

Drei springende Bälle

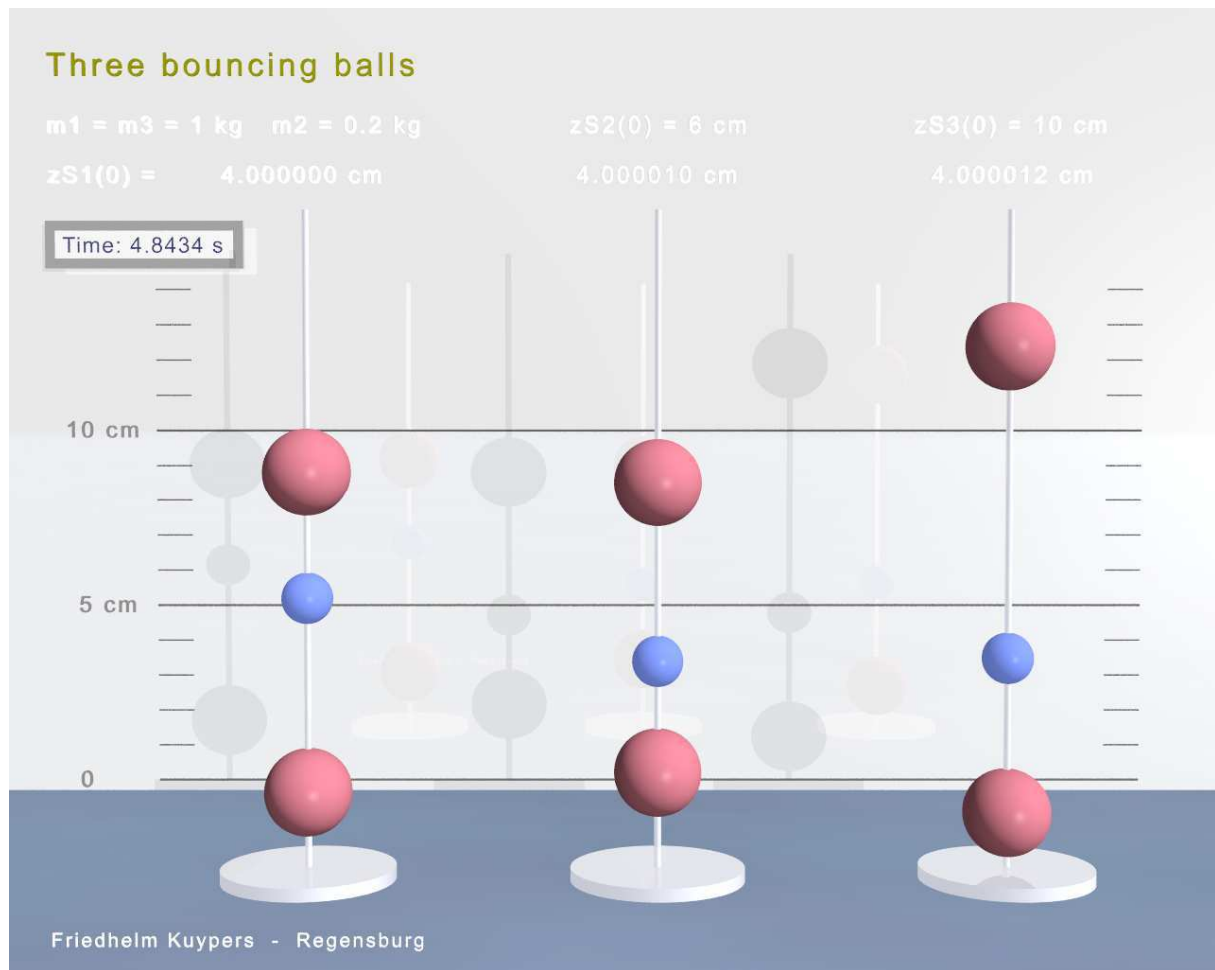


Abb. 1 Momentaufnahme einer fotorealistischen POV-Ray-Animation.

Die Anfangshöhe der unteren Kugel unterscheidet sich in den drei Systemen an der fünften bzw. sechsten Stelle nach dem Komma. Da sich die springenden Bälle chaotisch verhalten, sind die Bewegungen der drei Systeme nach einiger Zeit völlig verschieden.

