

Hantelsatellit

Ein hantelförmiger Satellit mit zwei gleichen Massen $m_1 = m_2 =: m$ und einer **masselosen Hantelstange** der Länge $2l$ umläuft die **Erde**, die als **ruhend** angenommen wird und die Masse $M = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg hat. Das Trägheitsmoment der beiden Kugeln wird vernachlässigt, so dass die beiden Hantelkugeln in den Dgln. als Massenpunkte angesehen werden.

Das System hat folgende fünf generalisierte Koordinaten:

- Die drei Kugelkoordinaten $r_S, \varphi_S, \vartheta_S$ beschreiben die Translation des Schwerpunktes.
- Die zwei Kugelkoordinaten φ_H, ϑ_H beschreiben die Drehung der Hantelachse.

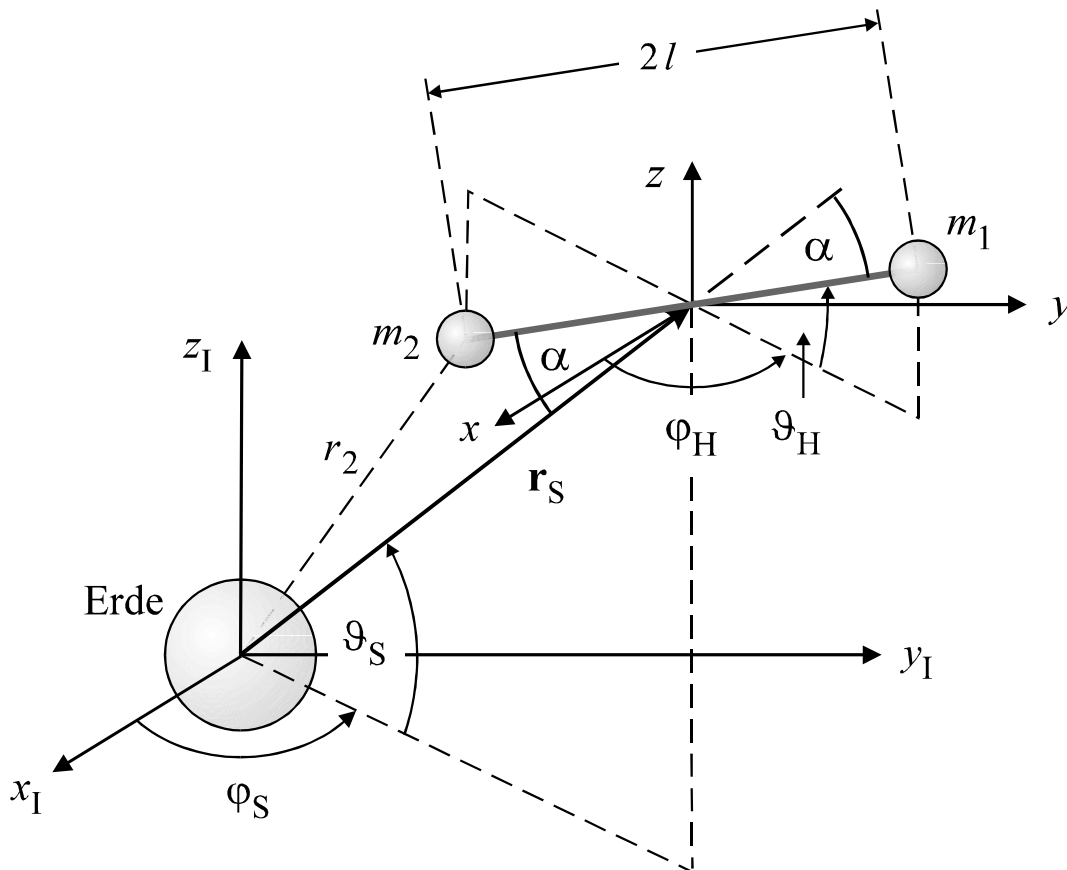


Abb. 1 Ein Hantelsatellit mit zwei gleichen Massenpunkten und einer masselosen Stange umläuft die ruhende Erde. Die Masse der Erde beträgt $M = 5,974 \cdot 10^{24}$ kg .

