x}_v \pm R \dot{\phi}_v)$$

Beim Stoß eines idealen Superballes ändert sich das **Vorzeichen der Geschwindigkeit des Ball-Punktes, der den Stoß ausführt**. (Weiter hinten wird dieses überraschende Ergebnis im Kapitel „Elastische Schwingungen des idealen Superballes bei Stößen“ genauer untersucht.)

Die Stöße können mit sog. „**Stoßmatrizen**“  $\mathbf{A}_{\text{Boden}}$  und  $\mathbf{A}_{\text{Tisch}}$  einfach und elegant berechnet werden. Mit dem Zustandsvektor

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ R\dot{\phi} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (15)$$

und mit

$$\mathbf{A}_{\text{Boden}} := \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{\text{Tisch}} := \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \quad (16a/b)$$

folgt z. B. für **Stöße am Boden**:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ R\dot{\phi}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{Boden}} \begin{pmatrix} \dot{x}_v \\ R\dot{\phi}_v \\ \dot{y}_v \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3\dot{x}_v - 4R\dot{\phi}_v \\ -10\dot{x}_v - 3R\dot{\phi}_v \\ -7\dot{y}_v \end{pmatrix} \quad (17)$$

### Beispiel 1 Sprungfolge auf dem Boden

Berechne die Sprünge eines Superballs, der mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}_v = 0 \quad \dot{\phi}_v < 0 \quad \dot{y}_v < 0 \quad \text{ohne Spin senkrecht zu Boden fällt.}$$

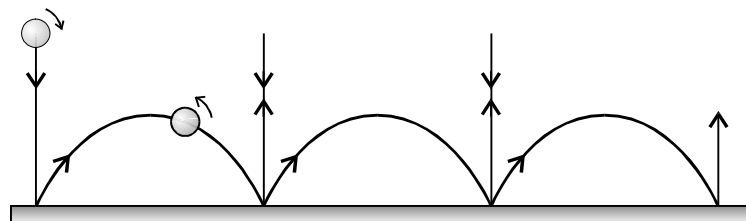
#### Lösung:

Nach dem ersten Bodenaufschlag lautet der Zustandsvektor:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ R\dot{\phi}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{Boden}} \begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\phi}_v \\ \dot{y}_v \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4R\dot{\phi}_v \\ 3R\dot{\phi}_v \\ 7\dot{y}_v \end{pmatrix} \quad \text{mit } \dot{\phi}_v < 0$$

Nach dem ersten Stoß fliegt der Ball schräg davon auf einer Wurfparabel. Überraschend hat sich das **Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit des Balles umgekehrt**.

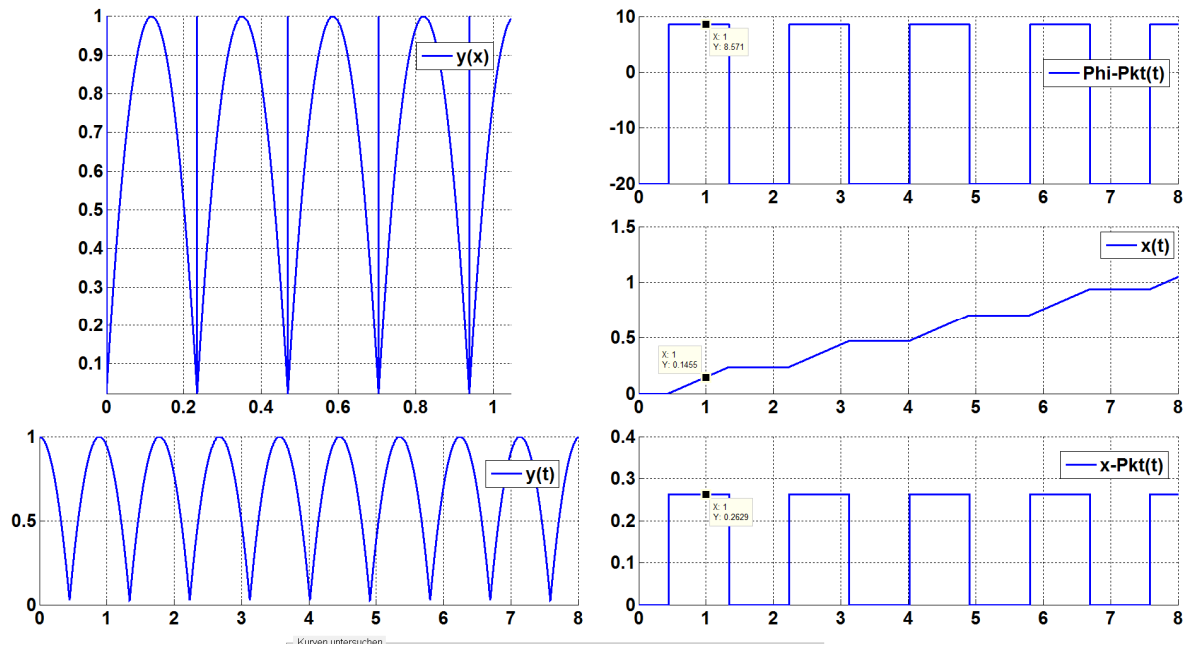
Wegen  $\mathbf{A}_{\text{Boden}}^2 = \mathbf{1}$  springt der Ball nach jedem zweiten Stoß wieder senkrecht in die Höhe.<sup>2</sup> Der Superball springt also abwechselnd senkrecht in die Höhe und auf einer Wurfparabel.



**Abb. 5a** Sprungkurve des **idealen Superballs** mit  $e_x = e_y = 1$ . Vgl. mit den Abbn. 5b und 5c.

<sup>2</sup> Beachte, dass die Gravitation die y-Komponente  $\dot{y}(t)$  der Geschwindigkeit zwischen den Stößen umkehrt.

