

Schwingendes Jo-Jo

Das Jo-Jo ist eines der ältesten Spielzeuge der Welt. Zwei Scheiben stecken auf einer gemeinsamen Achse mit Radius R . Scheiben und Achse haben zusammen die Masse m und das Trägheitsmoment I_S für Drehungen um die Symmetrieachse.

Auf der Achse ist ein sehr dünner, masseloser, nicht dehnbarer Faden der Länge l aufgewickelt, dessen oberes Ende (in diesem System) von der **ruhenden Hand** gehalten wird und dessen anderes Ende fest mit der Achse verbunden ist. Das teilweise aufgewickelte Jo-Jo wird bei gespannter Schnur losgelassen und wickelt sich mit zunehmender Geschwindigkeit ab. Unten angekommen wickelt es sich wieder auf und steigt empor. Reibungsverluste werden vernachlässigt.

Differentialgl.n. (abgekürzt Dgln.)

Die beiden Winkel φ_1, φ_2 sind die *generalisierten Koordinaten*.

Folgende Abkürzung werden wir häufig gebrauchen:

$$k := \frac{1}{1 + \frac{I_S}{m R^2}} \quad (1)$$

Die Bewegung des Jo-Jos lässt sich in Abhängigkeit von den Winkeln in drei Phasen einteilen.

1. Phase : $\varphi_2 \geq \varphi_1$

Das Jo-Jo rollt auf der rechten Seite des Fadens (siehe Abb. 3). Die Länge des nicht aufgewickelten Fadenanteils beträgt

$$r = l - R(\varphi_2 - \varphi_1) \quad l = \text{Fadenlänge}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = R(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)$$

Die Transformationsgl.n. lauten:

$$x_S = r \sin \varphi_1 + R \cos \varphi_1$$

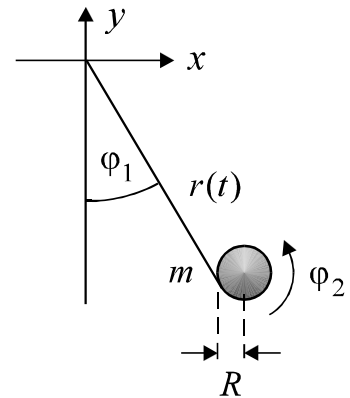


Abb. 1 Das Jo-Jo schwingt in der vertikalen x,y -Ebene und wickelt sich dabei auf der dargestellten Achse auf und ab.

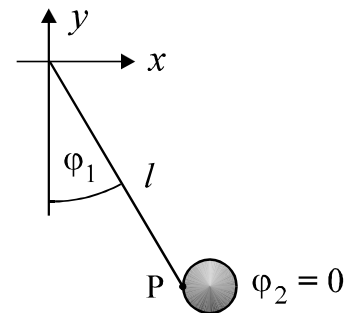


Abb. 2 Der Winkel φ_2 ist Null, wenn der Faden vollständig abgewickelt ist und sich der Befestigungspunkt P des Seiles links vom Schwerpunkt befindet.

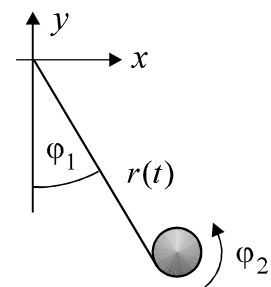


Abb. 3 Jo-Jo in Phase 1.

$$y_S = -r \cos \varphi_1 + R \sin \varphi_1$$

$$\Rightarrow \dot{x}_S = \dot{r} \sin \varphi_1 + r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - R \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1$$

$$\dot{y}_S = -\dot{r} \cos \varphi_1 + r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + R \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich nun zu

$$L = \frac{m R^2}{2 k} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2} \left[l + R (\varphi_1 - \varphi_2) \right]^2 \dot{\varphi}_1^2 + m g \left[l \cos \varphi_1 + R (\varphi_1 - \varphi_2) \cos \varphi_1 - R \sin \varphi_1 \right]$$

Die Lagrange gln. lauten für **Phase 1** :

$$\ddot{\varphi}_1 = - \frac{1}{l + R (\varphi_1 - \varphi_2)} \left[R (\dot{\varphi}_1 - 2 \dot{\varphi}_2) \dot{\varphi}_1 + g \sin \varphi_1 \right] \quad \text{für } \varphi_2 \geq \varphi_1 \quad (1a)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = - \frac{k}{R} \left[\{ l + R (\varphi_1 - \varphi_2) \} \dot{\varphi}_1^2 + g \cos \varphi_1 \right] \quad \text{für } \varphi_2 \geq \varphi_1 \quad (1b)$$

Die Dgl. (1a) hat eine Singularität für $r = l + R (\varphi_1 - \varphi_1) = 0$.

2. Phase : $\varphi_1 - \pi < \varphi_2 < \varphi_1$

In dieser Phase ist der Faden *vollständig abgewickelt* (Siehe Abb. 4).