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die kinetische Energie lautet in den generalisierten Koordinaten:

$$T = m \left(\dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\vartheta}_S^2 + r_S^2 \dot{\varphi}_S^2 \cos^2 \vartheta_S + l^2 \dot{\vartheta}_H^2 + l^2 \dot{\varphi}_H^2 \cos^2 \vartheta_H \right)$$

Nach Abb. 1 lauten der Ortsvektor \mathbf{r}_S des Schwerpunktes und der Verbindungsvektor \mathbf{l} vom Hantelschwerpunkt zur Masse m_1 :

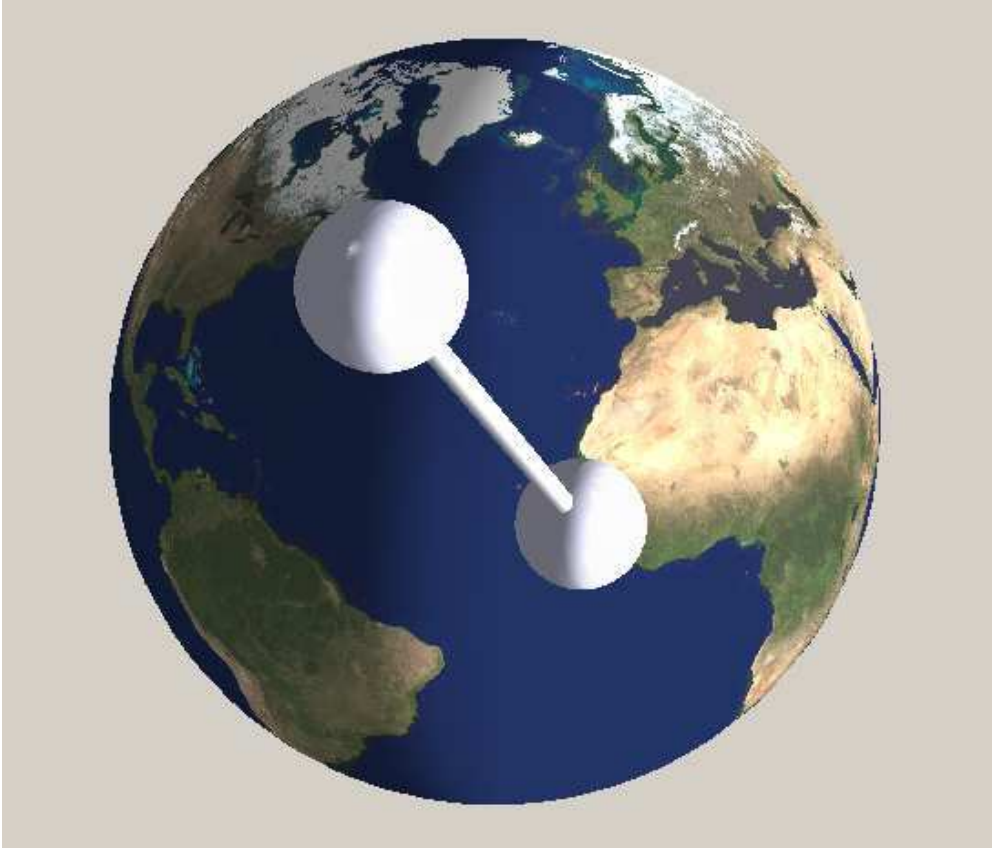


Abb. 2 Diese MatLab-Animation zeigt eine um die ruhende Erde umlaufende Hantel. Die Schattengrenze lässt erkennen, dass in Ostbrasilien gerade die Sonne aufgeht.

$$\mathbf{r}_S = r_S \begin{pmatrix} \cos \vartheta_S \cos \varphi_S \\ \cos \vartheta_S \sin \varphi_S \\ \sin \vartheta_S \end{pmatrix} \quad \mathbf{l} = l \begin{pmatrix} \cos \vartheta_H \cos \varphi_H \\ \cos \vartheta_H \sin \varphi_H \\ \sin \vartheta_H \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{r}_S \cdot \mathbf{l} = r_S l \cos \alpha = r_S l \left[\cos \vartheta_S \cos \vartheta_H \cos (\varphi_S - \varphi_H) + \sin \vartheta_S \sin \vartheta_H \right]$$

$$\Rightarrow \quad \cos \alpha = \cos \vartheta_S \cos \vartheta_H \cos (\varphi_S - \varphi_H) + \sin \vartheta_S \sin \vartheta_H \quad (1)$$

Dabei ist α der Winkel zwischen der Hantelachse und der Verbindungslinie vom Erdmittelpunkt zum Hantelmittelpunkt (siehe Abb. 1).

