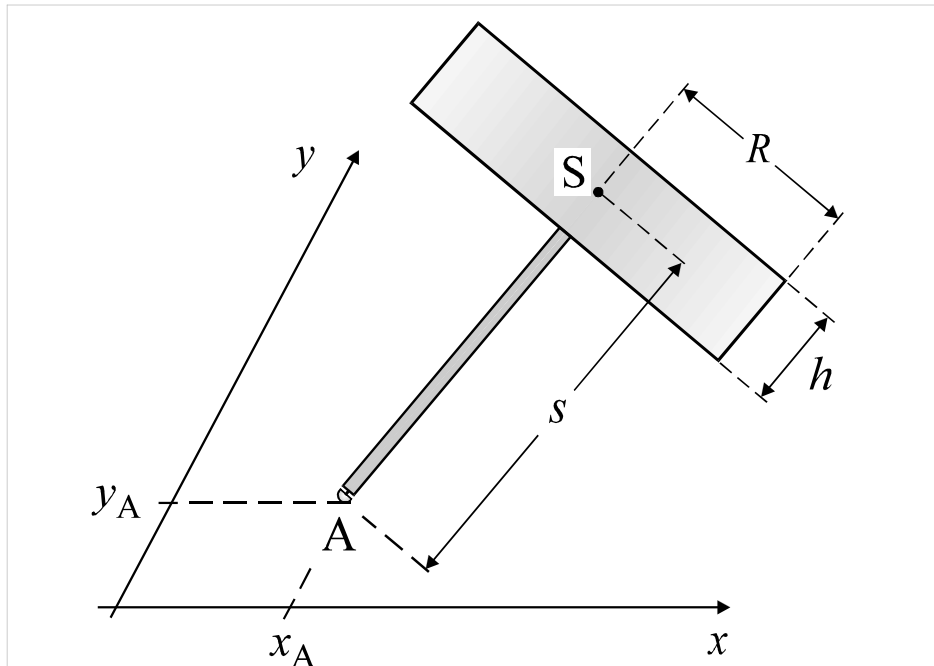


## Rollkreisel



**Abb. 1** Der Rollkreisel ist ein symmetrischer Kreisel, an dessen masseloser Stange eine kleine, drehbare Halbkugel ohne Schlupf und ohne Reibungsverluste über den Boden rollt. Die Variablen  $x_A, y_A$  sind die Koordinaten des Auflagepunktes A der kleinen Halbkugel.

Ein **rotationssymmetrischer** Kreisel besteht aus einem schweren Zylinder mit Masse  $m$  und Hauptträgheitsmomenten  $I_1, I_3$  bzgl. Drehungen um den Schwerpunkt. Auf der Zylinderachse ist eine dünne, (nahezu) masselose Stange befestigt, die an ihrem unteren Ende eine **sehr kleine, drehbare Halbkugel** mit vernachlässigbarem Radius trägt. Der Schwerpunkt des Kreisels liegt im Mittelpunkt S des Zylinders und hat vom Auflagepunkt A den Abstand  $s$ .

Die Halbkugel kann sich reibungsfrei um die Kreiselachse drehen. Sie rollt **ohne Schlupf** und ohne Energieverluste über den Boden. *Die Rollrichtung steht senkrecht auf der Ebene, die durch die dünne Kreiselstange und die vertikale Hochachse aufgespannt wird.* Die Koordinaten des Auflagepunktes sind  $x_A, y_A$ . Die Orientierung des Kreisels wird durch die **Eulerwinkel**  $\varphi, \vartheta, \psi$  gegeben:

- Der Präzessionswinkel  $\varphi$  ist der Winkel zwischen der y-Achse und der Projektion der Symmetrieachse auf den Boden.
- Der Neigungswinkel  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen der Hochachse (inertiale z-Achse) und der Symmetrieachse des Rollkreisels.
- Der Eigenrotationswinkel  $\psi$  beschreibt die Drehung um die Symmetrieachse.

Radius  $R$  und Höhe  $h$  des Zylinders ergeben sich wie folgt aus der Masse  $m$  und den Hauptträgheitsmomenten  $I_1, I_3$  :

$$R = \sqrt{\frac{2 I_3}{m}} \quad h = \sqrt{\frac{12 I_1}{m} - \frac{6 I_3}{m}}$$

Nach Abb. 1 ist die Stangenlänge gleich  $s - h/2$ .