Die Transformations gln. lauten:

$$x_S = l \sin \varphi_1 + R \cos \varphi_2$$

$$y_S = -l \cos \varphi_1 + R \sin \varphi_2$$

$$\Rightarrow \dot{x}_S = l \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - R \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2$$

$$\dot{y}_S = l \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + R \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2$$

Die Lagrangefunktion ergibt sich nun zu

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m R^2}{2 k} \dot{\varphi}_2^2 + m l R \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin (\varphi_1 - \varphi_2) + m g \left[l \cos \varphi_1 - R \sin \varphi_2 \right]$$

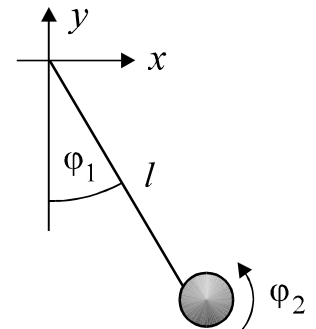


Abb. 4 Jo-Jo in Phase 2.

Die Lagrange gln. lauten für **Phase 2** :

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{R}{l} \left[\ddot{\varphi}_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{g}{R} \sin \varphi_1 \right] \quad \text{für } \varphi_1 - \pi < \varphi_2 < \varphi_1 \quad (2a)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = k \frac{l}{R} \left[\ddot{\varphi}_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{g}{l} \cos \varphi_2 \right] \quad \text{für } \varphi_1 - \pi < \varphi_2 < \varphi_1 \quad (2b)$$

Für die numerische Lösung der Dgln. (2a/b) rechnen wir eine Dgl. in expliziter Form aus:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{1 - k \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} & \left[-k \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \left\{ \dot{\varphi}_1^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{g}{l} \cos \varphi_2 \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{R}{l} \dot{\varphi}_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{g}{l} \sin \varphi_1 \right] \end{aligned} \quad (2a')$$

In der Dgl. (2b) ist $\ddot{\varphi}_1$ nach Gl. (2a') bekannt; daher muss Dgl. (2b) bei der numerischen Lösung nicht explizit sein. Wegen $k < 1$ haben diese Dgln. keine Singularität.

3. Phase : $\varphi_2 \leq \varphi_1 - \pi$

Das Jo-Jo rollt auf der linken Seite des Fadens (siehe Abb. 5).

Die Länge des nicht aufgewickelten Fadenanteils beträgt

$$r = l + R(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = R(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

Die Transformationsgln. lauten:

$$x_S = r \sin \varphi_1 - R \cos \varphi_1$$

$$y_S = -r \cos \varphi_1 - R \sin \varphi_1$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_S = \dot{r} \sin \varphi_1 + r \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + R \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1$$

$$\dot{y}_S = -\dot{r} \cos \varphi_1 + r \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - R \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1$$

Die Lagrangefunktion ist

$$\begin{aligned} L = \frac{m R^2}{2} \left(1 + \frac{I_S}{m R^2} \right) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{m}{2} [l + R(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi)]^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ m g [l \cos \varphi_1 + R(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi) \cos \varphi_1 + R \sin \varphi_1] \end{aligned}$$

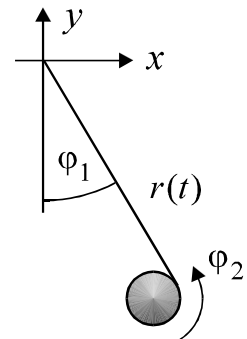


Abb. 5 Jo-Jo in Phase 3.

Die Lagrange gln. lauten für **Phase 3** :

$$\ddot{\varphi}_1 = - \frac{1}{l + R(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi)} \left[R(2\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)\dot{\varphi}_1 + g \sin \varphi_1 \right] \quad \text{für } \varphi_2 \leq \varphi_1 - \pi \quad (3a)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{k}{R} \left[\{l + R(\varphi_2 - \varphi_1 + \pi)\} \dot{\varphi}_1^2 + g \cos \varphi_1 \right] \quad \text{für } \varphi_2 \leq \varphi_1 - \pi \quad (3b)$$

Die Dgl. (3a) hat eine Singularität für $r = 0$.

Berechnung der Fadenkraft

Die Fadenkraft berechnet sich mit dem Drehimpulssatz.

In **Phase 1** ($\varphi_2 \geq \varphi_1$) lautet die Fadenkraft:

$$I_S \ddot{\varphi}_2 = -R F \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{I_S}{R} \ddot{\varphi}_2$$