Die Abstände r_1, r_2 der beiden Hantelmassen zum Mittelpunkt der Erde werden mit dem Kosinussatz berechnet:

$$r_1^2 = r_S^2 + l^2 + 2 r_S l \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{und} \quad r_2^2 = r_S^2 + l^2 - 2 r_S l \cos \alpha \quad (3)$$

Nach längerer Rechnung ergibt sich die Lagrangefunktion zu

$$\begin{aligned}
L = & m \left(\dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\vartheta}_S^2 + r_S^2 \dot{\phi}_S^2 \cos^2 \vartheta_S + l^2 \dot{\vartheta}_H^2 + l^2 \dot{\phi}_H^2 \cos^2 \vartheta_H \right) \\
& + \frac{\gamma m_E M}{\sqrt{r_S^2 + 2 r_S r_H \left\{ \cos \vartheta_S \cos \vartheta_H \cos(\varphi_S - \varphi_H) + \sin \vartheta_S \sin \vartheta_H \right\} + r_H^2}} \\
& + \frac{\gamma m_E M}{\sqrt{r_S^2 - 2 r_S r_H \left\{ \cos \vartheta_S \cos \vartheta_H \cos(\varphi_S - \varphi_H) + \sin \vartheta_S \sin \vartheta_H \right\} + r_H^2}}
\end{aligned}$$

Dabei sind $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ die Gravitationskonstante und $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ die Erdmasse.

Die fünf Lagrange-Gln. für die fünf Hantelkoordinaten lauten:

$$\ddot{r}_S = r_S \dot{\vartheta}_S^2 + r_S \dot{\phi}_S^2 \cos^2 \vartheta_S - \frac{\gamma M}{2} \left[r_S \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) + l \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos \alpha \right] \quad (4a)$$

mit $\cos \alpha$ nach Gl. (1)

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}_S = & -2 \frac{\dot{r}_S}{r_S} \dot{\phi}_S - 2 r_S \dot{\phi}_S \dot{\vartheta}_S \frac{\sin \vartheta_S}{\cos \vartheta_S} \\
& + \frac{\gamma M}{2 \cos \vartheta_S} \frac{l}{r_S} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos \vartheta_H \sin(\varphi_S - \varphi_H)
\end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vartheta}_S = & -2 \frac{\dot{r}_S}{r_S} \dot{\vartheta}_S - \dot{\phi}_S^2 \cos \vartheta_S \sin \vartheta_S \\
& + \frac{\gamma M}{2} \frac{l}{r_S} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \left[\sin \vartheta_S \cos \vartheta_H \cos(\varphi_H - \varphi_S) - \cos \vartheta_S \sin \vartheta_H \right]
\end{aligned} \quad (4c)$$

$$\ddot{\phi}_H = 2 \dot{\phi}_H \dot{\vartheta}_H \frac{\sin \vartheta_H}{\cos \vartheta_H} + \frac{\gamma M}{2 \cos \vartheta_H} \frac{r_S}{l} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos \vartheta_S \sin(\varphi_H - \varphi_S) \quad (4d)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\vartheta}_H = & -\dot{\phi}_H^2 \cos \vartheta_H \sin \vartheta_H + \\
& \frac{\gamma M}{2} \frac{r_S}{l} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \left[\cos \vartheta_S \sin \vartheta_H \cos(\varphi_H - \varphi_S) - \sin \vartheta_S \cos \vartheta_H \right]
\end{aligned} \quad (4e)$$

In den Dgln. treten **6 Singularitäten** auf:

- $r_1 = 0$ oder $r_2 = 0$. Hier läuft eine der beiden Hantelmassen durch den Erdmittelpunkt.

