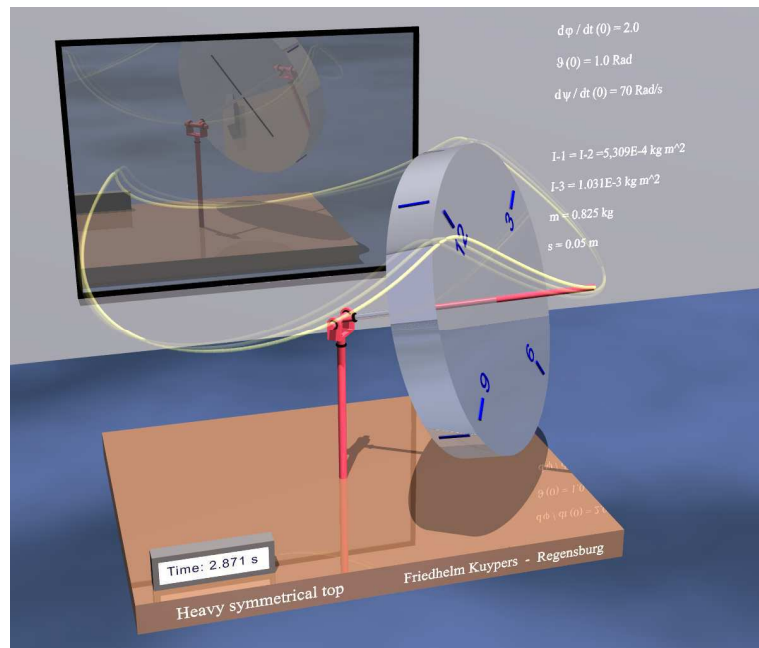
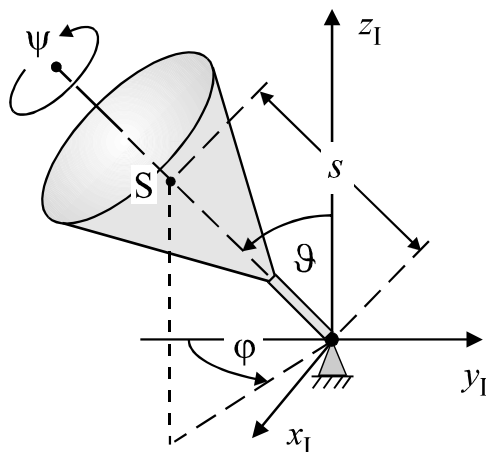


# Schwerer Kreisel



**Abb. 1** Momentaufnahme einer fotorealistischen POV-Ray-Animation. Der symmetrische, reibungsfrei laufende Kreisel wird hier als Zylinder dargestellt. Der gelbe Kondensstreifen ist die Locuskurve.



**Abb. 2** Bei der *einfachen* MatLab-Animation wird der symmetrische Kreisel ( $I_1 = I_2$ ) als Kreiskegel dargestellt, dessen Spitze evtl. über einen dünnen, masselosen Stab mit dem Drehpunkt im Koordinatenursprung verbunden ist. Der Schwerpunkt S des Kegels hat den Abstand  $s$  vom Drehpunkt und den Abstand  $3/4 h$  von der Kegelspitze (mit  $h$  = Höhe des Kegels). Für  $s < 3 h/4$  liegt der Drehpunkt innerhalb des Kreiskegels.

Ein unsymmetrischer Kreisel wird bei der einfachen MatLab-Animation als Ellipsenkegel dargestellt.

Ein schwerer, unsymmetrischer Kreisel rotiert **reibungsfrei** im homogenen Schwerfeld um einen festen Drehpunkt, der im Koordinatenursprung liegt. Der Schwerpunkt des Kreisels hat den Abstand  $s$  vom Drehpunkt. Orientierung und Bewegung des Kreisels werden durch die drei Eulerschen Winkel  $\varphi, \vartheta, \psi$  beschrieben.

Vor numerischen Rechnungen müssen neben der Masse  $m$  und dem Abstand  $s$  des Schwerpunktes vom Drehpunkt nur noch die drei Hauptträgheitsmomente

$$I_1^{(S)}, I_2^{(S)}, I_3^{(S)} \quad \text{für Drehungen um den Schwerpunkt}$$

eingetragen werden. Beachte bei der Eingabe: *Jedes der drei Hauptträgheitsmomente muss kleiner sein als die Summe der beiden übrigen Hauptträgheitsmomente.* Eine andere Wahl ist nach den bekannten Gln. für die Hauptträgheitsmomente nicht erlaubt und ermöglicht bei der Animation keine Zeichnung des Kegels (siehe die Gln. (3a/b)).