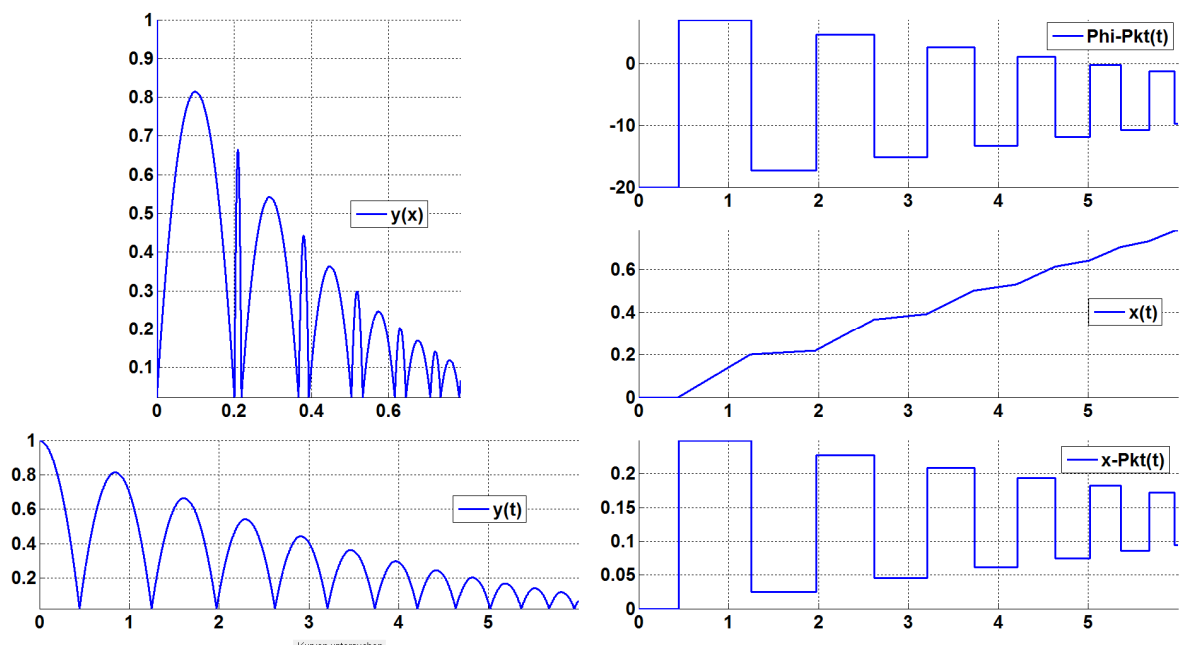




**Abb. 5b** Sprungkurve des **idealen Superballs** mit  $e_x = e_y = 1$ . Die erste Kurve  $y(x)$  beschreibt dieselbe Bewegung wie die Kurve in Abb. 5a. Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = -20 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad y(0) = 1 \text{ m} \quad \dot{y}(0) = 0$$

$$R = 2,3 \text{ cm} \quad \alpha = 0,40 \quad e_x = e_y = 1$$



**Abb. 5c** Zum Vergleich sehen wir hier die Sprungkurve des **realen Superballs**. Anfangsbedingungen und Parameter sind identisch mit denjenigen in Abb. 5b – mit einer Ausnahme:

$$e_x = e_y = 0,9$$

## Beispiel 2 Superball wird unter den Tisch geworfen

Ein Superball wird mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}_v > 0 \quad \dot{\phi}_v = 0 \quad \dot{y}_v < 0$$

unter einen Tisch geworfen.

Bestätige, dass der Ball nahezu in die Hand des Werfers zurückkehrt.

Hinweis: Berechne das Verhältnis  $\dot{x}_{n3}/\dot{x}_v$  der horizontalen Geschwindigkeiten vor dem ersten und nach dem dritten Stoß.

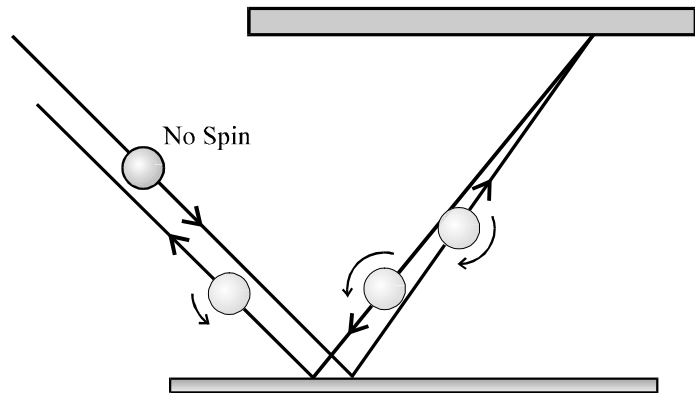


Abb. 6a Der Superball wird ohne Spin unter einen Tisch geworfen.

### Lösung:

Der Ball macht einen Stoß am Boden, danach einen Stoß unter dem Tisch und abschließend wieder einen Stoß am Boden. Die drei Stöße werden durch das Matrixprodukt

$$\mathbf{A}_{\text{Boden}} \mathbf{A}_{\text{Tisch}} \mathbf{A}_{\text{Boden}} = \frac{1}{343} \begin{pmatrix} -333 & 52 & 0 \\ 130 & 333 & 0 \\ 0 & 0 & -343 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei ist  $7^3 = 343$ . Es folgt:

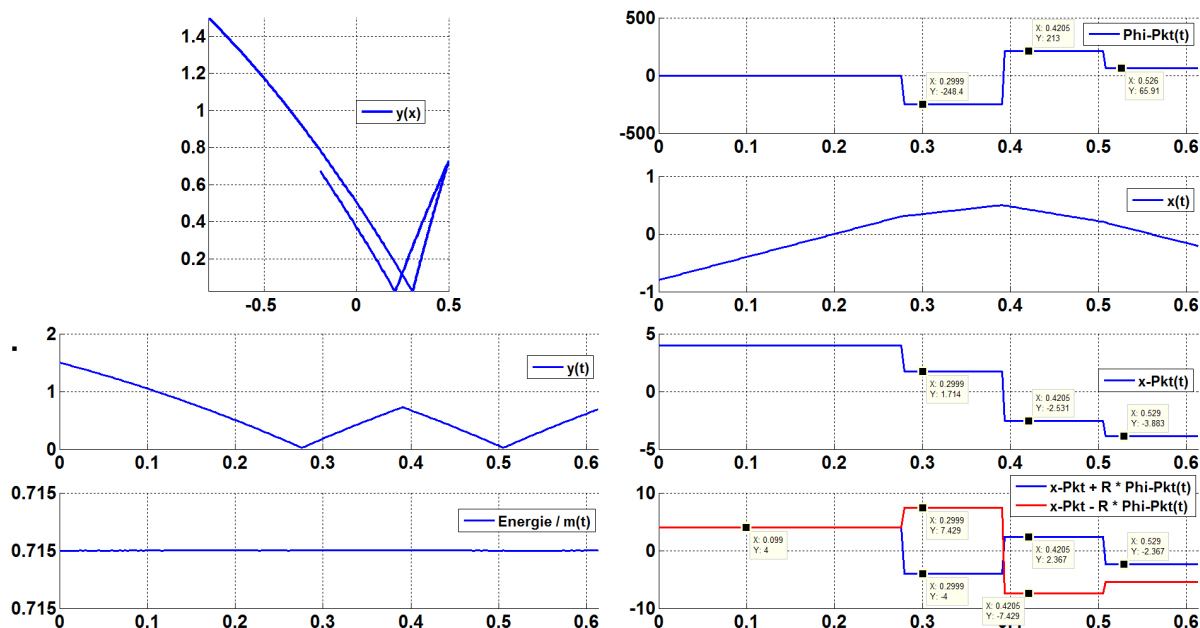
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{n3} \\ R\dot{\phi}_{n3} \\ \dot{y}_{n3} \end{pmatrix} = \frac{1}{343} \begin{pmatrix} -333 & 52 & 0 \\ 130 & 333 & 0 \\ 0 & 0 & -343 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_v \\ 0 \\ \dot{y}_v \end{pmatrix} = \frac{1}{343} \begin{pmatrix} -333 \dot{x}_v \\ 130 \dot{x}_v \\ -343 \dot{y}_v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{n3} = -\frac{333}{343} \dot{x}_v \quad \dot{y}_{n3} = -\dot{y}_v$$

Der Superball hat nach den 3 Stößen ungefähr die entgegengesetzte Geschwindigkeit wie am Anfang.

Die Kurven in Abb. 6b bestätigen die Berechnungen. Zwischen den Stößen, also beim freien Fall wurde die Gewichtskraft berücksichtigt. Die beiden Kurven im rechten, unteren Fenster ergeben die Umkehr der Geschwindigkeiten  $\dot{x} \pm R\dot{\phi}$  beim Stoß am Boden bzw. unter der Tischplatte.

Die Kurven in Abb. 7 zeigen, dass die Superbälle – im Gegensatz zu anderen Bällen – zum Werfer zurückkommen, weil sie nach Tabelle 1 auf Seite 2 eine deutlich erhöhte horizontale Stoßzahl  $e_x$  haben.

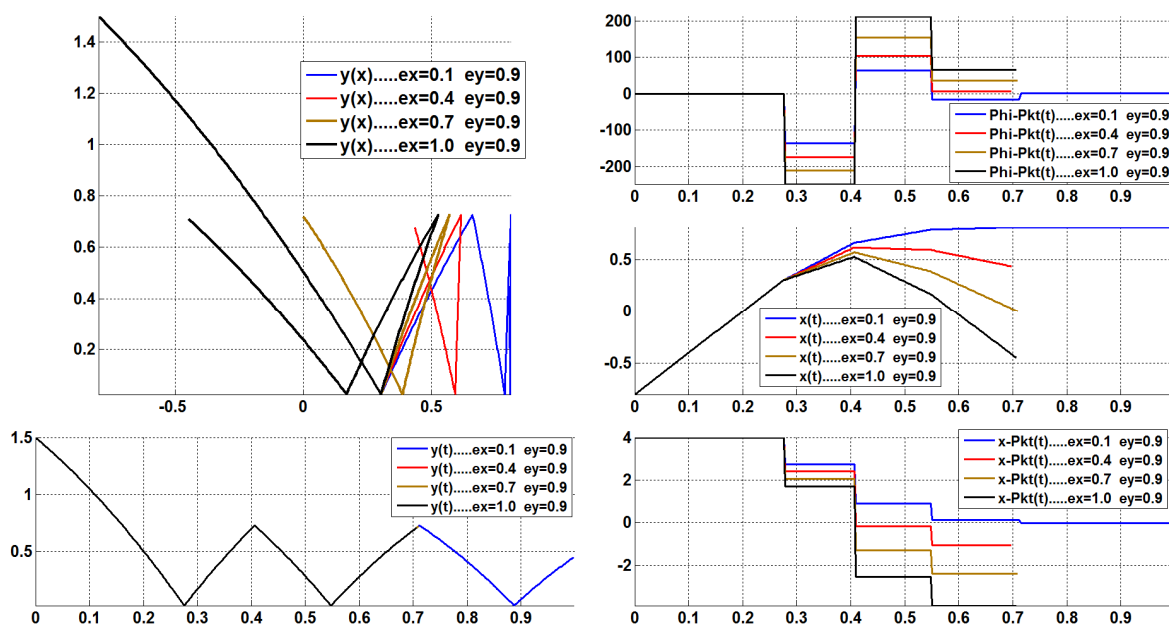


**Abb. 6b** Nach drei Stößen kommt der **ideale Superball** zum Werfer zurück. Nach dem dritten Stoß beträgt die x-Koordinate der Geschwindigkeit:  $\dot{x}_{n3} = -333/343 \cdot 4 \text{ m/s} \approx -3,883 \text{ m/s}$