- $r_S = 0$. Der Hantelschwerpunkt läuft durch den Erdmittelpunkt.
- $\cos \vartheta_S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_S = \frac{\pi}{2} + n \pi$
- $\cos \vartheta_H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_H = \frac{\pi}{2} + n \pi$
- $l = 0$. Die Hantel besteht nur aus *einer einzigen* Kugel.

Der Gesamtdrehimpuls der Hantel ist die Summe aus

- dem *Bahndrehimpuls* der Schwerpunktbewegung und
- dem *Eigendrehimpuls* der Drehung um den Hantelschwerpunkt.

Der Gesamtdrehimpuls der Hantel ist bei der Bewegung im Schwerefeld der Erde konstant. Der Bahndrehimpuls alleine und auch der Eigendrehimpuls alleine sind nicht konstant.

Für $l \ll r_S$ wird die Bewegung des Schwerpunktes kaum von der Drehung der Hantel beeinflusst.

Ebene Hantelbewegungen

Für Erdsatelliten reicht oft die Untersuchung der *ebenen Bewegung*. Hier gilt:

$$\vartheta_S = \vartheta_H = 0 \quad (5)$$

Dann folgt aus Gl. (1):

$$\alpha = \varphi_H - \varphi_S \quad (6)$$

Die drei Bewegungsgln. für **ebene Bewegungen** ergeben sich aus den Gln. (4) bis (6) ¹:

¹ Für $l \ll r_S$ gilt näherungsweise:

$$\frac{1}{r_1^3 - r_2^3} \approx -\frac{6l}{r_S^4} \cos \alpha = -\frac{6l}{r_S^4} \cos(\varphi_H - \varphi_S) \quad \frac{1}{r_1^3 + r_2^3} \approx \frac{2}{r_S^3}$$

In dieser Näherung lauten die drei Dgln. (7a/b/d) für ebene Bewegungen näherungsweise:

$$\ddot{r}_S \approx r_S \dot{\varphi}_S^2 - \frac{\gamma M}{r_S^2} \quad \ddot{\varphi}_S \approx -2 \frac{\dot{r}_S}{r_S} \dot{\varphi}_S \quad (8a/b)$$

$$\ddot{\varphi}_H \approx -\frac{3\gamma M}{r_S^3} \sin(\varphi_H - \varphi_S) \quad (8d)$$

Die Dgl. (8d) für die Eigendrehung hängt über den Winkel φ_S von der Bewegung des Schwerpunktes ab.

In den Lehrbüchern W. Greiner, *Mechanik*, Band 2 und F. Scheck, *Mechanik* wird das Taumeln des Saturnmondes Hyperion mit einem Zweihantel-Modell simuliert. Die dort aufgestellte (und ebenfalls nur näherungsweise gültige) Dgl. entspricht der Dgl. (8d).

$$\ddot{r}_S = r_S \dot{\phi}_S^2 - \frac{\gamma M}{2} \left[r_S \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) + l \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \cos(\phi_H - \phi_S) \right] \quad (7a)$$

$$\ddot{\phi}_S = -2 \frac{\dot{r}_S}{r_S} \dot{\phi}_S - \frac{\gamma M}{2} \frac{l}{r_S} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin(\phi_H - \phi_S) \quad (7b)$$

$$\ddot{\phi}_H = \frac{\gamma M}{2} \frac{r_S}{l} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \sin(\phi_H - \phi_S) \quad (7d)$$

Die drei Dgln. (7a/b/d) für die ebene Bewegung haben **zwei spezielle Lösungen mit konstantem Radius** (Kreisbahn) und mit **zwei konstanten Winkelgeschwindigkeiten**.

- **Speichenstellung** mit $\phi_S = \phi_H$ (siehe Abb. 3a).