Drei Bälle springen übereinander auf dem festen Boden auf und ab. Bei den Zusammenstößen und beim Bodenaufprall gelten der [Energie- und der Impulserhaltungssatz](#). Alle Reibungsverluste, auch Luftreibung werden vernachlässigt.

Bei numerischen Berechnungen müssen die Anfangsbedingungen und Parameter folgende sechs Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} z_{S1}(0) &\geq 1\text{E}-6 \text{ m} & z_{S1}(0) &> r_1 \\ z_{S2}(0) &\geq 3\text{E}-6 \text{ m} & z_{S2}(0) &> z_{S1}(0) + r_1 + r_2 \\ z_{S3}(0) &\geq 5\text{E}-6 \text{ m} & z_{S3}(0) &> z_{S2}(0) + r_2 + r_3 \end{aligned}$$

Falsche Eingaben werden von MECHANICUS automatisch gemeldet und abgelehnt.

Numerische Lösung der Dgln. mit Schaltfunktionen (Event-functions)

Bei dem ähnlichen System „Zwei_springende_Baelle“ wird im Word- und im pdf-File ein MatLab-Programm gezeigt, das die Bewegung von *zwei* Bällen berechnet. Die Bodenstöße des unteren Balls und die Zusammenstöße der beiden Bälle werden mit **Schaltfunktionen** (sog. **Event-functions**) ermittelt. Das Programm kann mit Copy und Paste in den MatLab-Editor übernommen werden.

Animationen

Die numerischen Lösungsverfahren der Dgln. geben bei jedem Stoß die Zeit, die drei Koordinaten und die drei Geschwindigkeiten, die beim Stoß vorliegen, aus. Daher ist die *Ausgabeschrittweite*, die eigentlich konstant sein sollte, bei Stößen (in der Regel) *verkleinert*, evtl. sogar stark verkleinert. Bei der Darstellung von Kurven ist die Ausgabe jedes Stoßes erfreulich. Schwankende Ausgabeschrittweiten stören bei Kurven überhaupt nicht.

Auf die Animation aber hat die Verkürzung der Ausgabeschrittweite einen ungünstigen Einfluss: Bei Stößen laufen *Animationen verlangsamt und stockend* ab. Wenn z. B. der untere Ball ‚verfrüht‘ auf den Boden stößt, dann erfährt die Bewegung der beiden anderen Bälle eine evtl. gut sichtbare Verzögerung.

Leider kann dieses Problem nicht befriedigend gelöst werden. Wenn die Ausgabeschrittweite mit zusätzlichem Programmieraufwand konstant gemacht wird, dann sind die Bodenaufpralle und Zusammenstöße in der Regel nicht in den berechneten Ausgabewerten enthalten. Das bedeutet z. B., dass ein fallender Ball bei der Animation nicht bis zum Boden kommt, sondern schon vorher umkehrt.

Erfreulicherweise ist das Problem umso kleiner, je schneller der Rechner Animationen abspielen kann, je kleiner also der Anwender – vor der numerischen Berechnung – die Schrittweite wählen kann.

Mechanicus versucht, die Animationen etwas zu verbessern, indem die vom Anwender gewählte Schrittweite vor den numerischen Lösungen der Dgln. automatisch durch 10 geteilt wird. Bei der Betrachtung von Kurven wird jede Ausgabe gelesen, bei der Animation aber wird automatisch nur jede zehnte Ausgabe gelesen und animiert.

Hinweise: 1) Bei Sprunghöhen, die viel größer sind als die Ballradien, können die Bälle wegen ihrer relativen Winzigkeit bei der Animation nicht erkannt werden. 2) Zusammenstöße können in kleinen Zeitabständen folgen,

