

Pendel mit drehbarer Platte

alias

Kane's Babyschuhe

An einer masselosen Pendelstange, die sich in ihrem Aufhängepunkt A mit dem Winkel ϑ um eine raumfeste, horizontale Achse drehen kann, hängt eine homogene Platte mit Masse m , Breite b , Höhe h und geringer Dicke d . Die Platte kann sich mit dem Winkel ψ um die Pendelstange drehen. Für $\psi = 0$ liegt die plattenfeste y -Achse in der Schwingungsebene der Pendelstange.

Eine einfache laminare Luftreibung wird in den Dgln. berücksichtigt. Reibungsverluste in den Lagern werden vernachlässigt.

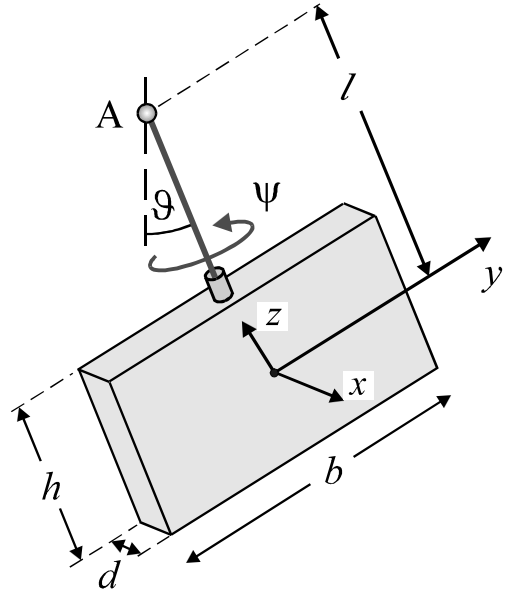


Abb. 1 An einer masselosen Stange, die sich in der Papierebene mit dem Winkel ϑ um den Punkt A drehen kann, hängt eine drehbare Platte. ϑ ist der Winkel der Pendelschwingung, ψ der Winkel der Eigendrehung um die Pendelstange.

Besonderheiten des Systems

Ein Student der Kalifornischen Eliteuniversität Stanford beobachtete beim Autofahren, dass sich die **kleinen Babyschuhe**, die am Innenspiegel seines Autos hängen, **bei bestimmten Amplituden der pendelartigen Schwingungen besonders stark um die eigene Achse drehen**.

Zur Erklärung dieses Phänomens stellte der amerikanische Physiker Kane ein ebenes Pendel mit drehbarer Platte als ein sehr einfaches Modell auf. Es hat nur zwei Freiheitsgrade und beschreibt parametererregte Schwingungen. Die aus der Theorie des Starren Körpers bekannten Eulerwinkel ϑ, ψ sind die beiden generalisierten Koordinaten des Systems.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Wenn man in der Lagrangefunktion des schweren, unsymmetrischen Kreisels den Eulerwinkel $\varphi(t) = 0$ setzt und den Eulerwinkel ϑ durch $\pi - \vartheta$ ersetzt, so erhält man die Lagrangefunktion des ebenen Pendels mit drehbarer Platte:

$$L = \frac{I_1}{2} \cos^2 \psi \dot{\vartheta}^2 + \frac{I_2}{2} \sin^2 \psi \dot{\vartheta}^2 + \frac{I_3}{2} \dot{\psi}^2 + m g l \cos \vartheta$$

Beachte: Die Lagrangefunktion des unsymmetrischen Kreisel enthält keine zyklischen Koordinaten. Für verschwindende Reibung ist die Energie die einzige bekannte Erhaltungsgröße. Das System kann sich daher chaotisch verhalten.