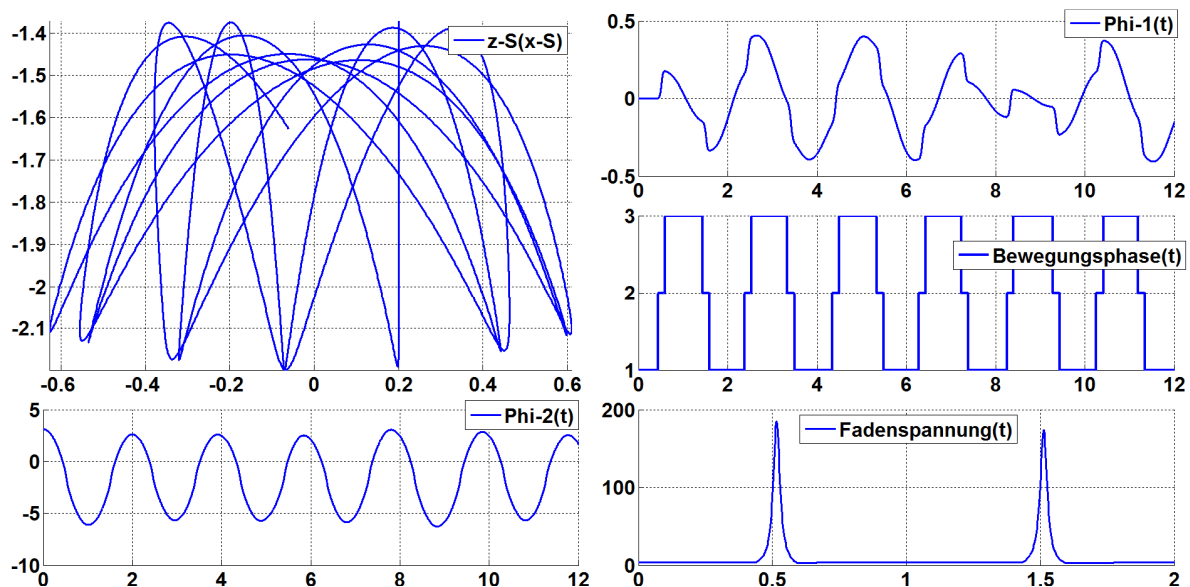


Abb. 6 Schwingung eines reibungsfreien Jo-Jos. Beachte, dass die **Fadenkraft rechts unten in dem verkleinerten Zeitintervall** [0 s , 2 s] dargestellt wird.

Das Jo-Jo läuft die ersten 0,44 s senkrecht nach unten, weil der Faden bis zum Erreichen der zweiten Bewegungsphase vertikal ist ($\varphi_1(t) = 0$), so dass anfangs keine horizontalen Kräfte auf das Jo-Jo wirken.

In der Bewegungsphase 2 (Faden vollständig abgewickelt) wird das Jo-Jo stark nach oben beschleunigt, so dass die Fadenkraft in dieser Phase extrem ansteigt.

Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\varphi_2(0) = \pi \quad \text{Die drei anderen Anfangsbedingungen sind Null.}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad R = 0,2 \text{ m} \quad I_S = 0,02 \text{ kg m}^2 \quad l = 2 \text{ m}$$

In **Phase 2** ($\varphi_1 - \pi < \varphi_2 < \varphi_1$) ist die Berechnung der Fadenkraft etwas schwieriger. Nach Abb. 6 lautet der Hebelarm s der Fadenkraft:

$$s = R \sin \alpha = R \sin \left(\pi - \varphi_1 - |\varphi_2| \right) \stackrel{\varphi_2 < 0}{=} \\ = R \sin \left(\pi - \varphi_1 + \varphi_2 \right) = R \cos \left(\varphi_2 - \varphi_1 \right)$$

$$\Rightarrow F = - \frac{I_S}{R \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \ddot{\varphi}_2$$

In **Phase 3** ($\varphi_2 \leq \varphi_1 - \pi$) lautet die Fadenkraft:

$$I_S \ddot{\varphi}_2 = R F \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I_S}{R} \ddot{\varphi}_2$$

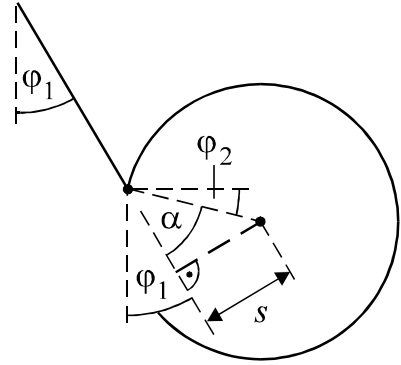


Abb. 6 Der Hebelarm s wird mit dieser Abb. berechnet.

Besonderheiten des Systems

Die Anfangsbedingungen dürfen nicht so gewählt werden, dass die Fadenspannung im Laufe der Bewegung negativ wird.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage.

In Aufgabe 9–6 wird lediglich eine vereinfachte Bewegung des Jo-Jos untersucht: Das Jo-Jo läuft nur *vertikal* auf und ab, macht also keine seitlichen Schwingungen ($\varphi_1(t) = 0$). Eine vertikale Bewegung wird näherungsweise realisiert, wenn $\varphi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) = 0$ ist und wenn die *nicht* aufgewickelte Fadenlänge zwischen der Hand des Spielers und dem Jo-Jo immer wesentlich größer ist als der Radius R der Jo-Jo-Achse.

In Aufgabe 9–6 wird die Fadenkraft analytisch berechnet. Außerdem wird diskutiert, wie der Jo-Jo-Spieler die durch Reibung entstehenden Energieverluste durch geeignete Handbewegungen ausgleichen kann.