

Stehaufkreisel ohne Stift. Harter Boden

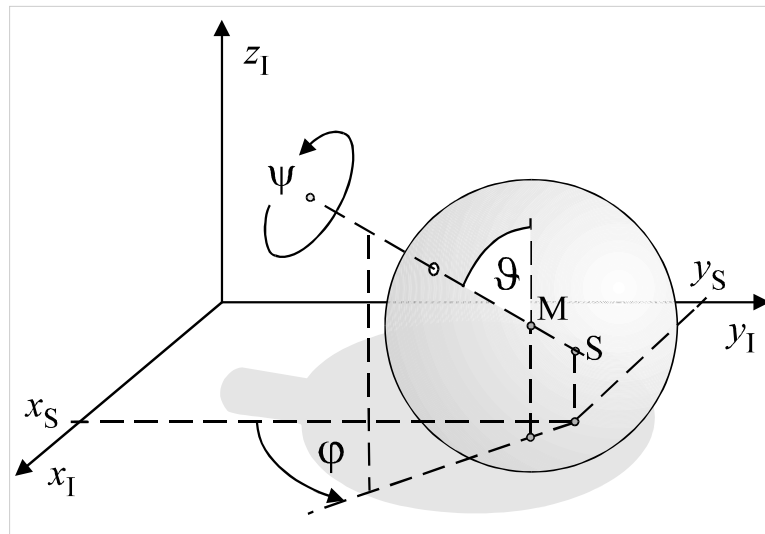


Abb. 1 Die Bewegung des Stehaufkreisels wird durch die drei Eulerschen Winkel

- Präzessionswinkel φ
- Neigungs- oder Nutationswinkel ϑ und
- Eigenrotationswinkel ψ

sowie durch die kartesischen Koordinaten x_S, y_S des Schwerpunktes S beschrieben.

Dieser Stehaufkreisel enthält keinen Stift, sondern ist nur eine **inhomogene Kugel**, d. h. der Schwerpunkt S der Kugel liegt für $\overline{SM} =: a > 0$ *nicht* im Kugelmittelpunkt M.

Ohne Drehung oder mit nur geringer Drehzahl ist diejenige Lage stabil, in der der Schwerpunkt unten ist (kleiner Neigungswinkel ϑ); der Kreisel wackelt wie ein Stehaufmännchen hin und her. Versetzt man den Kreisel aber in eine schnelle Rotation $\dot{\psi}(0)$ um die Symmetrieachse MS, so ist die Orientierung, in der der Schwerpunkt unten ist, instabil; deshalb wird der Neigungswinkel ϑ laufend größer und wächst fast bis π , so dass der Schwerpunkt am Ende der Bewegung ungefähr oberhalb vom Kugelmittelpunkt ist. Der Schwerpunkt S hat die höchste Lage erreicht. Die stabile Rotation mit dem Schwerpunkt in der höchsten Lage dauert so lange an, bis die Reibung die Winkelgeschwindigkeit unter einen kritischen Wert gedrückt hat. Dann taumelt der Kreisel und der Schwerpunkt sinkt wieder in die tiefste Lage ab.

Mathematisches Modell

Entscheidend für die Aufrichtung ist die **Reibungskraft auf dem Boden**. Ohne Reibung kann sich der Kreisel nicht aufrichten. Aufgrund der hohen Rotationsgeschwindigkeit um die inertielle z_I -Achse ist die Reibungskraft \mathbf{R} am Boden näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit v_K , mit der der tiefste Punkt des Kreisels über den Boden rutscht:

$$\mathbf{R} = -k N \mathbf{v}_K = -k m (g + \ddot{z}_S) \mathbf{v}_K \quad (1)$$

mit N = Normalkraft und k = Reibungskoeffizient [s/m].

Am Ende der Aufrichtung ist die Geschwindigkeit \mathbf{v}_K , mit der der tiefste Kreiselpunkt über den Boden rutscht, null: $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$. Da in MECHANICUS neben dieser geschwindigkeitsproportionalen „Contensou-Reibung“ keine weitere Reibungskraft vorkommt, ist der mechanische Energieverlust im Modell am Ende der Aufrichtung null, so dass der Schwerpunkt – im Gegensatz zum Experiment mit seinen ständigen Reibungsverlusten – oben bleibt.

In vielen Experimenten hebt der Kreisel vom Boden ab und macht kleine Luftsprünge. Solche Sprünge sind in dem vorliegenden Modell nicht möglich: Die inhomogene Kugel rutscht über einen **harten Boden** und kann wegen der unterstellten Zwangsbedingung

$$z_S = R - a \cos \vartheta \quad (2)$$

mit R = Kugelradius $a = \overline{MS}$ = Abstand Mittelpunkt-Schwerpunkt

nicht vom Boden abheben. Dies hat bei manchen Rechnungen fatale und völlig unrealistische Konsequenzen: Die numerischen Lösungen zeigen, dass der Aufrichtung eine sog. *Nutation* überlagert ist, bei der der Neigungswinkel $\vartheta(t)$ nicht monoton wächst, sondern in großen Teilen der Bewegung abwechselnd steigt und fällt. Dann wird auch der Schwerpunkt S abwechselnd nach oben und unten beschleunigt. Die Normalkraft N der Kugel auf den Boden

$$N = m (g + \ddot{z}_S) \underset{z_S = R - a \cos \vartheta}{=} m \left[g + a (\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta) \right]$$

ist für $\ddot{z}_S < -g$ negativ, so dass der Kreisel vom Boden abheben möchte, aber wegen der Zwangsbedingung (2) nicht abheben kann¹. Bei negativer Normalkraft N ändert die Reibungskraft ihr Vorzeichen², so dass die Reibung die mechanische Energie nicht verringert, sondern (unsinnigerweise) erhöht. Unter ungünstigen Umständen kann die mechanische E-

