

Taumelnder Zylinder – Kein Schlupf, harter Boden

Ein Hohlzylinder mit Außenradius R_a , Innenradius R_i und Länge l rollt und taumelt **ohne Schlupf** auf dem horizontalen, harten Boden. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei Eulerwinkel φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung des Zylinders.

Mathematisches Modell

Das Modell enthält drei Zwangsbedingungen: Zwei differentielle Rollbedingungen

$$\dot{x}_A + R_a \dot{\psi} \cos \varphi = 0$$

$$\dot{y}_A + R_a \dot{\psi} \sin \varphi = 0$$

und eine holonome Bedingung für die Höhe des Schwerpunktes:

$$z_S = R_a \sin \vartheta + \frac{l}{2} \cos \vartheta$$

Aus drei Gründen ist das Modell bei vielen (aber nicht bei allen) Rechnungen **unrealistisch**:

- Bei vielen Anfangsbedingungen verlässt der Neigungswinkel ϑ im Laufe der Berechnung den Bereich $[0, \pi/2]$, so dass der Zylinder gewissermaßen in den Boden eintaucht, wobei der Rand seiner Grundfläche immer noch ohne Schlupf auf dem Boden rollt. Hier muss der Anwender andere Anfangsbedingungen oder andere Parameter wählen oder aber die numerische Berechnung rechtzeitig beenden.

- Das Verhältnis $\frac{\text{Haftkraft}}{\text{Normalkraft}}$

ist in vielen Rechnungen zeitweise mehrere Zehnerpotenzen groß, so dass ein Haften in diesem Fall wegen der beschränkten Haftreibungszahl μ_0 in der Realität nicht möglich ist.

- Bei heftigen Nutationen (Schwankungen des Neigungswinkels ϑ) kann die vertikale Beschleunigung des Schwerpunktes kleiner als $-g$ werden¹. In diesem Fall ist die Normal-

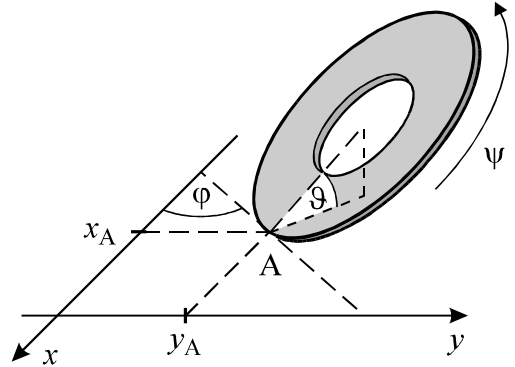


Abb. 1 Ein Hohlzylinder mit Außenradius R_a , Innenradius R_i und Länge l – letztere ist hier sehr klein –, rollt ohne Schlupf auf dem horizontalen Boden. Die Koordinaten x_A, y_A des Auflagepunktes und die drei **Eulerwinkel** φ, ϑ, ψ beschreiben Lage und Orientierung des Zylinders.

¹ Das Auftreten von *negativen* Zwangskräften bei heftigen Nutationen des Zylinders (also bei raschen Auf- und Abbewegungen des Zylinder-Schwerpunktes) kann anschaulich wie folgt begründet werden: Wir betrachten einen Sportler, der in Schuhen steht, die am Boden festgeklebt sind. Jetzt soll der Sportler die Beine mit Muskelkraft so schnell anziehen, also so schnell in die Hocke gehen, dass sein Schwerpunkt schneller als mit der Erdbeschleunigung nach unten beschleunigt wird: $\ddot{z}_S < -g$. In