Nach Gl. (6) ist $\alpha = 0$. Damit folgt aus Gl. (7a) die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbahn in Speichenstellung zu

$$\dot{\phi}_{S;\text{Speiche}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_S} \frac{r_S^2 + l^2}{(r_S^2 - l^2)^2}} \quad \text{mit} \quad r_S = \text{const}$$

Bewegungen in Speichenstellung sind **stabil**. Raumstationen werden in Speichenstellung stabilisiert. Auch der Mond hat seine Winkelgeschwindigkeit im Laufe von Jahrtausenden aufgrund von Dämpfungen, die durch die Gezeitenkräfte hervorgerufen wurden, solange reduziert, bis er eine stabile Speichenstellung eingenommen hat und der Erde seitdem immer dasselbe Gesicht zeigt. Dabei weist seine längste Achse in Richtung Erdmittelpunkt.

Die Stabilität der Speichenstellung wurde auch bestätigt, nachdem eine Rakete eine Wolke von kurzen Metallstäbchen hoch geschossen hatte. Die Metallstäbchen sollten elektromag-

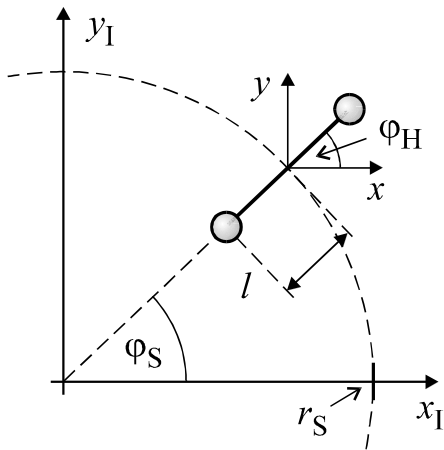


Abb. 3a Speichenstellung

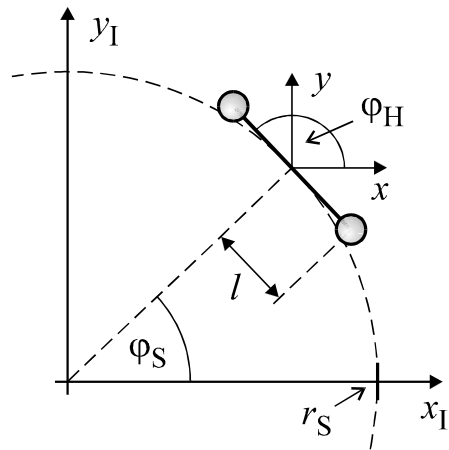


Abb. 3b Pfeilstellung

netische Wellen reflektieren, stabilisierten sich aber aufgrund dämpfender Einflüsse in radialer Richtung und reflektierten daher keine Strahlung.

- **Pfeilstellung** mit $r_1 = r_2$ (siehe Abb. 3b).

Nach den Gln. (2/3) ist $\cos \alpha = 0$. Aus Gl. (7a) folgt die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbahn in Pfeilstellung zu

$$\dot{\varphi}_{S; \text{Pfeil}} = \sqrt{\gamma M \frac{1}{(r_S^2 + l^2)^{3/2}}} \quad \text{mit} \quad r_S = \text{const}$$

Bewegungen in Pfeilstellung sind **instabil**.

Für einen gegebenen Bahnradius r_S ist die Winkelgeschwindigkeit in Speichenstellung größer als in Pfeilstellung, weil die Summe der beiden Gravitationskräfte auf die Hantelmassen in Speichenstellung größer ist, so dass auch die Summe der beiden Fliehkräfte in Speichenstellung größer sein muss.

Animation

Erde und Satellit werden von der Sonne beschienen. Die Position der Sonne ergibt sich aus der Schattengrenze, die im Laufe der Animation über die rotierende Erde und über die umlaufende Hantel wandert.

Bei der MatLab-Animation liegen der Erdmittelpunkt, der Schwerpunkt des Satelliten und die Kamera *immer* auf einer gemeinsamen Geraden. Die Kamera schaut auf den Mittelpunkt des Satelliten und auf den genau dahinter liegenden Erdmittelpunkt. Der Öffnungswinkel der Kamera ist während der gesamten Animation konstant.

