

Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Oben auf der linken bzw. rechten Seite werden die zeitlichen Entwicklungen der Winkel $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ gezeigt.

Gekoppelte Pendel

Zwei Pendel mit den Massen m_1, m_2 und den Pendellängen l_1, l_2 schwingen in einer gemeinsamen vertikalen Ebene. Sie sind durch eine Feder verbunden, die an beiden Pendelstangen im Abstand l_K von den Aufhängepunkten befestigt ist. Bei vertikal hängenden Pendeln ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) ist die Feder entspannt.

Die Massen der beiden Pendelstangen und der Feder sowie die Trägheitsmomente der beiden Kugeln werden vernachlässigt.

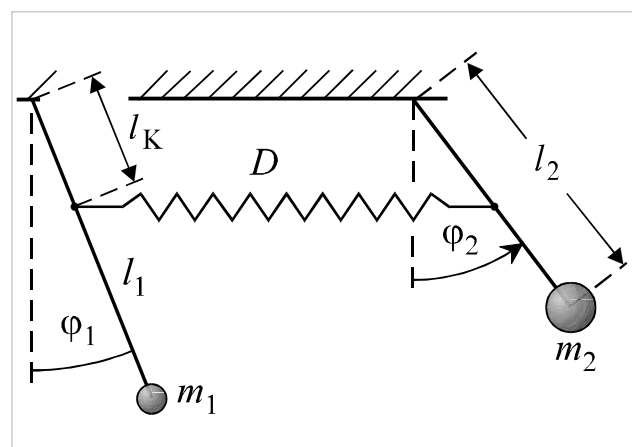


Abb. 2 Zwei Pendel werden durch eine Feder mit Federkonstante D gekoppelt. Die Feder ist an beiden Pendeln im Abstand l_K von den Aufhängepunkten befestigt.

Die Länge der Feder ist wesentlich größer als der Abstand l_K , so dass die **Längsachse der Feder** in den Dgln. als **horizontal** angesehen wird. Daher übt die Feder z. B. auf das linke Pendel mit der Nr. 1 folgendes Drehmoment aus:

$$N_1 = \text{Federkraft} \cdot l_K \cos \varphi_1 = D l_K (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) l_K \cos \varphi_1$$

Die Pendel haben geschwindigkeitsproportionale Reibungskräfte.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Dgln. werden aufgestellt in dem Lehrbuch *Klassische Mechanik* von Friedhelm Kuypers, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 13-1.

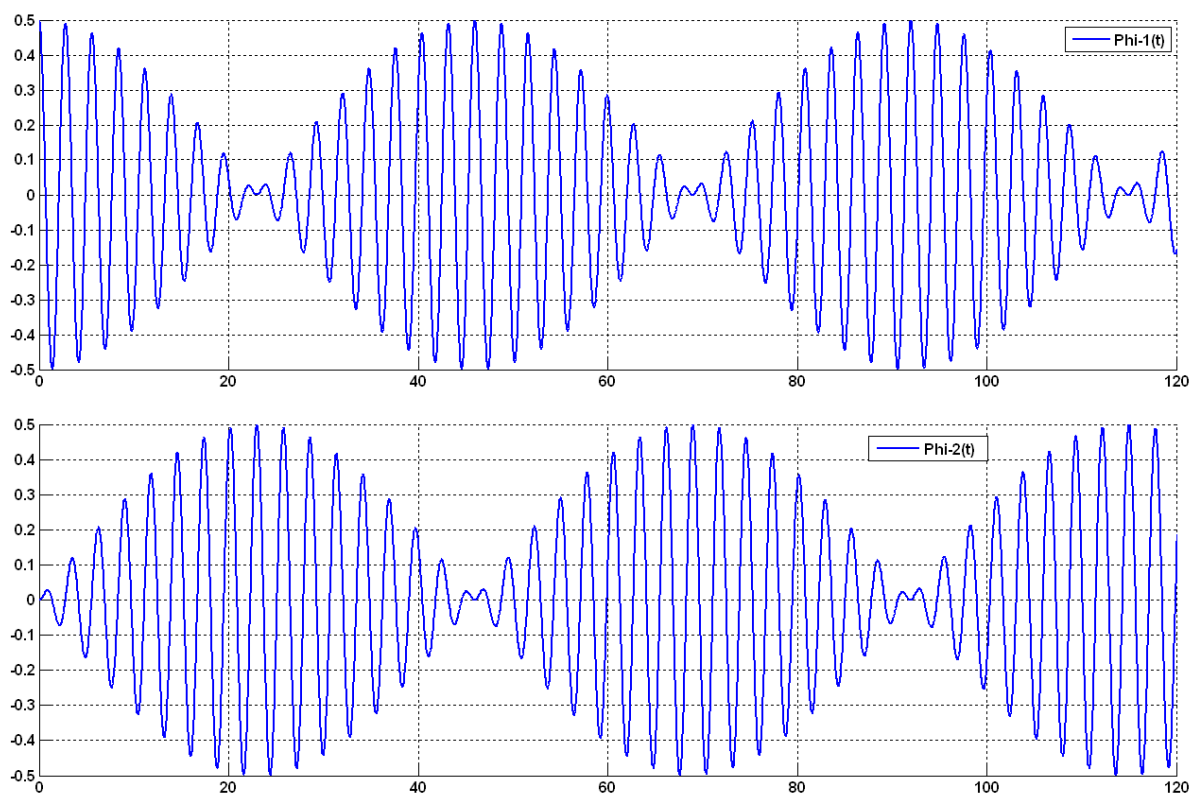


Abb. 3 Zwei identische Pendel mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_1(0) = 0,5 \quad \text{Die restlichen 3 Anfangsbedingungen sind Null.}$$

und mit den Parametern

$$m_1 = m_2 = 2 \text{ kg} \quad l_1 = l_2 = 2 \text{ m} \quad D = 4 \text{ N/m} \quad \text{Hebelarm } l\text{-K} = 0,8 \text{ m}$$

führen Schwebungen aus.

Besonderheiten des Systems

Zwei identische, schwach gekoppelte Pendel führen **Schwebungen** aus, wenn man ein Pendel in der Gleichgewichtslage festhält, zugleich das andere Pendel auslenkt und dann beide Pen-

del mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit loslässt. Die für eine Schwebung erforderlichen Anfangsbedingungen lauten daher z. B.:

$$\varphi_1(0) \neq 0 \quad \varphi_2(0) = 0 \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Animation

Die Länge der Feder wird bei der Animation automatisch so groß gewählt, dass die Feder immer nahezu horizontal liegt. Bei langer Feder kann die Zahl der Federwindungen sehr groß werden; dann muss der Benutzer einige Sekunden warten, bis das erste Bild der gekoppelten Pendel auf dem Bildschirm erscheint.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 13-1.