¹ *Negative Zwangskräfte* bei heftigen Nutationen der inhomogenen Kugel können anschaulich wie folgt begründet werden: Wir betrachten einen Sportler, der in Schuhen steht, die am Boden festgeklebt sind. Jetzt soll der Sportler die Beine mit Muskelkraft so schnell anziehen, also so schnell in die Hocke gehen, dass sein Schwerpunkt schneller als mit der Erdbeschleunigung nach unten beschleunigt wird: $\ddot{z}_S < -g$. In diesem Fall ist die Normalkraft auf den Boden *negativ*, d. h. die Schuhe bleiben nur wegen der Verklebung auf dem Boden; ohne Leim würden die Schuhe vom Boden abheben.

² Bei der ersten Modellbildung hatte anfangs Niemand an die Möglichkeit einer *negativen* Normalkraft gedacht. In dem vorliegenden Modell wurde diese Unzulänglichkeit nicht geändert, weil sie interessante und lehrreiche, wenn auch absolut unwirkliche Konsequenzen hat.

MECHANICUS enthält noch einen weiteren, alternativen „Stehaufkreisel mit Stift auf weichem Boden“. Dieser Kreisel kann vom Boden abheben und durch die Luft fliegen. Für die Parameter

Radius r der Hauptkugel = Radius r' des Stiftes

Abstand a vom Schwerpunkt zum Mittelpunkt-Hauptkugel = Abstand a'

liegt eine inhomogene Kugel vor, die auf dem weichen Boden auch springen kann.

nergie bei numerischen Rechnungen so schnell und stark ansteigen, dass die numerische Lösung der Dgln. abstürzt.

Numerische Lösungsverfahren

Die Verfahren ode45 und ode113 sind empfehlenswert.

Differentialgln.

Mit der Abkürzung

$$c := k m (g + \ddot{z}_S) = k m [g + a (\ddot{\vartheta} \sin \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta)]$$

lauten die Bewegungsgln. für eine inhomogene Kugel, die mit der **Contensou-Reibung** (1) über einen harten Boden rutscht :

$$\frac{d}{dt} [I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta] + \quad (3a)$$

$$c a \sin \vartheta [(a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_S \cos \varphi + \dot{y}_S \sin \varphi] = 0$$

$$\begin{aligned} & (I_1 + m a^2 \sin^2 \vartheta) \ddot{\vartheta} + m a^2 \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - \\ & I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin \vartheta + \\ & m g a \sin \vartheta + \end{aligned} \quad (3b)$$

$$c (r - a \cos \vartheta) [\dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) - \dot{x}_S \sin \varphi + \dot{y}_S \cos \varphi] = 0$$

$$\frac{d}{dt} [I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})] + c r \sin \vartheta [(a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_S \cos \varphi + \dot{y}_S \sin \varphi] = 0 \quad (3c)$$

$$m \ddot{x}_S + c [\dot{x}_S + (a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) \sin \varphi] = 0 \quad (3d)$$

$$m \ddot{y}_S + c [\dot{y}_S + (a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) \cos \varphi] = 0 \quad (3e)$$

Für die numerische Lösung müssen die Dgln. in explizite Form umgerechnet, also nach den fünf zweiten Ableitungen aufgelöst werden. Die Dgln. für $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\psi}$ enthalten Terme mit $\sin \vartheta$ im Nenner, so dass für $\sin \vartheta = 0$ eine **Singularität** vorliegt.

Diese Singularität ist der entscheidende Nachteil der Eulerwinkel. Auch andere Winkel wie z. B. die Kardanwinkel enthalten Singularitäten, allerdings bei anderen Orientierungen. Singularitäten können durch die Verwendung von Dreh-Quaternionen vermieden werden.

Animation

Die graue, bei der MatLab-Animation auf den Boden gezeichnete Kurve ist die Spur der inhomogenen Kugel auf dem Boden.

Literatur

- Die Bewegung eines Stehaufkreisels *mit Stift*, der auf einem *weichen* Boden gleitet und auch *in die Luft springen* kann, wird untersucht in F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12–19.
- K. Magnus, *Kreisel – Theorie und Anwendungen*, Springer Verlag 1971. Magnus untersucht die Stabilität von vertikal rotierenden Kreisel mit der ersten Methode von Ljapunow. Seine Ergebnisse sind daher auf den Anfang und das Ende einer möglichen Aufrichtung beschränkt.