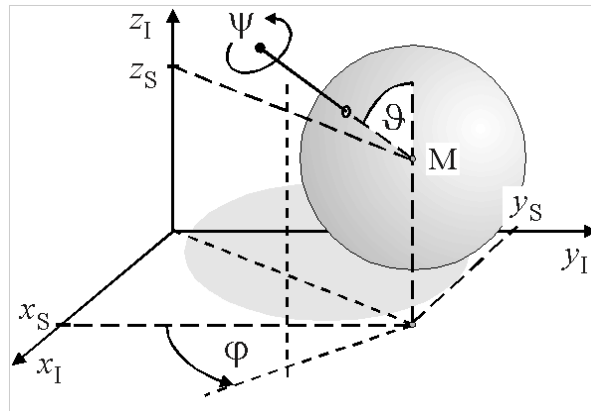


# Springende und rutschende Kugel



**Abb. 1** Eine homogene Kugel rollt oder rutscht mit Coulombscher Gleitreibungskraft über den weichen Boden. Auch Sprünge in die Luft sind erlaubt.

Eine homogene Kugel mit Masse  $m$ , Radius  $r$  und Trägheitsmoment  $I$  rollt ohne Schlupf oder rutscht mit Coulombscher Reibungskraft über einen **weichen Boden** oder springt in die Luft.

Die Luft verursacht eine laminare, d. h. geschwindigkeitsproportionale Luftreibungskraft

$$\mathbf{R}_{\text{Luft}} = -c \mathbf{v}_S \quad \text{mit } \mathbf{v}_S = \text{Schwerpunktgeschwindigkeit}$$

Wenn man die Kugel *mit Drall* senkrecht zu Boden fallen lässt, so springt sie wegen der Coulombschen Reibungskraft seitlich weg.

Bei der numerischen Lösung der Dgln. wird zusätzlich eine sog. Bewegungsphase berechnet. Die Bewegungsphase kann nur **zwei diskrete Werte** annehmen:

Bewegungsphase = 1  $\Leftrightarrow$  Die Kugel fliegt in der Luft

Bewegungsphase = 2  $\Leftrightarrow$  Die Kugel berührt den Boden

Als generalisierte Koordinaten werden die Eulerwinkel  $\varphi, \vartheta, \psi$  und die Schwerpunktkoordinaten  $x_S, y_S, z_S$  verwendet.

## Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Haften und Gleiten auf dem Boden können *näherungsweise* durch die Gln.

$$R_{\text{Haft}}^{\max} = f_0 N \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{\text{Rutsch}} = -f N \frac{\mathbf{v}_K}{v_K} \quad \text{mit } f < f_0 \quad (1)$$

beschrieben werden. Dabei sind

- $f$  und  $f_0$  Gleit- und Haftreibungszahl zwischen Kugel und Boden

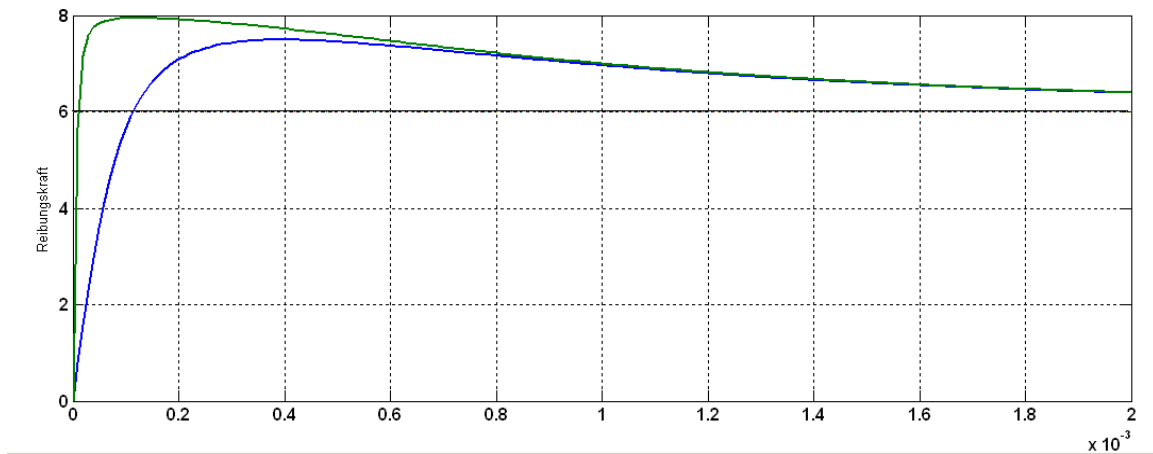
- $N = m(g + \ddot{z}_S) = D s$  die Normalkraft der Kugel auf den Boden
- $D$  die Federkonstante des weichen Bodens,  $s$  die Stauchung des weichen Bodens
- $v_K$  die Geschwindigkeit, mit der der tiefste Punkt der Kugel über den Boden rutscht.