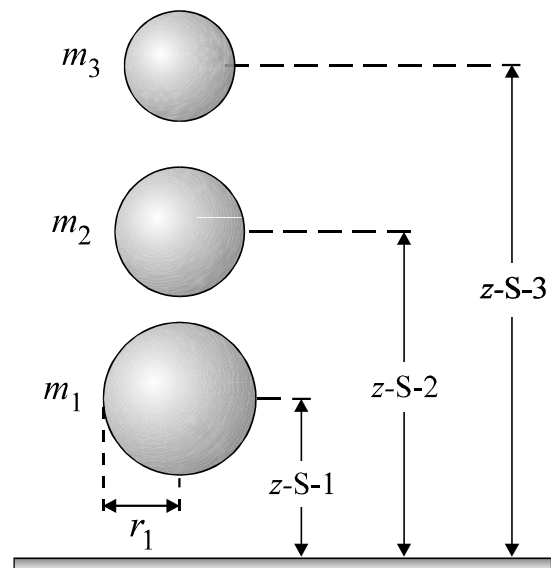


Abb. 2 Der untere springende Ball hat die Nr. 1; der obere springende Ball hat die Nr. 3.

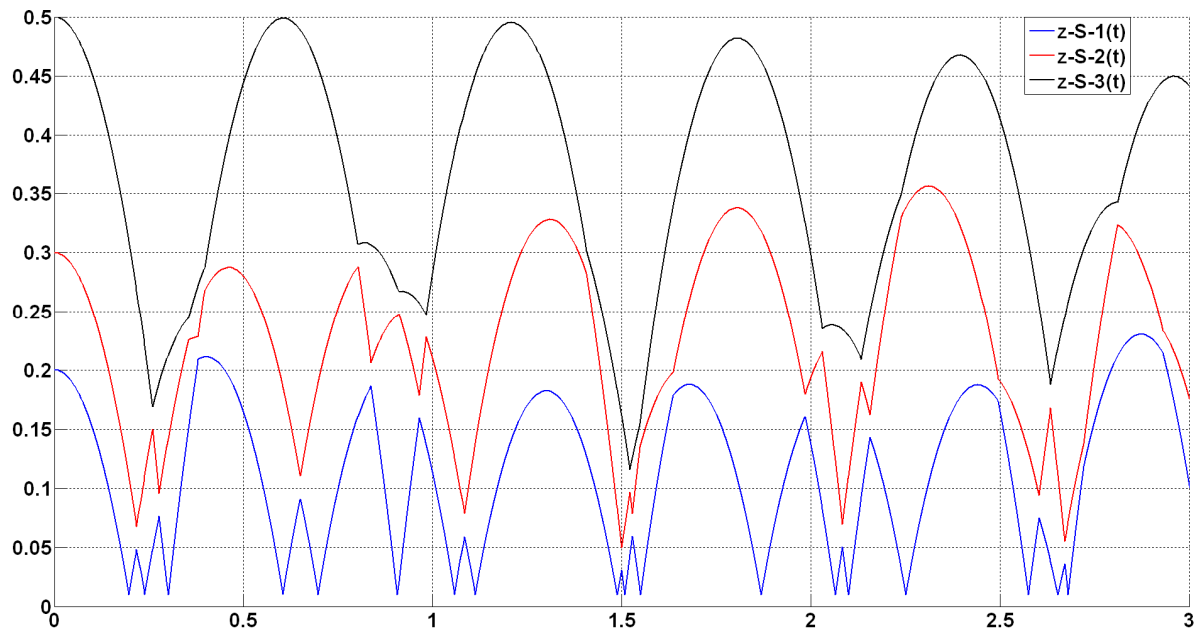


Abb. 3 Drei Bälle springen mit zentralen, elastischen Stößen übereinander. Bei den Zusammenstößen der Bälle ist der Abstand der Kurven gleich dem Schwerpunktabstand der Kugeln. Der untere Ball mit der Nr. 1 stößt auch elastisch auf den Boden. Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$z_{S1}(0) = 0,2 \text{ m} \quad z_{S2}(0) = 0,3 \text{ m} \quad z_{S3}(0) = 0,5 \text{ m} \quad \dot{z}_{S1}(0) = \dot{z}_{S2}(0) = \dot{z}_{S3}(0) = 0$$

$$m_1 = m_3 = 1 \text{ kg} \quad m_2 = 0,8 \text{ kg} \quad r_1 = r_3 = 0,01 \text{ m} \quad r_2 = 0,0093 \text{ m}$$

wenn z. B. die unteren Bälle viel leichter sind als der obere Ball oder wenn die mittlere Kugel viel leichter ist als die beiden äußeren Kugeln ($m_2 \ll m_1, m_3$).

Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.