Wichtig: Aufgrund dieser Kameraführung sehen wir bei der Animation nicht den Positionswinkel $\varphi_H(t)$ der Hantel, sondern die Winkeldifferenz $\varphi_S(t) - \varphi_H(t)$. Wenn sich der Satellit der Erde nähert, so kann die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_S(t)$ der Umlaufbahn die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_H(t)$ der Hanteldrehung übertreffen. Für den Betrachter der Animation kann dann der **befremdliche Eindruck** entstehen, dass die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_H(t)$ ein falsches Vorzeichen hat.

Für die Winkel $\vartheta_S(t)$ und $\vartheta_H(t)$ gelten entsprechende Aussagen.

Der Abstand der Kamera vom Schwerpunkt des Satelliten hängt vom Bahnradius $r_S(t)$ des Satelliten ab. Bei der MatLab-Animation sind für die Kameraführung des Abstandes Kamera \longleftrightarrow Satellit zwei Fälle zu unterscheiden:

- $r_S \geq 10.000 \text{ km}$

Für große Entfernungen $r_S \geq 10.000 \text{ km}$ ist der Abstand Kamera \longleftrightarrow Satellit zeitlich konstant, so dass der *Hantelsatellit beim Flug immer gleich groß auf dem Bildschirm dargestellt wird. Die auf dem Bildschirm dargestellte Größe der Erdkugel ändert sich mit dem Abstand Satellit \longleftrightarrow Erde.*

- $r_S < 10.000 \text{ km}$

Für kleine Entfernungen $r_S < 10.000 \text{ km}$ muss die endliche Auflösung des Erdbildes berücksichtigt werden. Daher bleibt die Entfernung der Kamera zur Erdoberfläche konstant, sobald der Bahnradius r_S den Wert 10.000 km unterschreitet. *Folglich können Satelliten, die kleiner als 10 km sind (grobe Schätzung) und die relativ dicht über der Erdoberfläche fliegen (in wenigen hundert Kilometer Höhe), kaum noch auf dem Bildschirm erkannt werden. Hier ändert sich die auf dem Bildschirm dargestellte Größe des Satelliten mit der Entfernung des Satelliten von der Kamera. Die dargestellte Erdgröße hingegen ist in dieser Phase der Kameraführung immer gleich groß.*

