

Doppelsternsystem

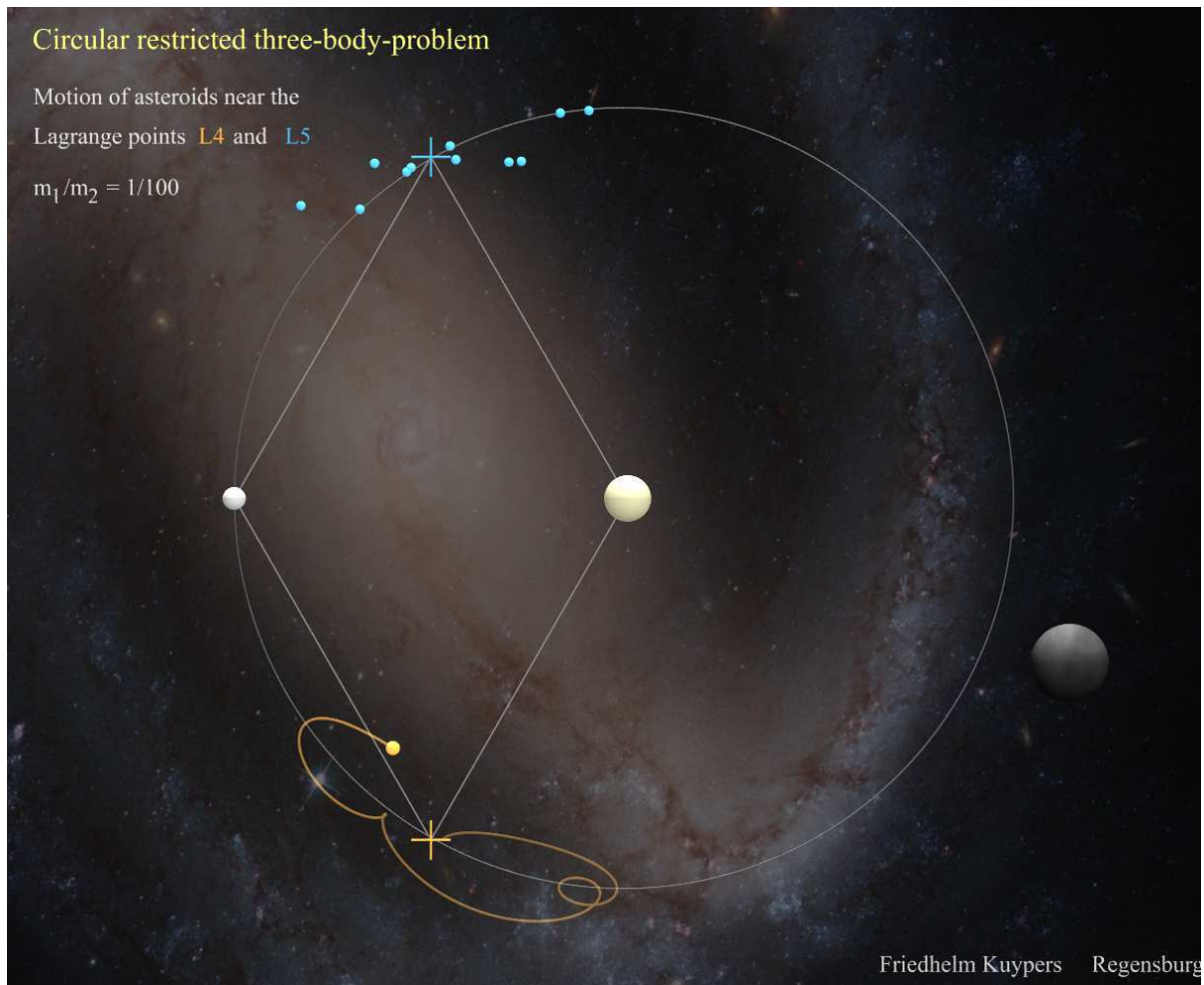


Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Die Kamera steht in einem Bezugssystem, das fest mit der gelben Sonne und dem weißen Planet verbunden ist und im Inertialsystem im Gegen-uhreigersinn um den Schwerpunkt des Systems Sonne–Planet rotiert. Daher dreht sich die Spiralgalaxie im Hintergrund im Uhrzeigersinn.

In der Umgebung des türkisen Lagrangepunktes L_5 laufen elf Asteroiden auf verschlungenen, weitreichenden Bahnen. In der Umgebung des orangen Lagrangepunktes L_4 bewegt sich ein einzelner gelber Asteroid und zieht eine orange Spur hinter sich her.

Rechts unten läuft im Vordergrund ein dunkler, *kräftefreier* Planet vorbei. Seine (im Inertialsystem gleichförmige) Bewegung sieht im rotierenden Bezugssystem ungleichförmig aus.