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

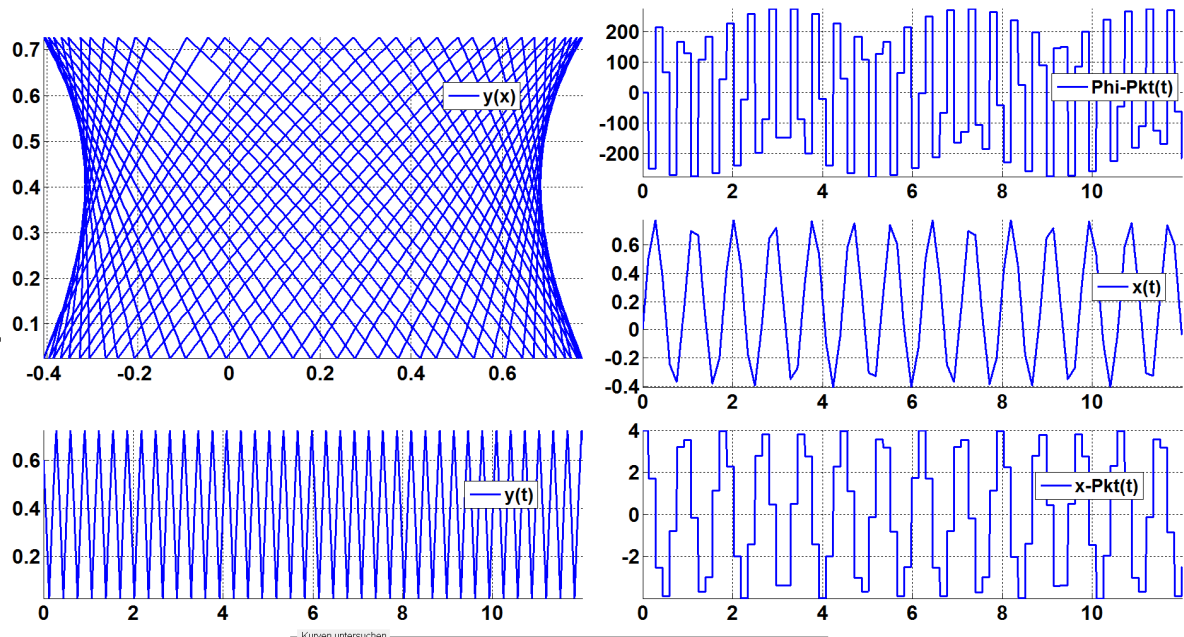
$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad x(0) = -0,8 \text{ m} \quad \dot{x}(0) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad y(0) = 1,5 \text{ m} \quad \dot{y}(0) = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R = 2,3 \text{ cm} \quad \alpha = 0,40 \quad e_x = e_y = 1 \quad \text{Tischhöhe } h = 0,75 \text{ m}$$



**Abb. 7** Hier werden vier verschiedene **reale Bälle** mit denselben Anfangsbedingungen unter einen Tisch geworfen. Die Bälle unterscheiden sich nur durch die horizontale Stoßzahl  $e_x$ . Von links oben nach rechts unten werden die Kurven  $y(x)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  dargestellt.

Nach Tabelle 1 auf Seite 3 **unterscheiden sich Superbälle vor allem durch ihre relativ große horizontale Stoßzahl  $e_x$  von anderen Bällen**. Diese Grafik zeigt, dass ein unter den Tisch geworfener Ball umso schlechter zum Werfer zurück kommt, je kleiner  $e_x$  ist. Für  $e_x = 0,1$  (blaue Kurven) springt der Ball nach dem ersten Stoß unter dem Tisch **nicht nach links zurück**.

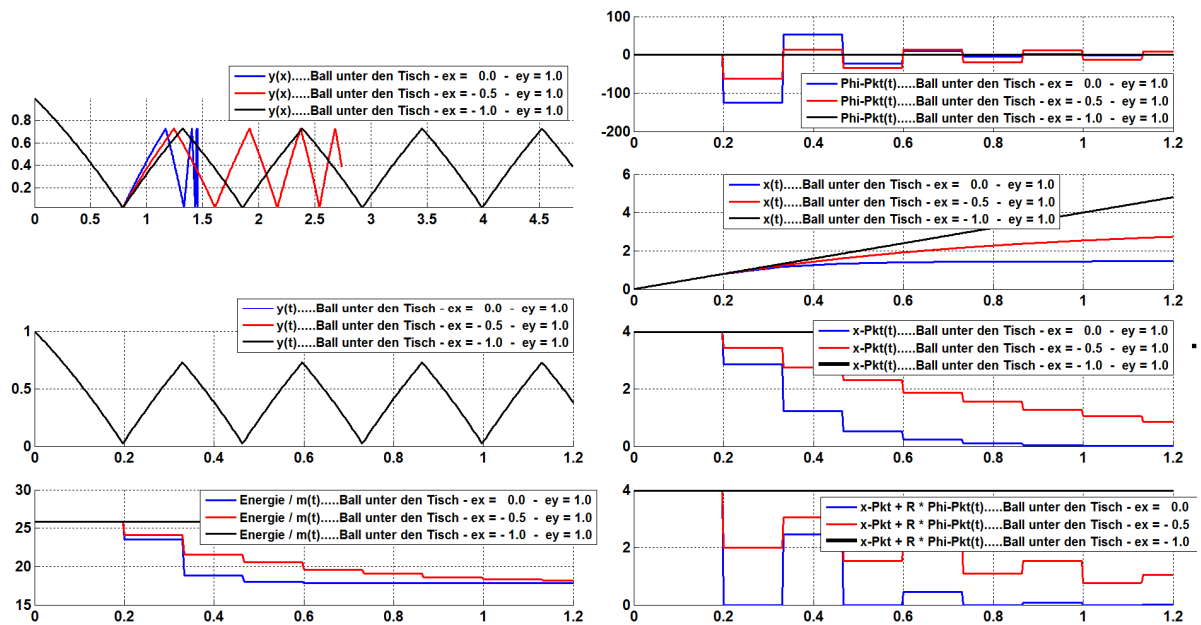


**Abb. 8** Hier springt ein **idealer Superball** 12 s lang unter dem Tisch. Seine Bahn verläuft in einem endlichen Bereich hin und her.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0 \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad y(0) = 0,6 \text{ m} \quad \dot{y}(0) = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R = 2,3 \text{ cm} \quad \alpha = 0,40 \quad e_x = e_y = 1 \quad \text{Tischhöhe } h = 0,75 \text{ m}$$