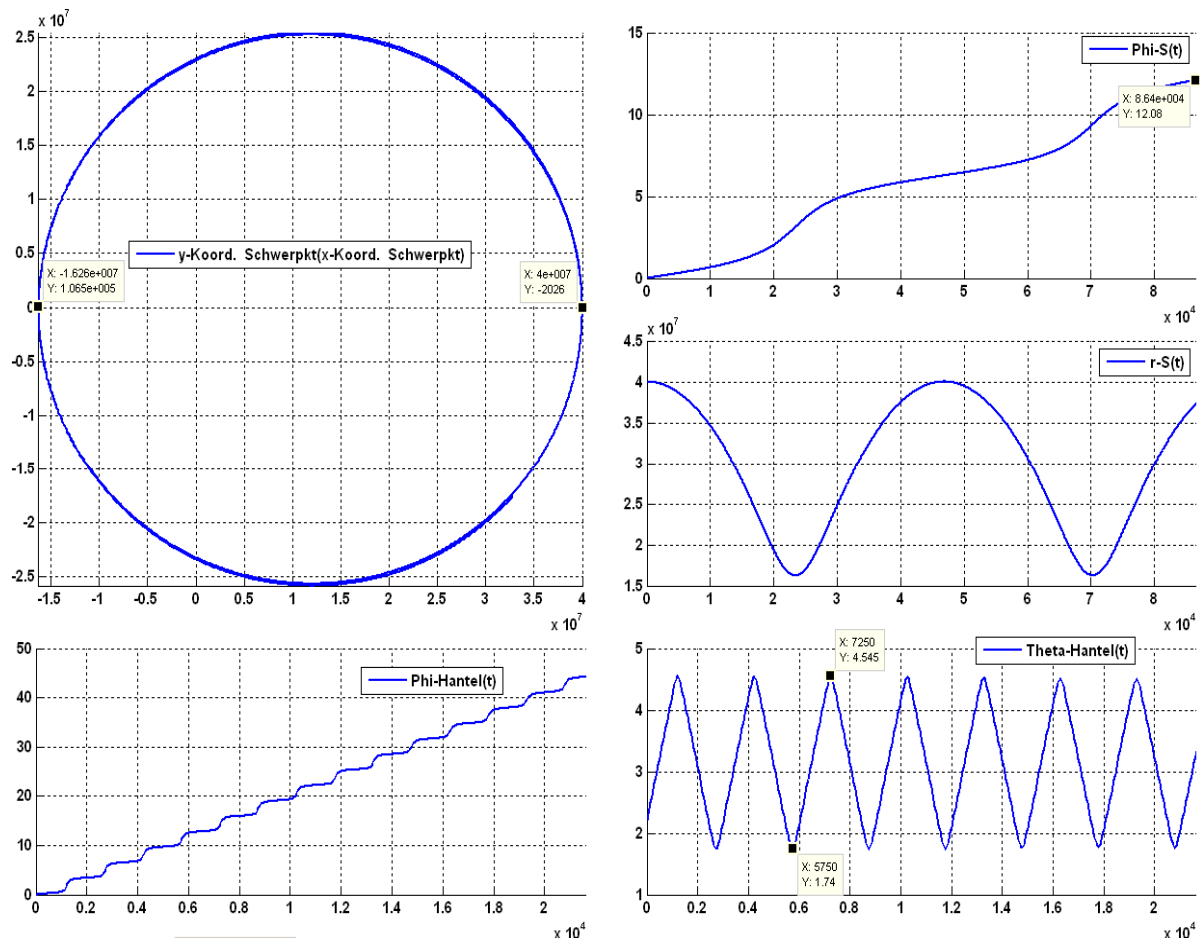


Abb. 4 Die Kurven zeigen die nicht-chaotische Bewegung einer extrem langen Hantel mit der Gesamtlänge $2l = 4000 \text{ km}$ im Schwerfeld der **ruhenden** Erde. Beachte, dass der Koordinatenursprung der Kurve $y_S(x_S)$ und daher auch der Mittelpunkt der ruhenden Erde nicht in der Mitte der kreisähnlichen Kurve $y_S(x_S)$ liegt. Die oberen drei Kurven gelten für einen ganzen Tag, die unteren zwei Kurven nur für 6 Stunden. Der nicht dargestellte Winkel $\vartheta_S(t)$ hat einen schwebungsartigen Verlauf mit einem maximalen Ausschlag von knapp unter 10° .

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \varphi_S(0) &= 0 & \vartheta_S(0) &= 0 & r_S(0) &= 4 \cdot 10^7 \text{ m} & \varphi_H(0) &= 0 & \vartheta_H(0) &= 2,2 \text{ rad} \\ \dot{\varphi}_S(0) &= 6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \dot{\vartheta}_S(0) &= 0 & \dot{r}_S(0) &= 0 & \dot{\varphi}_H(0) &= 0,001 \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \dot{\vartheta}_H(0) &= 0,002 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Ausgabeschrittweite $h = 50 \text{ s}$