Der Hintergrund zeigt die „Barred Spiral Galaxie NGC 1300“. Die Aufnahme wurde vom NASA Raumteleskop **Hubble** aufgenommen und von der Internetseite www.hubblesite.org heruntergeladen. Im ersten Teil der POV-Ray-Animation ist kurzzeitig der Asteroid Vesta zu sehen; auch er wurde von Hubble aufgenommen und von der genannten Internetseite heruntergeladen.

Exoplaneten und Nachweismethoden

Der erste extrasolare Planet – auch „**Exoplanet**“ genannt – wurde 1995 entdeckt. Am 13.11.2009 waren **405 extrasolare Planeten** in 343 Sternsystemen sicher bekannt und katalogisiert:

- 299 Sternsysteme mit 1 Exoplanet
- 30 Sternsysteme mit 2 Exoplaneten
- 11 Sternsysteme mit 3 Exoplaneten
- 2 Sternsysteme mit 4 Exoplaneten
- 1 Sternsystem mit 5 Exoplaneten

In den Jahren 2007 und 2008 wurden jeweils über 60 Exoplaneten nachgewiesen. Die meisten der entdeckten Exoplaneten sind Gasriesen – oft mit mehreren Jupitermassen –, die ihren Zentralstern auf einer sehr engen Umlaufbahn umkreisen. Solche Himmelskörper heißen „**Heiße Jupiter**“ (Hot Jupiters). Ende 2009 hat der leichteste, bis dahin entdeckte Exoplanet eine 1,9-fache Erdmasse und der kleinste einen 1,5-fachen Erdradius. Mit absoluter Sicherheit wurde bisher noch kein erdähnlicher Planet in einer bewohnbaren Zone entdeckt. Aufgrund der rasch fortschreitenden Technologie ist aber in Zukunft auch die Entdeckung zahlreicher erdähnlicher Planeten in habitablen Zonen zu erwarten.

Bisher wurden **über 10 Exoplaneten in Doppelsternsystemen** gefunden.¹

Bislang konnte man die meisten Exoplaneten nur **indirekt** nachweisen. Die ersten beiden Nachweis-Methoden nutzen den **Einfluss der Planeten auf ihren Zentralstern**:

Radialgeschwindigkeits-Methode : Mit dieser Methode wurden bisher die meisten Exoplaneten entdeckt. Stern und Planet kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt, so dass sich der Stern periodisch von der Erde entfernt und der Erde nähert – wenn die Bahnebene nicht gerade senkrecht auf unserer Blickrichtung steht. Die durch den Doppler-Effekt verursachten

¹ Besonders bemerkenswert ist die Entdeckung eines Exoplaneten im 45 Lichtjahre entfernten Doppelsternsystem Gamma Cephei. Der Abstand der beiden Sonnen ist gleich dem Abstand Sonne-Neptun $\hat{=}$ 30 AE, so dass dieses System in unser Sonnensystem passen würde. Der Planet mit 1,76-facher Jupitermasse umkreist den schwereren der beiden Sterne mit einer Umlaufzeit von 2,47 Jahren und in einer Entfernung, die 1,4 mal so groß ist wie der Abstand Sonne-Mars $\hat{=}$ 2,13 AE.

Hinweis: AE ist die Abkürzung für „Astronomische Einheit“. 1 AE ist ungefähr der mittlere Abstand Erde-Sonne und beträgt etwa $1,5 \cdot 10^{11}$ m $\hat{=}$ 8,3 Lichtminuten.

Entdeckt wurde auch ein Sonnensystem mit drei Sonnen und einem Planeten. Zwei relativ nahe benachbarte Sonnen umkreisen eine weiter entfernte dritte Sonne. Die dritte Sonne wird von einem jupitergroßen Planet in einer engen Umlaufbahn vom Typ S umkreist.

Schwankungen im Spektrum des Sterns werden auf der Erde registriert. Bereits Geschwindigkeitsänderungen von wenigen Kilometern pro Stunde sind messbar.

Transit-Methode : Wenn der Planet – von der Erde aus gesehen – vor seinem Stern vorbeiläuft, also den Stern teilweise verdeckt, dann nimmt die auf der Erde registrierte Lichtintensität geringfügig ab. Obwohl sich Transits nur selten ereignen, wurden mit dieser Methode bisher – nach der Radialgeschwindigkeits-Methode – die meisten Exoplaneten entdeckt.

Um als Planetenkandidat zu gelten, der mit einer anderen Methode bestätigt werden sollte, muss ein möglicher Transit mindestens dreimal gemessen werden. Daher würden Aliens für die Entdeckung der Erde mit dieser Methode wenigstens drei Jahren benötigen.

Das am 7.3.2009 gestartete NASA-Hochleistungsteleskop „[Kepler](#)“ hat einen 1,4 Meter großen Spiegel und soll mit dieser Methode mehrere Jahre lang simultan in 100.000 Sternsystemen nach erdähnlichen Planeten suchen. Kepler erfasst noch Helligkeitsschwankungen von 0,01%. Aus der Stärke der Schwankung kann der Planetendurchmesser ermittelt werden.