Dabei sind I_1, I_2, I_3 die drei Hauptträgheitsmomente der Platte für Drehungen um den Aufhängepunkt A des Pendels. Bei Berücksichtigung von einfacher laminarer Luftreibung ergeben sich die zwei Dgln.:

$$I_3 \ddot{\psi} + (I_1 - I_2) \sin \psi \cos \psi \dot{\vartheta}^2 - c_{\text{Psi}} \dot{\psi} = 0 \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} (I_1 \cos^2 \psi + I_2 \sin^2 \psi) \ddot{\vartheta} + 2(I_2 - I_1) \sin \psi \cos \psi \dot{\vartheta} \dot{\psi} + \\ m g l \sin \vartheta - c_{\text{Theta}} \dot{\vartheta} = 0 \end{aligned} \quad (1b)$$

Für $d \ll b, h$ lauten die drei Hauptträgheitsmomente

$$I_1 = \frac{m}{12} (b^2 + h^2 + 12l^2) \quad I_2 = \frac{m}{12} (h^2 + 12l^2) \quad I_3 = \frac{m}{12} b^2$$

Ab jetzt wird die **Luftreibung gleich Null** gesetzt: $c_{\text{Theta}} = c_{\text{Psi}} = 0$.

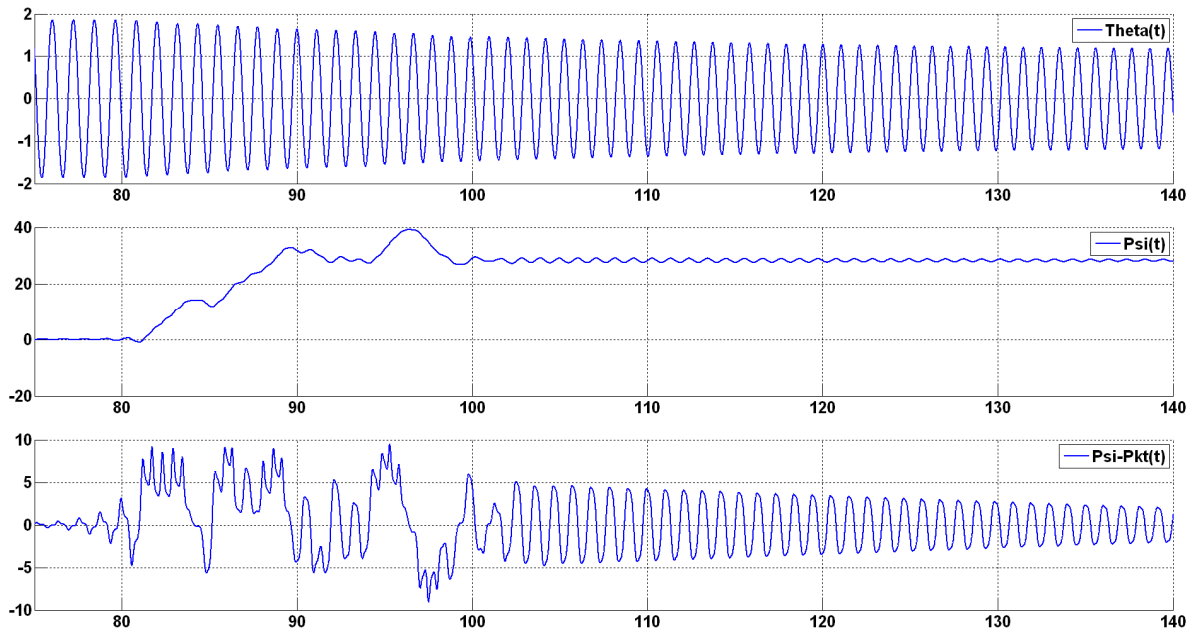


Abb. 2 Aufgrund von laminarer Luftreibung fällt die Schwingungsamplitude von $\vartheta(t)$ langsam ab. Hier wird die Bewegung im Zeitintervall [75 s ; 140 s] dargestellt. Demnach werden kleine Drehschwingungen des Winkels ψ instabil, sobald ungefähr $\vartheta(t) < 1.86$ wird – entsprechend $\vartheta(t) < 107^\circ$.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\vartheta_0 = 2 \quad \dot{\vartheta}_0 = 0 \quad \psi_0 = 0,1 \quad \dot{\psi}_0 = 0$$

$$m = 0,06 \text{ kg} \quad l = 0,21 \text{ m} \quad b = 0,15 \text{ m} \quad h = 0,075 \text{ m} \quad d = 0,002 \text{ m}$$

$$c_{\text{Theta}} = 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{km m}^2}{\text{s}} \quad c_{\text{Psi}} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{km m}^2}{\text{s}}$$