Wegen der Unstetigkeit beim Wechsel Gleiten  $\leftrightarrow$  Haften ist die numerische Lösung der Dgln. schwierig. Daher werden im Maschinenbau oft **kombinierte Reibungsansätze** verwendet, die einen *stetigen Übergang* zwischen Rollen und Rutschen beschreiben. Denkbar ist z. B. der Ansatz

$$\mathbf{R}(v_K) = - \left( f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left( \frac{s}{m} \right)^2 v_K^2} \right) N \frac{v_K}{\sqrt{10^{-8} \left( \frac{m}{s} \right)^2 + v_K^2}} = \quad (2a)$$

$$= - f_{\text{komb.}}(v_K) v_K \quad (2b)$$

Die runde Klammer in Gl. (2a) liefert einen stetigen Übergang zwischen einem Maximum, das der Haftreibungszahl  $f_0$  nahe kommt, und der Gleitreibungszahl  $f$ . Der Bruch am Ende verhindert Divisionen durch Null und sorgt für einen stetigen Übergang der Reibungskraft beim Vorzeichenwechsel von  $v_K$ . In Abb. 2 wird  $\mathbf{R}$  in Abhängigkeit vom Geschwindigkeits-



**Abb. 2** Die Kurven zeigen den kombinierten Haftreibungs-Gleitreibungs-Ansatz

$$\mathbf{R}(v_K) = \left( f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left( \frac{s}{m} \right)^2 v_K^2} \right) N \frac{v_K}{\sqrt{v_{\text{gr}}^2 + v_K^2}}$$

für Beträge der Rutschgeschwindigkeit im Intervall  $0 \leq v_K \leq 2 \text{ mm/s}$ . Folgende Parameter wurden gewählt:

$$f = 0.6 \quad f_0 = 0.8 \quad \text{Normalkraft } N = 10 \text{ N}$$

$$v_{\text{gr}} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{blaue Kurve}) \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{gr}} = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{grüne Kurve})$$

betrag  $v_K$  dargestellt. Beachte, dass sich die Reibungskraft  $\mathbf{R}$  bei sehr kleinen Rutschgeschwindigkeiten  $v_K$  bei kleinsten Verschiebungen von  $v_K$  extrem stark ändert. Diese hohe Empfindlichkeit des kombinierten Reibungsansatzes macht numerische Berechnungen der Dgln. schwierig und anspruchsvoll.

Der Ansatz in Gl. (2) ersetzt das Haften mit  $v_K = 0$  durch eine Gleitbewegung mit sehr kleiner Rutschgeschwindigkeit  $v_K < 0,4 \text{ mm/s}$ .

Die Dgln. lauten:

$$L_\varphi : \ddot{\varphi} + \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \dot{\psi} \sin \vartheta = 0$$

$$L_\vartheta : \ddot{\vartheta} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta + \frac{f_{\text{komb}}}{I} r \left( r \dot{\vartheta} - \dot{x}_S \sin \varphi + \dot{y}_S \cos \varphi \right) = 0$$

$$L_\psi : \ddot{\psi} + \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta + \frac{f_{\text{komb.}}}{I} r \sin \vartheta \left( r \sin \vartheta \dot{\psi} + \dot{x}_S \cos \varphi + \dot{y}_S \sin \varphi \right) = 0$$

$$L_{x_S} : \ddot{x}_S + \frac{f_{\text{komb.}}}{m} \left[ \dot{x}_S + r \left( \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \right) \right] + \frac{c}{m} \dot{x}_S = 0$$

$$L_{y_S} : \ddot{y}_S + \frac{f_{\text{komb.}}}{m} \left[ \dot{y}_S + r \left( \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \right) \right] + \frac{c}{m} \dot{y}_S = 0$$

$$L_{z_S} : \ddot{z}_S + g + \frac{D}{m} (r - z_S) \Theta(r - z_S) + \frac{c}{m} \dot{z}_S = 0$$

Die Theta-Funktion ist wie folgt definiert:  $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

## Literatur

- Die Dgln. und ihre Aufstellung haben – abgesehen vom Reibungsansatz – viel Ähnlichkeit mit den Dgln. des Stehaufkreisels und ihrer Aufstellung. Siehe dazu F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage, Aufgabe 12–19.