Eine weitere indirekte Nachweis-Methode nutzt die [Strahlung von Hintergrundsternen](#):

Gravitationslinsen-Methode : Licht breitet sich in der Nähe von großen Massen nicht auf geraden, sondern gekrümmten Bahnen aus. Daher wird die scheinbare Helligkeit eines Sterns erhöht, wenn ein anderer massiver Körper vor ihm durchzieht. Dieser Prozess dauert nur wenige Stunden bis höchstens einige Tage. Dank dieses Phänomens sind in der Milchstraße bereits acht extrasolare, tausende von Lichtjahren entfernte Planeten identifiziert worden.²

Die nächste Nachweis-Methode ist eine [direkte Methode](#):

Optische Methode : Bei sehr lichtschwachen Sternen – z. B. Braunen Zwergen – konnten einige Exoplaneten auch optisch abgebildet, also direkt nachgewiesen werden.

Doppelsternsysteme mit Exoplaneten

Es wird geschätzt, dass [deutlich mehr als die Hälfte der etwa 200 Milliarden Sternsysteme in unserer Milchstraße Doppelsternsysteme](#) sind, also Sternsysteme, in denen zwei Sonnen um den gemeinsamen Schwerpunkt umlaufen. Die Umlaufzeiten der Sonnen liegen zwischen einem Tag und Jahrtausenden.

² Bisher ist noch nicht eindeutig geklärt, ob mit dieser Methode auch Exoplaneten in der 2 Millionen Lichtjahre entfernten Nachbar-Galaxie Andromeda gefunden werden können. Denn selbst bei den größten Teleskopen nimmt jeder Pixel auf dem Bildsensor das Licht von tausenden Sternen auf. Es ist sehr schwierig, innerhalb dieser Vielzahl von Sternen die extrem kleinen Helligkeitsschwankungen eines einzelnen Sterns nachzuweisen.

Ein internationales Team von Astrophysikern unter Leitung von Prof. Jetzer an der Uni Zürich konnte theoretisch nachweisen, dass mit den modernsten Geräten Gravitationslinsen-Effekte von extragalaktischen Planeten beobachtbar sind. Möglicherweise haben Jetzer und seine Kollegen im Jahr 2004 einen extragalaktischen Planeten von der sechsfachen Größe des Jupiters in Andromeda gefunden.

Castor, der hellste Stern im Sternbild „Zwillinge“, besteht sogar aus zwei Doppelsternen, also insgesamt aus vier Sternen. Die Umlaufzeiten innerhalb der beiden Doppelsterne betragen 3 und 9 Tage. Die beiden Paare haben eine Umlaufzeit von 450 Jahren.

Für die Astronomen ist folgende Frage besonders interessant: „Können Doppelsternsysteme auch Planeten haben und – wenn ja – bewegen sich diese Planeten über Milliarden Jahre auf stabilen Bahnen?“

Seit etwa 100 Jahren wissen wir, dass das **Dreikörpersystem der Gravitation ein chaotisches System ist**, dessen 9 Dgln. nicht analytisch lösbar sind.

Numerische Rechnungen zeigen, dass Testkörper, die mit wahllosen Anfangsbedingungen in Doppelsternsystemen ausgesetzt werden, *in der Regel* einige **chaotische** Schleifen fliegen (Siehe Abb. 2) und anschließend entweder *auf eine der beiden Sonnen stürzen* oder nach einer starken Sonnenannäherung *aus dem Doppelsternsystem herausgeschleudert werden*. Neuere Beobachtungen und Überlegungen haben jedoch gezeigt, dass es auch stabile Planetenbahnen in Doppelsternsystemen gibt.

- Ein Planet bewegt sich so nahe bei einer Sonne, dass seine Bahn kaum von der anderen, weit entfernten Sonne beeinflusst wird. Diese Bahnen heißen „**Umlaufbahnen vom Typ S**“. Alle bisher entdeckten Planeten in Doppelsternsystemen haben S-Typ-Bahnen; umkreisen also nur einen der beiden (oder mehreren) Sterne.
- Ein Planet kreist soweit vom Doppelstern entfernt, dass die Gravitation der beiden Sterne annähernd wie die Gravitation eines Einzelsterns wirkt. Diese Bahnen heißen „**Umlaufbahnen vom Typ P**“.

