

Hantelschwinger

Eine Kugel mit der Masse m_1 kann reibungsfrei auf einem geraden vertikalen Draht gleiten, der durch einen äußeren Antrieb mit der Auslenkung $A_x \sin(\Omega t)$ harmonisch hin und her bewegt werden kann. Eine zweite Kugel mit der Masse m_2 kann reibungsfrei auf einem zweiten ortsfesten Draht gleiten, der parallel zur x-Achse liegt. Die beiden Kugeln werden durch eine masselose Stange der Länge l miteinander verbunden.

Der Winkel φ beschreibt die Bewegung des Systems.

Hinweis: Im Winkelbereich $\varphi \in [0, \pi/2]$ beschreibt dieses System auch eine Hantel, die an einer glatten Wand auf einem glatten Fußboden reibungsfrei zu Boden gleitet.

Die beiden Kugeln unterliegen geschwindigkeitsproportionalen Luft-Reibungskräften

$$F_{R1} = -c_1 \dot{y}_1 \quad \text{und} \quad F_{R2} = -c_2 \dot{x}_2.$$

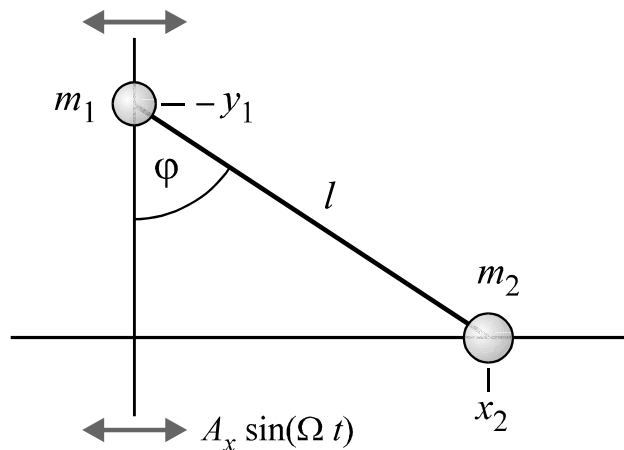


Abb. 1 Die beiden Kugeln sind durch eine masselose Stange der Länge l miteinander verbunden und können ohne Festreibung (aber mit laminarer Luftreibung) auf zwei geraden Drähten gleiten.

Übrigens ist die Stange zu jeder Zeit die Tangente einer Astroide.

Differentialgl. (abgekürzt Dgl.)

Wir wählen den Winkel φ als generalisierte Koordinate. Die Transformationsgln. lauten:

$$x_1 = A \sin(\Omega t) \quad y_1 = l \cos \varphi$$

$$x_2 = A \sin(\Omega t) + l \sin \varphi \quad y_2 = 0$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich nach Streichung eines rein zeitabhängigen Terms zu

$$L = \frac{m_1}{2} (l \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + \frac{m_2}{2} \left[2 A l \Omega \dot{\varphi} \cos(\Omega t) \cos \varphi + (l \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \right] - m_1 g l \cos \varphi$$

Daraus folgt die Dgl.:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{(m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) l^2} \left[(m_2 - m_1) l^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + m_2 l A \Omega^2 \sin(\Omega t) \cos \varphi \right. \\ \left. - c_1 l^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi - c_2 \left\{ l^2 \dot{\varphi} \cos^2 \varphi + A \Omega l \cos(\Omega t) \cos \varphi \right\} \right. \\ \left. + m_1 g l \sin \varphi \right]$$

Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.

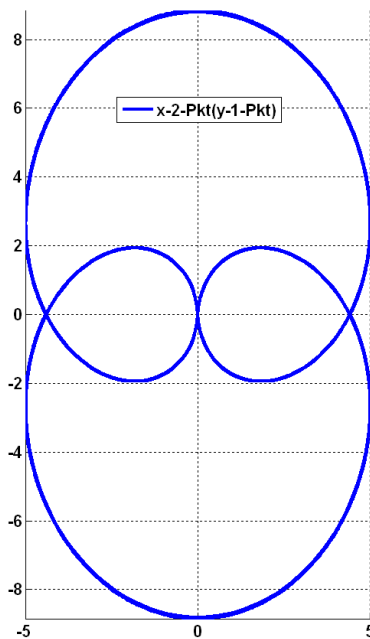


Abb. 2 Interessante Kurve für die Anfangsbedingungen und Parameter:

$$\varphi_0 = 0,1 \text{ rad} \quad \dot{\varphi}_0 = 0$$

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad m_2 = 1 \text{ kg} \quad l = 1 \text{ m}$$

$$A_x = 0 \quad \Omega = 0 \quad c_1 = c_2 = 0$$