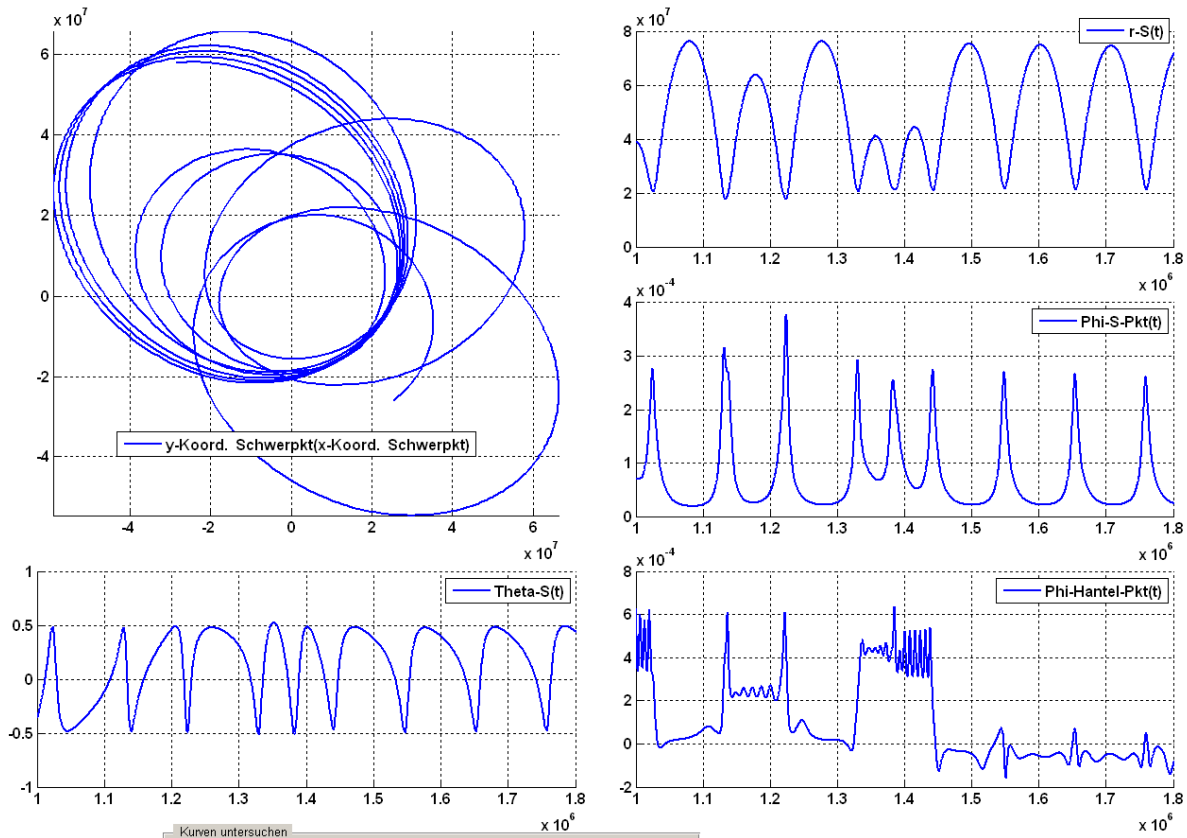


Abb. 5 Diese Kurven zeigen einen kleinen Ausschnitt der **chaotischen Bewegung** einer extrem langen Hantel mit der Gesamtlänge $2l = 1 \cdot 10^4$ km im Schwerfeld der ruhenden Erde. Die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{array}{llllll} \varphi_S(0) = 0 & \vartheta_S(0) = 0,01 \text{ rad} & r_S(0) = 2,2 \cdot 10^7 \text{ m} & \varphi_H(0) = 0 & \vartheta_H(0) = 1,4 \text{ rad} \\ \dot{\varphi}_S(0) = 2,1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \dot{\vartheta}_S(0) = 1,1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} & \dot{r}_S(0) = 0 & \dot{\varphi}_H(0) = 0 & \dot{\vartheta}_H(0) = 0 \end{array}$$

Bei der Animation ist die Änderung des Abstandes Satellit \longleftrightarrow Erde auch an der Änderung der *relativen* Winkelgeschwindigkeit zu erkennen, mit der sich die Erde unter der Kamera wegdreht.

Bei „ungünstigen“ Anfangsbedingungen wird der Bahnradius $r_S(t)$ im Laufe der Bewegung so klein, dass der Hantelsatellit zeitweise oder auch für immer in das Erdinnere eintaucht. Dieser unerwünschte Kontakt mit der Erde lässt sich nur durch numerische Berechnungen mit *geeigneten Anfangsbedingungen* vermeiden.

Die drei Buttons „Zoom“, „Pan“ und „Drehen“ sind nur bei angehaltener Animation („Pause“ oder „Step“ drücken) sinnvoll einzusetzen. Bei laufender Bewegung hingegen ist die Betätigung der drei genannten Buttons nicht zweckmäßig, da die geführte Kamera bei jedem Animationsschritt in die vom Programm berechnete Position zurückspringt.

Literatur

- M. Hiller, *Mechanische Systeme*, Springer-Verlag, 1983.