Unser nächster Nachbar Alpha Centauri ist ein Doppelsternsystem in 4,35 Lichtjahren Entfernung. Alpha Centauri A ist etwas größer als unsere Sonne und von fahlgelber Farbe, Alpha Centauri B etwas kleiner und etwas lichtschwächer als unsere Sonne und hat eine hell orange Farbe. Die beiden Sterne haben eine Umlaufzeit von 80,1 Jahre. Ihr Abstand schwankt zwischen dem 11- und 36-fachen des Abstand Erde-Sonne.³

Neuere Computersimulationen zeigen, dass beide Sterne von Planeten auf stabilen Bahnen vom Typ S umrundet werden könnten. Die Bahnradien wären gleich dem 2- bis 3-fachen Abstand Erde-Sonne. Nur ein Heißer Jupiter könnte die Kreise solcher Planeten verhängnisvoll stören. Da es aber im Alpha-Centauri-System keinen Heißen Jupiter gibt – man hätte ihn längs gesehen – ist die Existenz von festen, erdgroßen Planeten in der habitablen Zone denkbar. Wasser auf den Planeten könnte vorkommen, so dass Leben möglich wäre. Zudem sind die beiden sonnenähnlichen Sterne etwas reicher an schweren Elementen, was die Existenz von Planeten wahrscheinlicher macht.

³ Neben den beiden genannten Sternen gibt es noch einen weiter entfernten Begleitstern, Proxima Centauri, der nur schwach oder gar nicht an das Doppelsternsystem gebunden ist. Teilweise wird Alpha Centauri daher als Dreifachsternsystem bezeichnet.

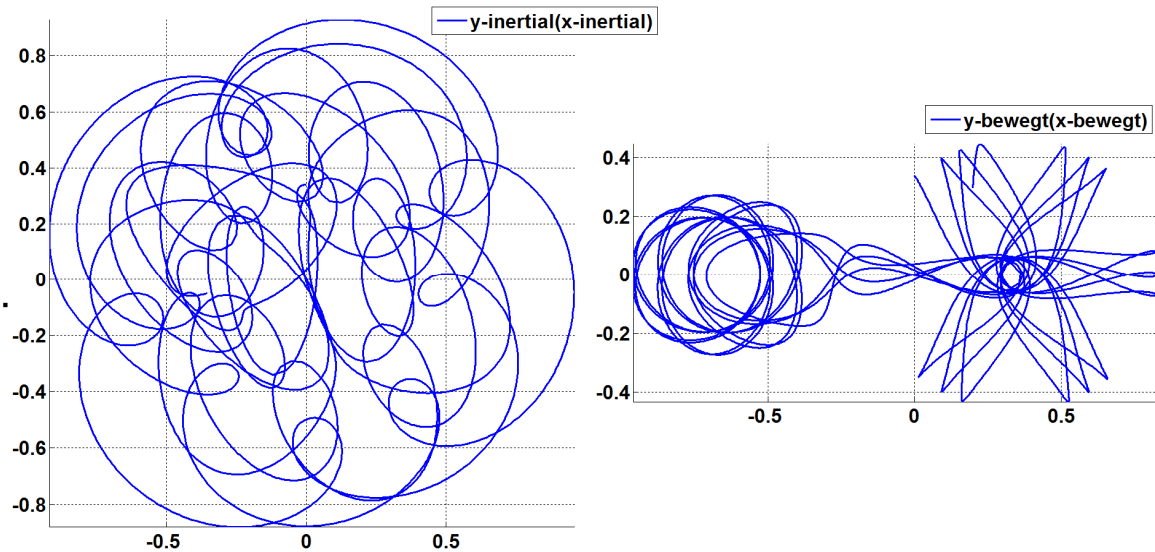


Abb. 2 Das rechte Bild zeigt die *chaotische* Planetenbahn in einem Koordinatensystem, das mit den beiden Sonnen fest verbunden ist und daher mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1$ rotiert. Die beiden (nicht dargestellten) Sonnen mit dem Massenverhältnis $m_1/m_2 = 0.5$ ruhen auf der rotierenden x-Achse mit den Koordinaten

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Man erkennt deutlich, dass sich der Planet abwechselnd um jede Sonne bewegt und dass diese Bewegung wohl kein biologisch zuträgliches Klima ermöglicht.

Das linke Bild zeigt die Planetenbahn im Inertialsystem. Die beiden (auch hier nicht dargestellten) Sonnen laufen auf Kreisbahnen mit den Radien $2/3$ und $1/3$ um den gemeinsamen Schwerpunkt, der wieder im Koordinatenursprung liegt. Hier ist die Planetenbahn viel schlechter zu beurteilen als im rechten Bild. Vor allem erkennt man nicht, in welchem Anziehungsbereich der Planet jeweils läuft.

Alpha Centauri ist also ein potentieller Kandidat für Planeten mit Leben.

DgIn. für das eingeschränkte Dreikörperproblem

Das Programm Mechanicus behandelt das sowohl analytisch als auch numerisch gut untersuchte **eingeschränkte Dreikörperproblem**, in dem zwei schwere Sonnen mit den Massen m_1, m_2 auf **Kreisbahnen** den gemeinsamen Schwerpunkt umlaufen. Ein sehr leichter Planet umläuft die beiden Sonnen. Wegen seiner geringen Masse m kann er die Bewegung der Sonnen nicht beeinflussen.