**Abb. 9** Hier springen drei **Superbälle** 1,2 s lang unter dem Tisch **nach rechts**. Die Stoßparameter betragen

$$e_x = 0,0 \quad e_x = -0,5 \quad e_x = -1,0 \quad e_y = 1,0$$

- 1) Für  $e_x = 0$  (blaue Kurven) ist der **Energieverlust maximal**. Am Ende ist  $\dot{x}(t) < 1 \text{ mm/s}$ .
- 2) Für  $e_x = -0,5$  (rote Kurven) läuft der Ball **mit abnehmenden Geschwindigkeiten**  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  **nach rechts**.
- 3) Für  $e_x = -1,0$  (schwarze Kurven) sind  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  und  $E(t)$  konstant  $\Rightarrow$  **Glatter Boden** ohne Reibung.

### Beispiel 3 Schräg auftreffender Ball ohne Spin

Ein idealer Superball fällt mit den Anfangsbedingungen

$$\dot{x}_v = -\dot{y}_v > 0 \quad \dot{\phi} = 0$$

mit dem Winkel  $\vartheta_v = 45^\circ$  zu Boden. Mit welchem Winkel  $\vartheta_n$  springt er vom Boden hoch?

#### Lösung:

Nach dem Bodenaufschlag lautet der Zustandsvektor:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ R \dot{\phi}_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\text{Boden}} \begin{pmatrix} \dot{x}_v \\ R \dot{\phi}_v \\ \dot{y}_v \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \dot{x}_v \\ -10 \dot{x}_v \\ 7 \dot{x}_v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tan \vartheta_n = \frac{\dot{y}_n}{\dot{x}_n} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \vartheta_n \approx 66,8^\circ$$

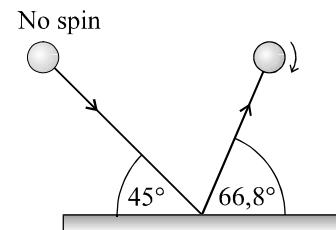


Abb. 10 Schräger Stoß ohne Spin

### Beispiel 4 Superball auf einer einzelnen Wurfparabel

Zeige, dass sich ein idealer Superball fortlaufend auf einer einzelnen Wurfparabel hin und her springen kann.

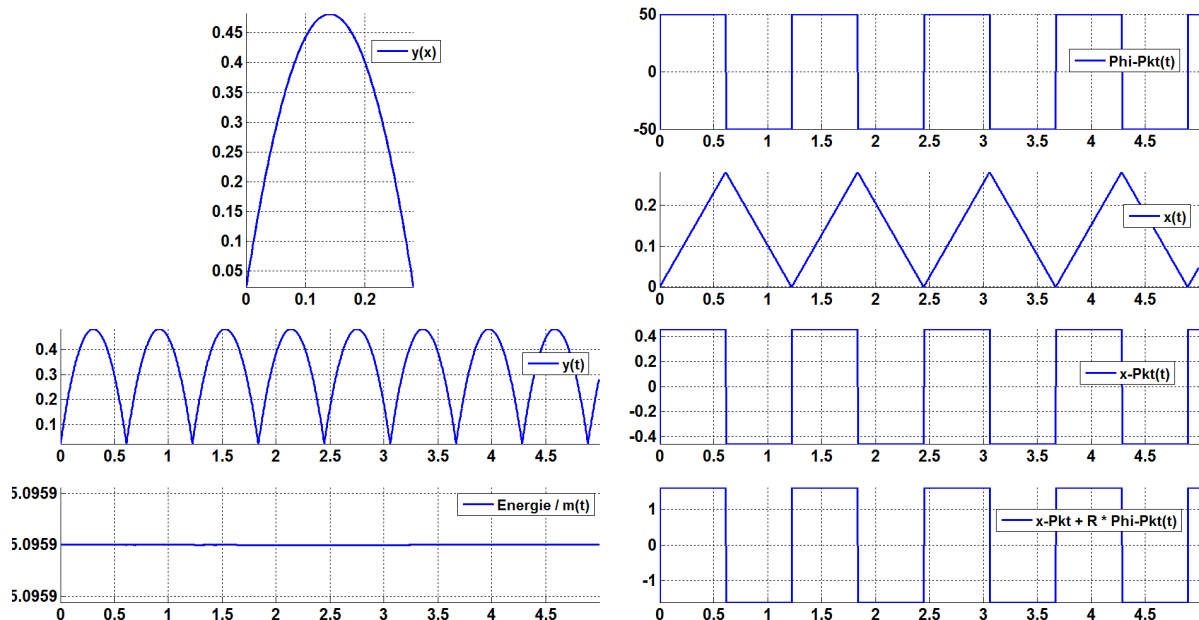


Abb. 11 Der ideale Superball springt auf einer einzelnen Wurfparabel hin und her.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = -50 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = -0.46 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad y(0) = 0,024 \text{ m} \quad \dot{y}(0) = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$R = 2,3 \text{ cm} \quad \alpha = 0,40 \quad e_x = e_y = 1$$

**Lösung**

Wir setzen in den Gln. (10b/c)  $e_x = e_y = 1$  sowie

$$\dot{x}_n = -\dot{x}_v \quad \dot{\phi}_n = -\dot{\phi}_v$$

Dann werden die Gln. (8b/c) gelöst, falls folgende Gl. für die Anfangsbedingungen erfüllt ist:

$$\dot{x}_v = \alpha R \dot{\phi}_v \quad (18)$$

In diesem Fall **springt der ideale Superball auf einer einzelnen Wurfparabel hin und her** (siehe Abb. 11).