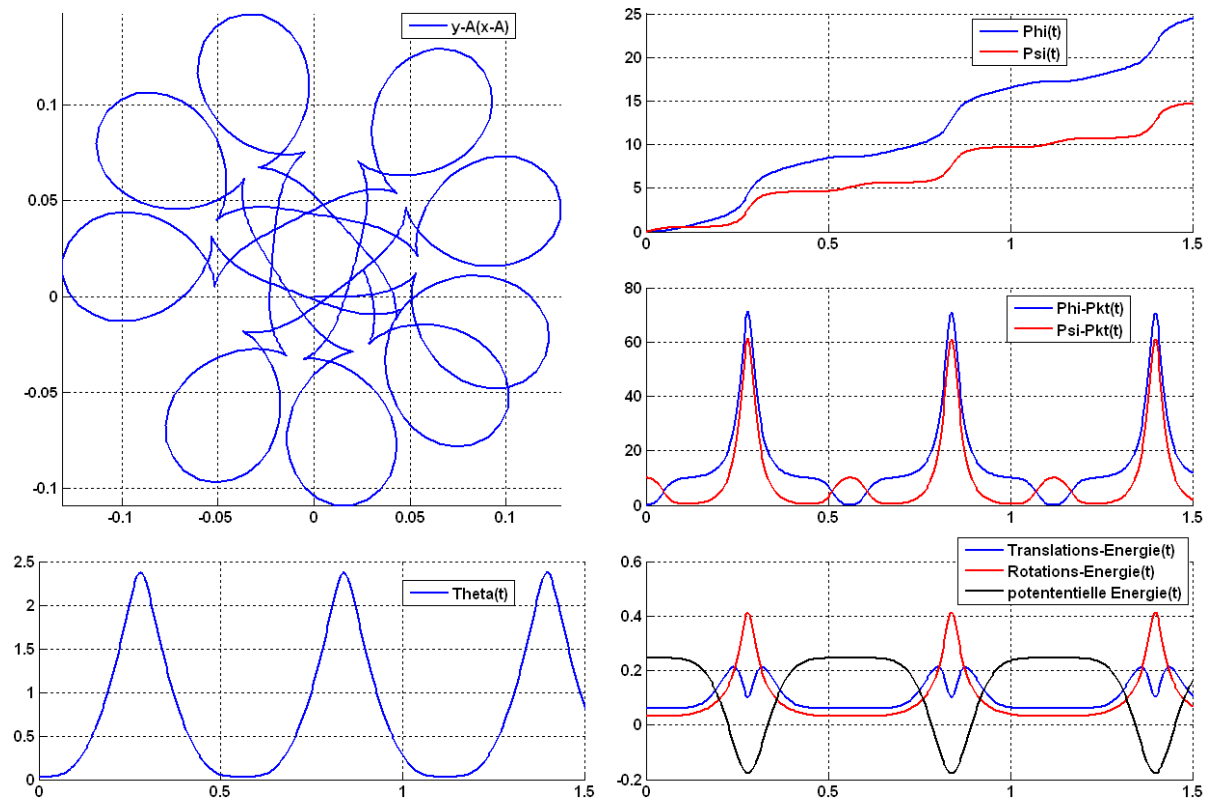
Beachte: Ein Hauptträgheitsmoment ist immer kleiner als die Summe der beiden anderen Hauptträgheitsmomente.

**Differentialgln.** (abgekürzt Dgln.) Die 5 Dgln. lauten:

$$\ddot{\phi} = -\frac{1}{I_1 \sin^2 \vartheta} \left[ 2 I_1 \dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta - I_3 \dot{\vartheta} \sin \vartheta (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \right]$$

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta +$$

$$\frac{1}{I_1 + m s^2} \left[ m s \dot{\phi} \dot{x}_A \frac{\cos \vartheta}{\cos \varphi} - I_3 \dot{\phi} \sin \vartheta (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) + m g s \sin \vartheta \right]$$



**Abb. 2** Die Kurve links oben zeigt die vom Auflagepunkt gefahrene Kurve  $y_A(x_A)$  im vollen Zeitintervall  $[0; 5\text{s}]$ . Die restlichen 4 Fenster zeigen zeitabhängige Kurven im kleineren Teilintervall  $[0; 1,5\text{s}]$ . Da der Neigungswinkel  $\vartheta$  zeitweise größer ist als  $\pi/2$ , dringt der Kreisel zeitweise in den Fußboden ein.

Auch bei anderen Berechnungen zeigen sich oft sehr reizvolle Kurven  $y_A(x_A)$ .

$$\ddot{\psi} = -\ddot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

$$\ddot{x}_A = -\dot{\varphi} \dot{x}_A \tan \varphi - s \ddot{\varphi} \cos \varphi \sin \vartheta - 2 s \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \varphi \cos \vartheta$$

$$\dot{y}_A = \dot{x}_A \tan \varphi$$

Singularitäten treten auf für  $\sin \vartheta = 0$  und für  $\cos \varphi = 0$ . Die Winkel  $\varphi = \pi/2 \pm n\pi$  treten bei den Bewegungen ständig auf.

## Animation

Wenn der Neigungswinkel  $\vartheta$  zu groß wird – in vielen Rechnungen sogar größer als  $\pi/2$  –, dann taucht der Rollkreisel in den Fußboden ein. Eine natürliche Bewegung und eine Animation sind dann natürlich nicht mehr möglich.

## Literatur

Literatur ist mir nicht bekannt.