In Mechanicus ist die Bewegung der Sonnen wie folgt fest vorgegeben und kann daher vom Anwender nicht geändert werden: Die Sonnen **kreisen** in der **x,y-Ebene** mit dem gegenseitigen Abstand

$$r_1 + r_2 = 1 \quad (\text{dimensionslose Länge})$$

und mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = 1 \quad (\text{dimensionslose Zeit})$$

um den gemeinsamen Schwerpunkt S, der im Koordinatenursprung liegt.

Zur Zeit $t=0$ liegen die beiden Sonnen auf der inertialen x-Achse. Daher lauten die Koordinaten der beiden kreisenden Sonnen im Inertialsystem bei jeder Berechnung:

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Die Bewegungsgln. für den Planeten werden nicht im Inertialsystem aufgestellt, sondern im mitbewegten Koordinatensystem: Das mitbewegte Koordinatensystem ist fest mit den beiden Sonnen verbunden, rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1$. Die beiden Sonnen stehen fest auf der bewegten x-Achse. Nach Abb. 2 lässt sich die Bewegung des Planeten im mitbewegten System viel besser verstehen und interpretieren als im Inertialsystem.

Nur für die Anfangsbedingungen $z(0) \neq 0$ oder $\dot{z}(0) \neq 0$ verlässt der Planet die x,y-Ebene.

Aus den beiden Kräftegleichgewichten für die kreisenden Sonnen

$$m_1 r_1 \Omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_2 r_2 \Omega^2$$

$$\text{folgt: } r_1 = m_2 \left[\frac{\gamma}{\Omega^2 (m_1 + m_2)^2} \right]^{1/3} \quad \text{und} \quad r_2 = m_1 \left[\frac{\gamma}{\Omega^2 (m_1 + m_2)^2} \right]^{1/3}$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1$ und dem Abstand $r_1 + r_2 = 1$ ergibt sich die Gravitationskonstante γ zu

$$\gamma = \frac{1}{m_1 + m_2}$$

In dem *rotierenden Koordinatensystem*, in dem die Sonnen ruhen, wirken auf den Planeten die **Gravitationskräfte** der beiden Sonnen sowie **Zentrifugal-** und **Corioliskraft**.

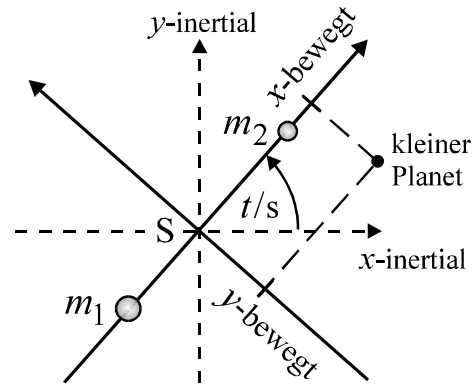


Abb. 3 Im Inertialsystem kreisen die beiden Sonnen um den gemeinsamen Schwerpunkt S. Der kleine Planet bewegt sich im Schwerefeld der beiden Sonnen.

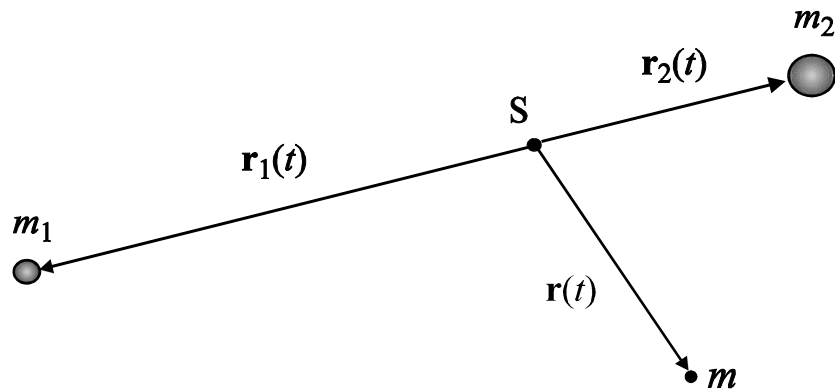


Abb. 4 Die beiden Sonnen mit den Massen m_1, m_2 kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt S mit dem Abstand $r_1 + r_2 = 1$ und mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1$. Der winzige Planet mit Masse m bewegt sich in einem zeitabhängigen Gravitationsfeld.