**Num. Lösung der Bewegung mit Schaltfunktionen (Event-functions)**

Die Bewegung lässt sich am besten mit dem Verfahren ode45 berechnen.

Nach den in MECHANICUS eingegebenen Gln. kann der Ball „ungehindert“ *von oben* durch die Tischplatte durchfallen. Wenn der Ball also in einer Höhe  $y(0) \geq h + R$  abgeworfen wird – egal bei welcher x-Koordinate  $x(0)$  –, so fällt er gewissermaßen neben dem Tisch zu Boden und springt anschließend unter dem Tisch auf und ab. *Von unten* wird der Ball immer an der Unterseite der Tischplatte reflektiert.

Die Unterbrechung des freien Falls beim Stoß am Fußboden oder unter dem Tisch wird mit **Schaltfunktionen** (sog. „Event-functions“) ermittelt.

Hinweis: Im System

„Zwei\_springende\_Baelle“

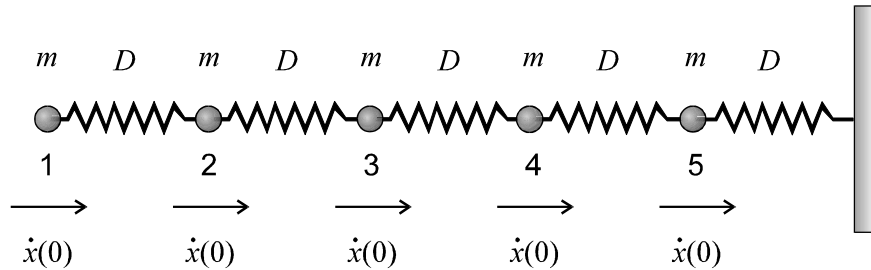
wird unter dem Menüpunkt Anmerkungen im Word- und im pdf-File jeweils ein vollständiges und lauffähiges MATLAB-Programm gezeigt, das die Bewegung von zwei Bällen berechnet, die übereinander auf und ab springen. Die Bodenstöße des unteren Balls und die Zusammenstöße der beiden Bälle werden dort ebenfalls mit **Schaltfunktionen** (sog. **Event-functions**) ermittelt.

Das Programm kann mit Copy und Paste in den MATLAB-Editor übernommen und direkt gestartet werden.

## Elastische Schwingungen des idealen Superballes bei Stößen

Abschließend soll noch in groben Zügen erklärt werden, warum sich beim Boden-Stoß des **idealen** Superballes – mit  $e_x = e_y = 1$  – das Vorzeichen der **horizontalen** Geschwindigkeit  $\dot{x} + R \dot{\phi}$  des tiefsten Ball-Punktes ändert.

Die Vorzeichenumkehr von  $\dot{x} + R \dot{\phi}$  ist sicherlich sehr überraschend. Im Gegensatz dazu ist die Vorzeichenumkehr der **vertikalen** Geschwindigkeit  $\dot{y}$  selbstverständlich und wird wohl Niemanden erstaunen.



**Abb. 12** Ein Kettenschwinger mit **einem freien Ende** auf der linken Seite und mit  $N = 5$  Oszillatoren läuft mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}(0) > 0$  gegen eine ruhende Wand. Der linke (rechte) Oszillator hat die Nr. 1 (5).

Daher erklären wir zuerst die Vorzeichenumkehr von  $\dot{y}$  und betrachten einen Ball, der ohne Spin senkrecht nach unten fällt. Da die Verformung des Balles beim Bodenkontakt nicht berechnet werden kann, vereinfachen wir und betrachten stattdessen einen **homogenen Stab**, der mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}(0) > 0$  in Längsrichtung gegen eine feste Wand läuft. Als **Modell des Stabes nehmen wir einen Kettenschwinger** mit  $N$  gekoppelten Oszillatoren (siehe Abb. 12 mit  $N = 5$ ), bei dem alle Massen mit gleicher Geschwindigkeit  $\dot{x}(0) > 0$  laufen.

Abb. 13 zeigt das Ergebnis einer Berechnung für  $N = 800$  gekoppelte Oszillatoren. Es werden die Koordinaten  $x(t)$  jeder 80. Masse dargestellt.

Die Information, dass die Kette gegen eine feste Wand läuft, erfasst pro Sekunde

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{500 \text{ N/m}}{1 \text{ kg}}} \approx 22,4 \frac{1}{\text{s}}$$

Oszillatoren. Zur Zeit

$$T = \frac{800}{\sqrt{D/m}} \approx 35,8 \text{ s}$$

kommen alle 800 Oszillatoren gleichzeitig zur Ruhe. Erstaunlicherweise sind **alle 800 Federn zu diesem Zeitpunkt gleich stark gestaucht** mit der Stauchung  $s \approx 4,47 \text{ cm}$ .

Hinweis: Wenn parallel zu den  $N$  Federn noch  $N$  Stoßdämpfer eingebaut werden, dann wird das rechte Ende der Kette an der festen Wand erwartungsgemäß stärker gestaucht als das linke Ende.

Zur Zeit  $T$  ist die gesamte kinetische Anfangsenergie in potentielle Federenergie umgewandelt. Für jeden einzelnen Oszillator gilt:

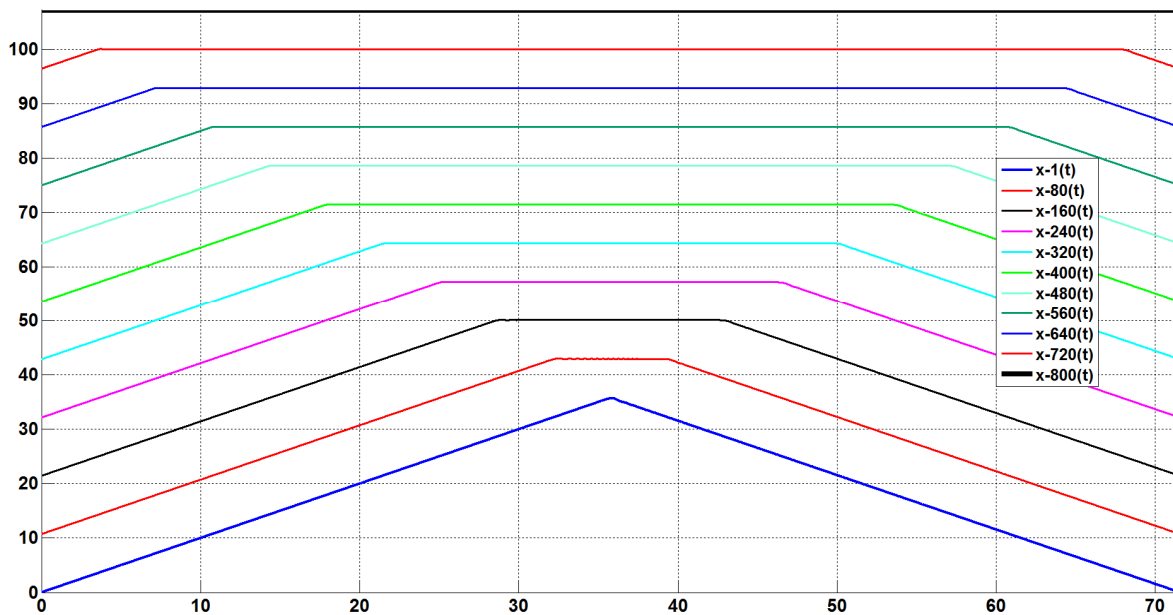
$$E(0) = \frac{m}{2} \dot{x}^2(0) = 0,5 \text{ J} \quad E(T) = \frac{D}{2} s^2 \approx 250 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,0447 \text{ m})^2 \approx 0,5 \text{ J}$$

Danach schwingen alle Oszillatoren wieder zurück. Nach der Zeit  $2T \approx 71,6 \text{ s}$  läuft die Kette ohne innere Anregungen mit der Geschwindigkeit  $\dot{x} = -\dot{x}(0) = -1 \text{ m/s}$  von der Wand weg.

Die Impulsänderung  $\Delta p$  des Kettenschwingers wird durch den Kraftstoß der Wand erzeugt: In der Zeit  $2T$  überträgt die rechte Feder folgenden Kraftstoß auf den Kettenschwinger:

$$\int_0^{2T} F(t) dt = F \cdot 2T = D s \cdot 2T \approx 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,0447 \text{ m} \cdot 71,6 \text{ s} \approx 1600 \text{ N s}$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{2. Newton.} \\ \text{Axiom}}}{\int_0^{2T} \dot{p}(t) dt} = \Delta p = 800 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1600 \text{ N s}$$



**Abb. 13** Ein **am linken Ende freier** Kettenschwinger (siehe Abb. 12) mit  $N = 800$  Oszillatoren läuft mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}(0) = 1 \text{ m/s}$  gegen eine Wand. Bei entspannten Federn beträgt der Abstand der Oszillatoren 13,4 cm.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$x_i(0) = 0 \quad \dot{x}_i(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad i = 1, 2, \dots, 800$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad D = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \text{Teilchenzahl } N = 800$$



Für den homogenen, stoßenden Stab – und näherungsweise für den Superball – bedeutet dies:

Nach dem elastischen Stoß an einer Wand läuft ein Stab mit umgekehrter Geschwindigkeit von der Wand weg. Nach dem Stoß treten keine inneren Schwingungen auf. Die Impulsänderung des Stabes ist gleich dem Kraftstoß der Wand.

Nun soll die Vorzeichenumkehr der horizontalen Geschwindigkeit  $\dot{x} + R \dot{\phi}$  des tiefsten Ballpunktes erklärt werden. Die Reibungskraft verursacht in den unteren Bereichen des Balles horizontale Verformungen, die wiederum Druckwellen auslösen, die sich u. a. dicht unter der Balloberfläche nach oben ausbreiten.

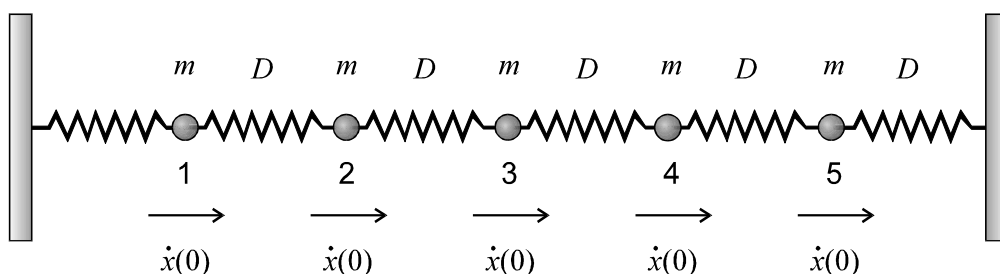
Da wir auch hier keine Berechnungen vornehmen können, ersetzen wir der Einfachheit halber den Ball nun durch einen **dünnen Torus** (Ring), der vertikal aufgerichtet mit Spin auf den Boden fällt. Als **Modell des Ringes nehmen wir einen Kettenschwinger, der zu einem Kreis gebogen wird**, wobei die erste Masse mit der letzten Feder verbunden wird. Der Torus soll mit der Umfangsgeschwindigkeit  $v_0$  im Uhrzeigersinn um seine horizontale Symmetrieachse rotieren. Beim Aufschlag auf den Boden wird die unterste Masse schlagartig festgehalten.

Das Modell des gebogenen, rotierenden Kettenschwingers mit  $N - 1$  beweglichen Massen (die unterste Masse wird auf dem Boden festgehalten) und mit  $N$  Federn kann exakt durch einen linearen Kettenschwinger ersetzt werden, bei dem **beide Enden an zwei Wänden festgehalten** werden und der zur Zeit  $t = 0$  mit der Geschwindigkeit  $v_0 = \dot{x}(0)$  nach rechts läuft. Die lineare Kette hat ebenfalls  $N - 1$  bewegliche Massen und  $N$  Federn (siehe Abb. 14).