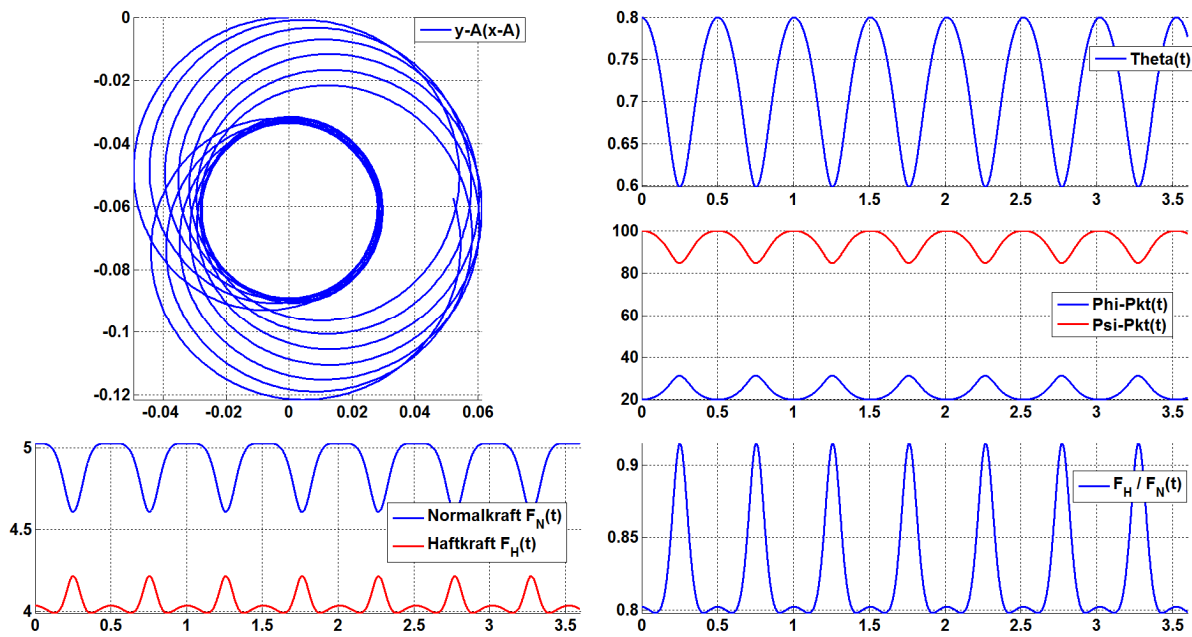


Abb. 2 Diese Kurven zeigen eine realistische Bewegung: Die Normalkraft $F_N(t)$ ist positiv und das Verhältnis „Haftkraft F_H / Normalkraft F_N “ ist kleiner als 0,92, so dass Rollen ohne Schlupf für eine Haftreibungszahl $\mu_0 > 0,92$ möglich ist.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\dot{\phi}(0) = 20 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \vartheta(0) = 0,8 \text{ Rad} \quad \dot{\psi}(0) = 100 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \text{Die 5 restlichen Anfangsbed. sind Null.}$$

$$m = 0,5 \text{ kg} \quad l = 0,1 \text{ m} \quad R_a = 0,01 \text{ m} \quad R_i = 0,008 \text{ m} \quad c_{\text{Luft}} = 0$$

kraft des Zylinders auf den Boden negativ, so dass der Zylinder eigentlich vom Boden abheben will.

Es ist daher empfehlenswert, bei den graphischen Untersuchungen der Lösungen u. a. auch immer die Kurven der Haftkraft $F_H(t)$ und der Normalkraft $N(t)$ zu betrachten.

Die letzten zwei genannten Probleme lassen sich durch folgende Änderungen des Modells beheben:

2. Problem: Der Zylinder rollt nicht nur, sondern gerät bei Überschreiten der maximalen Haftreibungskraft ins *Rutschen*.

3. Problem: Der Boden ist weich (lineare Rückstellkraft) und der Zylinder kann in die Luft springen.

Differentialgl.n. (abgekürzt Dgln.)

Das Reibungsmoment der Rollbewegung und vor allem der Luftwiderstand können kaum realistisch beschrieben werden. Daher wird nur die Luftreibung durch einen groben Ansatz

diesem Fall ist die Normalkraft auf den Boden *negativ*, d. h. die Schuhe bleiben nur wegen der Verklebung auf dem Boden; ohne Leim würden die Schuhe vom Boden abheben.

beschrieben. Danach soll die Luftreibung den Winkelbewegungen ein **laminares Reibmoment** entgegensetzen, wobei diejenigen Reibungsmomente vernachlässigt werden, die parallel sind zur Symmetrieachse des Zylinders. Die Komponente der Winkelgeschwindigkeit, die parallel zur Symmetrieachse des Zylinders ist, soll also keinen Beitrag zu Reibungsverlusten liefern. Demnach wird die Luftreibung durch folgende Dissipationsfunktion beschrieben:

$$P = \frac{c_{\text{Luft}}}{2} \omega^2 = \frac{c_{\text{Luft}}}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \vartheta)$$

Der Einfachheit halber werden die Reibungskräfte der Luft, die die Schwerpunktbewegung hemmen, vernachlässigt.

Bemerkung: Dieser Reibungsansatz wurde nur wegen seiner Einfachheit gewählt und erhebt nicht den Anspruch, realistisch zu sein. Andere Reibungsansätze ändern das Verhalten des rollenden Zylinders wahrscheinlich nicht wesentlich.

Die expliziten Dgln. sind recht lang und werden hier nicht genannt. Sie sind sehr ähnlich zu den Dgln. der *ohne Schlupf und ohne Reibungsverluste rollenden Münze*; bei der rollenden Münze ist $l \ll R_a$. Die rollende Münze wird ausführlich untersucht in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-Auflage, Aufgabe 12–18.

Die *expliziten* Dgln. für $\ddot{\phi}$ und $\ddot{\psi}$ enthalten Terme, die proportional zu $1/\sin \vartheta$ sind. Folglich haben die expliziten Dgln. eine **Singularität** für $\sin \vartheta = 0$, die die numerischen Lösungsverfahren von MatLab zum Absturz bringen kann.

Die Dgln. können allgemein nicht analytisch gelöst werden.

Animation

Bei den Animationen wird die Spur der Münze am Boden aufgezeichnet.

Literatur

- Lorne A. Whitehead & Frank L. Curzon: Spinning objects on horizontal planes, American Association of Physics Teachers, 1983, 449-452.
- Karl C. Mamola: A Rotational Dynamics Demonstration, The Physics Teacher, 32, April 1994, 216-219.

Die Dgln. und ihre Herleitung sind sehr ähnlich zu den Dgln. der **ohne Schlupf rollenden Münze** und deren Herleitung.

Die Dgln. der ohne Schlupf und ohne Reibungsverluste rollenden Münze werden mit Hilfe der Lagrange gln. 1. Art ausführlich hergeleitet in: F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12–18.