Die Beschleunigung $\mathbf{a}_{\text{bewegt}}$ des Planeten – gemessen im rotierenden System – und damit die Dgl. für die Bewegung des Planeten lautet:

$$\mathbf{a}_{\text{bewegt}} = 2 \mathbf{v}_{\text{bewegt}} \times \vec{\Omega} + \mathbf{r} \Omega^2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1)$$

Bemerkung: Das sog. “Zweizentrenproblem” beschreibt die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld von zwei *festgehaltenen* Körpern, also von zwei Körpern, die im Inertialsystem *ruhen*. Dieses Problem gehört zu den wenigen Problemen der Mechanik, die *nur* mit der Hamilton-Jacobi-Theorie *exakt* gelöst werden können. Dabei müssen elliptische Koordinaten verwendet werden. Aufgrund der exakten Lösbarkeit ist das Zweizentrenproblem nicht chaotisch. Siehe: Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 21–5.

Animation

Wenn sich der Planet sehr weit von den beiden Sonnen, die im konstanten Abstand $r_1 + r_2 = 1$ (dimensionslose Länge) umeinander kreisen, entfernt, so werden die Sonnen und der Planet evtl. bei der Animation so klein dargestellt, dass sie auf dem Bildschirm kaum noch oder auch gar nicht erkennbar sind.

Literatur

Praxis der Naturwissenschaften : Physik. Heft 7/36 , Oktober 1987 , Aulis-Verlag

Anhang

Librationspunkte im Sonnensystem

Über Jahrhunderte haben sich die besten Mathematiker (u. a. Euler, Lagrange, Gauß, Poincaré) mit dem **Drei-Körper-Problem**, also mit der reibungsfreien Bewegung von drei Körpern unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationskräfte beschäftigt – meistens vergeblich. Einige große Mathematiker standen nach eigenem Bekunden oft am Rande der Verzweiflung. Wie bereits erwähnt wissen wir seit etwa 100 Jahren, dass das **Dreikörpersystem ein chaotisches System** ist mit **analytisch nicht lösbaren Dgln**.

Der französische Mathematiker Lagrange (1736 – 1813) hat deshalb seine Untersuchungen schließlich auf vereinfachte Systeme beschränkt:

- 1) Alle drei Körper bewegen sich in einer gemeinsamen Ebene.
- 2) **Zwei schwere Himmelskörper laufen auf einer Kreisbahn** – nicht einer Ellipsenbahn – um den gemeinsamen Schwerpunkt.
- 3) Ein **leichtes Objekt**, das die Bewegung der schweren Körper nicht beeinflusst, bewegt sich im Gravitationsfeld der schweren Körper.

Wir werden sehen, dass dieses sog. „**eingeschränkte Drei-Körper-System**“ keine Bedeutung hat für Exoplaneten in Doppelsternsystemen. Das eingeschränkte Drei-Körper-System muss aber nicht unbedingt aus zwei Sternen und einem Planeten bestehen. Es kann z. B. auch aus unserer Sonne, einem Planeten und einem Asteroiden oder Satelliten zusammengesetzt sein; solche Drei-Körper-Systeme haben einen Einfluss auf die Verteilung von Asteroiden in unserem Sonnensystem und ermöglichen zweckmäßige Parkpositionen für Satelliten.

Lagrange konnte beweisen, dass es **in diesen eingeschränkten Drei-Körper-Systemen fünf Gleichgewichtspunkte** für den leichten Körper gibt (siehe Abb. 5). Diese fünf denkbaren Parkpositionen sind die sog. „**Lagrangepunkte**“ oder „**Librationspunkte**“ L_1 bis L_5 . An den Gleichgewichtspunkten heben sich die Gravitationskräfte der beiden schweren Himmelskörper und die Zentrifugalkraft des leichten Objektes gegenseitig auf, so dass sich der leichte Körper immer an derselben Stelle des rotierenden Bezugssystems befindet, das mit den beiden schweren Objekten fest verbunden ist.

Ein Körper, der die Sonne auf dem Lagrangepunkt L_1 umkreist, würde normalerweise eine kürzere Umlaufdauer haben als die Erde. Durch die Anziehungskraft der Erde wird jedoch die Anziehungskraft der Sonne auf den Körper „geschwächt“, so dass sich seine Umlaufdauer erhöht und er sich im Punkt L_1 synchron zur Erde bewegt.

Die ersten drei Lagrangepunkte sind nur bezüglich Abweichungen senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen den beiden großen Körpern stabil, während sie bezüglich Abweichungen in Richtung dieser Verbindungslinie instabil sind. Ein Körper, der sich vom Punkt L_1 aus senkrecht von der Verbindungslinie entfernt, wird von den senkrechten Komponenten der