Die Information, dass die beiden Enden festgehalten werden, läuft von links und rechts zur Kettenmitte. Nach Erhalt dieser Information bleibt jede Masse stehen. Zur Zeit

$$T = \frac{400}{\sqrt{D/m}} \approx 17,9 \text{ s}$$

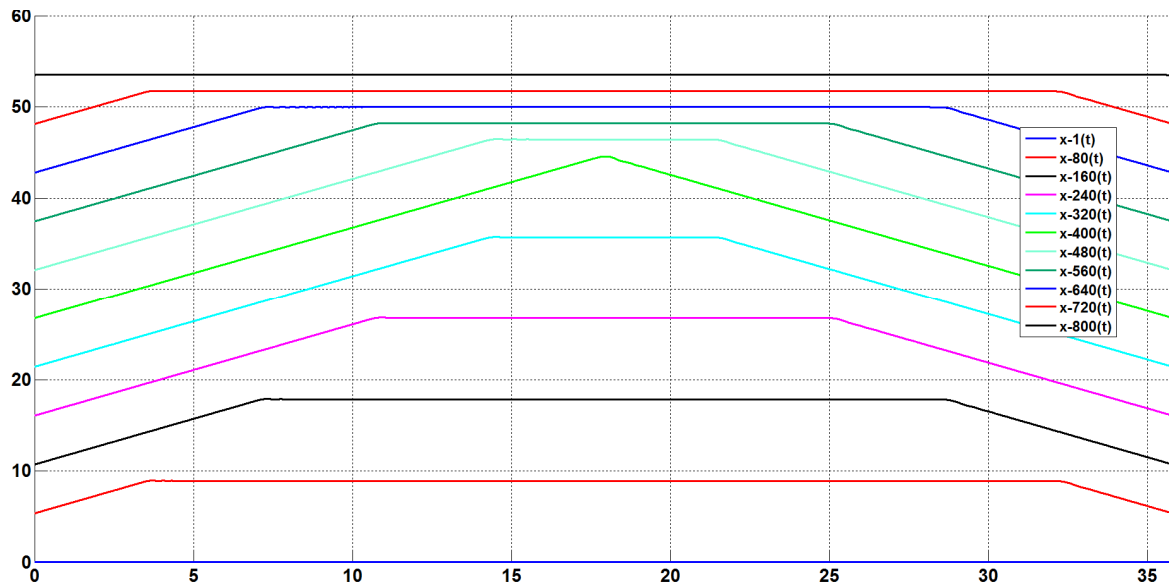
ruht die gesamte Kette. **Die linken 400 Federn sind alle gleich stark gedehnt, die rechten 400 Federn sind alle gleich stark gestaucht**; Dehnungen und Stauchungen haben denselben Betrag. Nach weiteren 17,9 s sind alle Federn wieder entspannt und alle Massen bewegen sich mit der Geschwindigkeit  $-\dot{x}(0)$  nach links. Der Kettenschwinger hat seine Geschwindigkeit umge-



**Abb. 14** Ein Kettenschwinger mit **zwei festen Enden**, 5 Massen und 6 Federn läuft anfangs mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}(0)$  nach rechts.

kehrt – ohne innere Schwingungen zu hinterlassen.

Jetzt bleibt nur noch eine Frage offen: Hebt der Superball genau dann vom Boden ab, verschwindet also die Reibungskraft am Boden genau dann, wenn sich die horizontale Geschwindigkeit  $\dot{x} + R \dot{\phi}$  des tiefsten Ball-Punktes umgekehrt hat? Da die Stoßzahlen  $e_x, e_y$  eines realen Superballes kleiner als Eins und Stöße daher nicht völlig elastisch sind, muss diese Bedingung nicht unbedingt exakt erfüllt werden. Leider können wir dazu keine näheren Abschätzungen vornehmen.



**Abb. 15** Ein Kettenschwinger mit  $N = 800$  Oszillatoren ist an **beiden Enden** über Federn **fest** mit ruhenden Wänden verbunden (siehe Abb. 14). Zur Zeit  $t = 0$  läuft die gesamte Kette mit der Geschwindigkeit  $\dot{x}(0) = 1 \text{ m/s}$  nach rechts. Die Information, dass beide Enden der Kette festgehalten werden, breitet sich pro Sekunde über  $\sqrt{D/m} \approx 22,4/\text{s}$  Oszillatoren aus. **Diejenigen Oszillatoren, die diese Information erhalten haben, bleiben nahezu in Ruhe stehen. Dabei sind die Längenänderungen aller Federn gleich stark.**

Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$x(0) = 0 \quad \dot{x}(0) = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad N = 800 \quad m = 1 \text{ kg} \quad D = 500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

## Literatur

- [1] R. L. Garwin: Kinematics of an ultraelastic rough ball, Am. J. Phy. **37**, 88–92 (1969)
- [2] R. Gross: Grip-slip behavior of an bouncing ball, Am. J. Phy. **70**, 1093–1102 (2002)
- [3] Philip J. Aston / R. Shail: The Dynamics of a bouncing superball with spin, Department of Mathematics, University of Surrey, October 11 (2007).

Der Artikel ist unter dem Suchbegriff “Superball” in Wikipedia zu finden.

Mit Hilfe der Stoßmatrizen wird untersucht, wie oft sich die horizontale Bewegung und der Spin umkehren können und wie die Bewegungen asymptotisch verlaufen. Außerdem werden Sprünge auf einer Treppe untersucht.

- [4] R. Gross: Bounce of a spinning ball near normal incidence, Am. J. Phy. **73**, 914–920 (2005)
- [5] B. T. Hefner: The kinematics of a superball bouncing between two vertical surfaces, Am. J. Phy. **72**, 875–883 (2004)
- [6] F. Kuypers: Klassische Mechanik, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage. In Aufgabe 13–4 werden die Stöße linearer Kettenschwinger gegen feste Wände ausführlich untersucht. U. a. werden die Bewegungen analytisch berechnet.