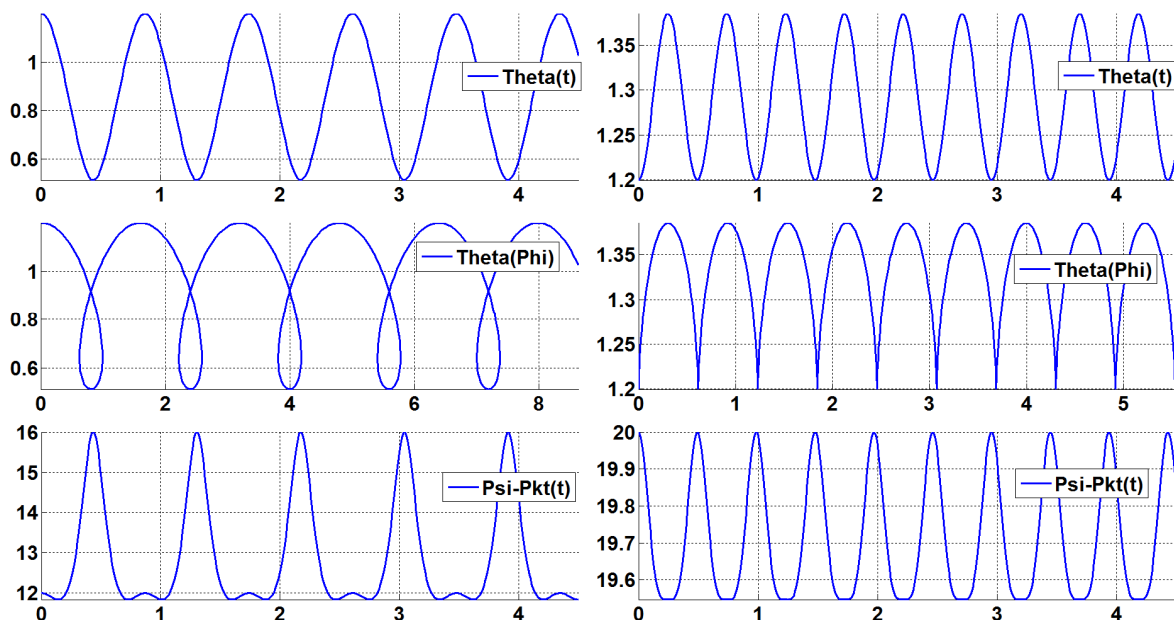
Ein unsymmetrischer Kreisel ist ein **chaotisches System**.

## Differentialgln.

Die Dgln. des *symmetrischen* Kreisels werden aufgestellt und untersucht in F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Beispiel 12.6–1.

## Animation

Bei der Animation wird der schwere Kreisel als Kegel gezeichnet, dessen ebene Grundfläche



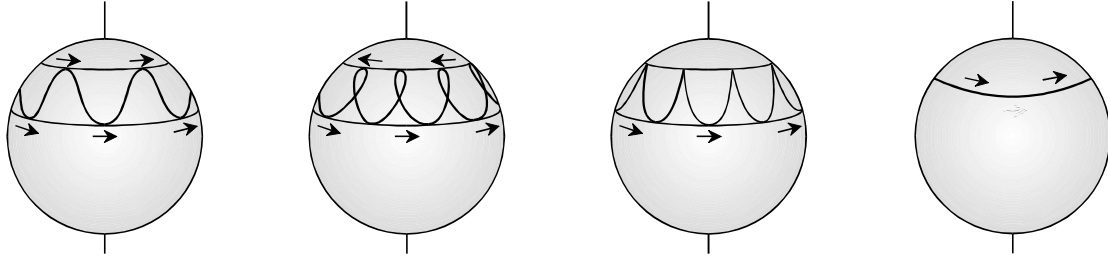
**Abb. 3** Symmetrischer Kreisel mit verschiedenen Anfangsbedingungen. Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten für die **linken drei Kurven**:

$$\dot{\phi}(0) = 4,4 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \vartheta(0) = 1.2 \quad \dot{\psi}(0) = 12 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \text{Die fünf übrigen Anfangsbedingungen sind Null.}$$

$$I_1 = I_2 = 0,005 \text{ kg m}^2 \quad I_3 = 0,004 \text{ kg m}^2 \quad m = 0,1 \text{ kg} \quad s = 0,1 \text{ m}$$

Die **rechten drei Kurven** haben andere Anfangsbedingungen und dieselben Parameter:

$$\vartheta(0) = 1.2 \quad \dot{\psi}(0) = 20 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \text{Die sechs übrigen Anfangsbedingungen sind Null.}$$



**Abb. 4** Der schwere symmetrische Kreisel hat vier verschiedene Bewegungstypen, die hier durch den Locus der Figurenachse veranschaulicht werden.

Diese Bewegungsformen werden untersucht in F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Beispiel 12.6–1.

eine Ellipse ist. Die Halbachsen dieser Ellipse haben die Längen  $R_x, R_y$ .  $h$  ist die Höhe des Kegels. Der Schwerpunkt des Ellipsen-Kegels hat den Abstand  $3/4 h$  von der Spitze.

Für *Drehungen um den Schwerpunkt* lauten die drei Hauptträgheitsmomente des Ellipsen-Kegels:

$$I_1^{(S)} = \frac{3}{80} m \left( \frac{1}{4} R_y^2 + h^2 \right) \quad I_2^{(S)} = \frac{3}{80} m \left( \frac{1}{4} R_x^2 + h^2 \right) \quad (2a)$$

$$I_3^{(S)} = \frac{3}{20} m (R_x^2 + R_y^2) \quad (2b)$$

Daraus folgen die geometrischen Abmessungen des Kegels:

$$R_x = \sqrt{\frac{10}{3m} (-I_1^{(S)} + I_2^{(S)} + I_3^{(S)})} \quad R_y = \sqrt{\frac{10}{3m} (I_1^{(S)} - I_2^{(S)} + I_3^{(S)})} \quad (3a)$$

$$h = \sqrt{\frac{40}{3m} (I_1^{(S)} + I_2^{(S)} - I_3^{(S)})} \quad (3b)$$

Mit diesen Gln. kann der Ellipsen-Kegel bei der Animation gezeichnet werden. Für  $s < 3/4 h$  liegt der Drehpunkt im Innern des Kegels.

## Literatur

Die Dgln. des *symmetrischen* Kreisels werden aufgestellt und untersucht in F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Beispiel 12.6–1.