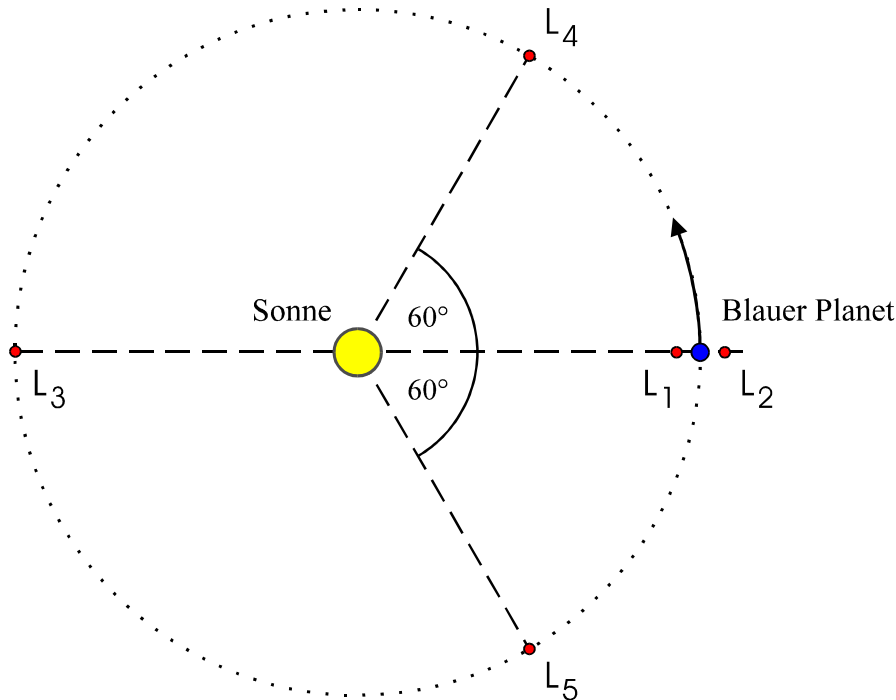


Abb. 5 Fünf Lagrangepunkte im System Sonne-Erde.

Die Lagrangepunkte L_1 und L_2 haben eine Entfernung von etwa 1,5 Millionen km zur Erde, der Lagrangepunkt L_3 ist etwa 300 Millionen km (2 AE) von der Erde entfernt.

Gravitationskräfte zurück gezogen. Wird hingegen ein Objekt vom L_1 -Punkt heraus etwas näher an einen der beiden anderen Körper bewegt, so ist die Gravitationskraft des Körpers, dem er näher ist, größer.

In Doppelsternsystemen können sich keine Planeten an den ersten drei Lagrangepunkten aufhalten, da diese Positionen instabil sind. Dennoch sind die Punkte L_1 und L_2 von Nutzen, da geringe Korrekturmanöver eines Satelliten ausreichen, um ihn dort zu halten.

L_1 : Der innere Lagrangepunkt L_1 des Systems Erde-Sonne wird von mehreren Sonden und Satelliten umkreist. Seit 1995 umrundet ihn der europäische Sonnenbeobachtungssatellit **SOHO** im Abstand von rund 600.000 km.

L_2 : Der äußere Lagrangepunkt L_2 des Systems Erde-Sonne wird gerne für Weltraumteleskope verwendet, da dort die Strahlung von Sonne, Erde und Mond mit nur einem Schirm abgeschirmt werden kann. Die ESA hat im Mai 2009 im Tandem auf einer Trägerrakete Ariane die Teleskope **Herschel** und **Planck** zum Lagrangepunkt L_2 geschickt. Sie umrunden L_2 im Abstand von 400.000 km.

Herschel ist das größte Infrarot-Weltraumteleskop und soll im fernen Infrarotspektrum einige der kältesten Objekte im Weltraum untersuchen. Dieser Teil des elektromagnetischen Spektrums wurde bisher kaum erforscht. Das Weltraumteleskop **Planck** soll dagegen das Licht aus den Anfängen des Universums mit bisher unerreichter Empfindlichkeit aufzeichnen.

L₃ : Der äußere Lagrangepunkt L₃ befindet sich hinter der Sonne im Abstand von 300 Millionen km zur Sonne. Da er von uns aus nie gesehen wird, spielt er eine Rolle in einigen Science-Fiction-Romanen: Dort parken die Außerirdischen, um uns unbemerkt zu beobachten.

Für die Librationspunkte L₄ und L₅ konnte Lagrange folgende Aussage beweisen:

Wenn die Masse eines Himmelskörpers **weniger als 4%** der Masse eines anderen Himmelskörpers beträgt, dann ist die Bewegung eines dritten, sehr kleinen Körpers in der Umgebung der beiden Lagrangepunkte L₄ und L₅ **stabil**.

Jeder der beiden Lagrangepunkte L₄ und L₅ bildet zusammen mit den beiden schweren Himmelskörpern ein **gleichseitiges Dreieck**, das in der Bahnebene der schweren Himmelskörper liegt und mit deren konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert.

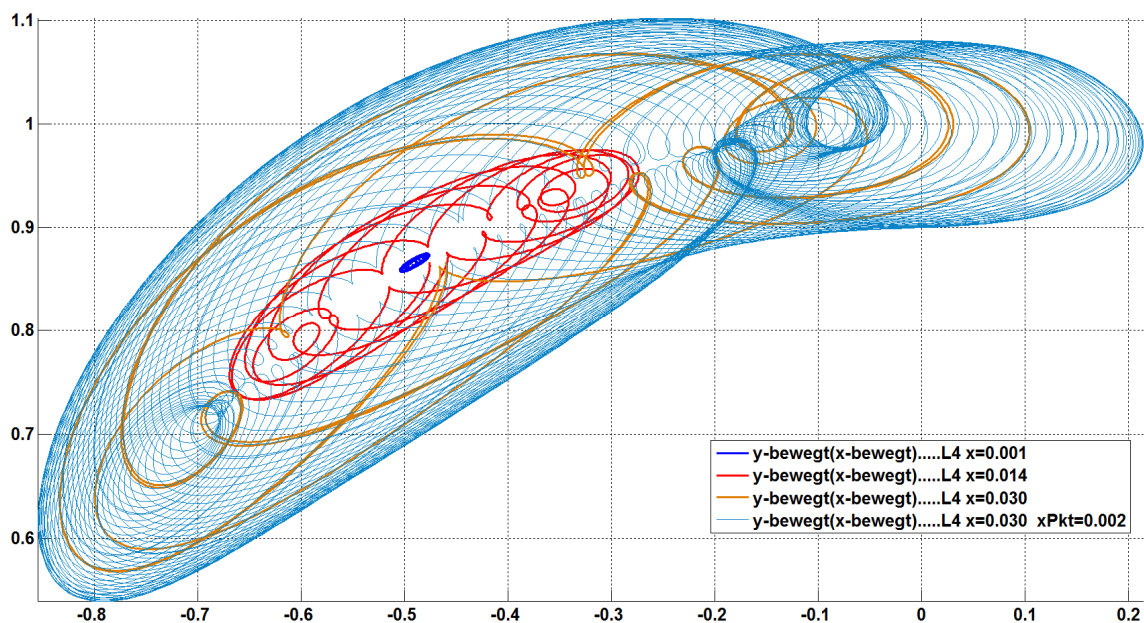


Abb. 6 Vier Trojaner umlaufen im rotierenden Koordinatensystem den Lagrangepunkt L₄. Die beiden Sonnen mit dem Massenverhältnis $m_2/m_1 = 100$ ruhen auf der rotierenden x-Achse mit den Koordinaten

$$x_1 = -\frac{100}{101} \quad x_2 = \frac{1}{101} \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 = 1$$

Der Punkt L₄ hat die Koordinaten

$$x_4 = 0,5 - \frac{100}{101} \approx -0,49 \quad y_4 = \sqrt{1 - 0,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

L₄ liegt innerhalb der kleinen, blauen Bahn. Die Bahnen sind **verschlungen und haben bananenartige Einhüllende**.

Die Laufzeit der 4. Kurve ist zehnmal größer als die Laufzeit der drei anderen Kurven.

Für ein Sternsystem mit nur einem Stern gilt diese Aussage für diesen Stern, einen darum kreisenden, viel leichteren Planeten und einen Satellit oder Asteroid, der sich stabil im Punkt L_4 und L_5 aufhalten kann.

Im Gegensatz zu L_1 , L_2 und L_3 sind L_4 und L_5 **stabil**, d. h. in ihrer Nähe können sich Körper auch ohne Bahnkorrektur dauerhaft aufhalten. Daher werden an diesen Punkten natürliche Objekte erwartet. Tatsächlich befinden sich in der Nähe von L_4 und L_5 des Systems Sonne-Erde viele lichtschwache Staubwolken und Kleinkörper.

Jupitertrojaner : Im Jahre 1906 wurde der erste Asteroid im Librationspunkt L_4 des Systems Sonne-Jupiter entdeckt; er erhielt den Namen „Achilles“. In der Folgezeit wurden alle Asteroiden im Lagrangepunkt L_4 bzw. L_5 des Jupiters nach griechischen bzw. trojanischen Helden der Ilias benannt.

Um den Punkt L_4 laufen z. B. „Patroclus (1906 entdeckt), „Agamemnon“ (1919) und „Odysseus“ (1930). Den Punkt L_5 umrunden z. B. „Priamos“ (1917) und „Aeneas“ (1930). Der 1907 in L_5 entdeckte „Hektor“ dürfte mit einer Ausdehnung von 370 x 195 km der größte Jupitertrojaner sein.

Bislang wurden fast 3000 Jupitertrojaner entdeckt. Die Trojaner umlaufen ihren Librationspunkt auf **verschlungenen, teils sehr weit reichenden Bahnen, wobei die Einhüllende der Bahnen bananenförmig ist.**

Weitere Trojaner : Bisher (Stand 2009) sind vier Mars-Trojaner bekannt. Ende 2001 fand man einen Neptun-Trojaner mit 230 km Ausdehnung. Er umrundet die Sonne – wie Neptun – in 166 Erdjahren.