Mit $\sin \psi \cos \psi = 0,5 \sin(2 \psi)$ geht Gl. (1a) über in

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{2} \sin(2 \psi) \dot{\vartheta}^2 = 0 \quad \text{für } d \ll b, h \quad (2a)$$

Untersuchung der Eigendrehung für kleine Winkel ϑ und ψ

Eine weiter gehende analytische Untersuchung ist nur möglich, wenn wir **annehmen, dass der Pendel-Winkel ϑ und der Eigenrotations-Winkel ψ klein sind:**

$$\vartheta \ll 1 \quad \psi \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin \vartheta \approx \vartheta \quad \cos \psi \approx 1 \quad \sin \psi \approx \psi \quad \sin^2 \psi \approx 0 \quad \sin \psi \dot{\psi} \approx 0$$

Mit diesen zwei Annahmen geht Gl. (1b) über in

$$I_1 \ddot{\vartheta} + m g l \vartheta = 0 \quad (3)$$

Die harmonische Lösung

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{I_1}}$$

setzen wir in die Dgl. (2a) ein und erhalten die lineare Dgl.

$$\ddot{\psi} + \frac{\vartheta_0^2 \omega_0^2}{2} [1 - \cos(2 \omega_0 t)] \psi = 0 \quad (3a)$$

Die Substitution

$$\tau := 2 \omega_0 t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{\tau}{2 \omega_0} =: f(\tau)$$

führt die dimensionslose Zeit τ ein. Die Kettenregel liefert:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(f(\tau))}{d\tau} &= \frac{d\psi(f(\tau))}{df} \frac{df(\tau)}{d\tau} \underset{f(\tau)=t}{=} \frac{d\psi(t)}{dt} \frac{1}{2 \omega_0} = \dot{\psi}(t) \frac{1}{2 \omega_0} \\ \Rightarrow \quad \dot{\psi}(t) &= 2 \omega_0 \frac{d\psi(f(\tau))}{d\tau} = 2 \omega_0 \psi'(\tau) \\ \Rightarrow \quad \ddot{\psi}(t) &= 4 \omega_0^2 \psi''(\tau) \end{aligned}$$

Dabei kennzeichnet der Strich die Ableitung nach der neuen unabhängigen Variablen τ . Somit geht die Dgl. (3a) über in die Normalform der sog. „**Mathieschen Dgl.**“

$$\psi'' + (a + b \cos \tau) \psi = 0 \quad \text{mit} \quad a = -b = \frac{\vartheta_0^2}{8} \quad (4a)$$

Die Mathiesche Dgl. lässt sich wegen der τ -Abhängigkeit des Koeffizienten $b \cos \tau$ nicht elementar integrieren.

Nach der Theorie der Mathieschen Dgl. hängt die Stabilität kleiner Drehschwingungen des Winkels ψ nur von den Parametern a und b ab, in unserem System also nur von der Pendelamplitude ϑ_0 . Die Stabilität hängt demnach nicht von den Parametern des Systems ab – zumindest solange nicht, wie $\vartheta, \psi \ll 1$ ist.

Mit der „Struttschen Stabilitätskarte“ (siehe Abb. 3) lässt sich für jedes Wertepaar a, b angeben, ob die Gleichgewichtslage $\psi(\tau) = 0$ stabil oder instabil ist. In Abb. 3 werden die Bereiche stabiler und instabiler Lösungen aufgezeichnet. Die *stabilen Bereiche sind grau gezeichnet*. Auf den Grenzlinien sind die Lösungen periodisch.

Die Stabilitätskarte ist **symmetrisch zur a -Achse**. Daher dürfen wir b durch $-b$ ersetzen und in der folgenden Rechnung annehmen:

$$a = b = \frac{\vartheta_0^2}{8} \quad (5)$$

In der Umgebung der a -Achse, d. h. für

$$b \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta_0 \ll 1$$

können die Grenzlinien durch einfache Funktionen $a(b)$ angenähert werden. Von unten gezählt lauten die ersten vier $a(b)$:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2} b^2 & a_2 &= \frac{1}{4} - \frac{b}{2} \\ a_3 &= \frac{1}{4} + \frac{b}{2} & a_4 &= 1 - \frac{b^2}{12} \end{aligned}$$

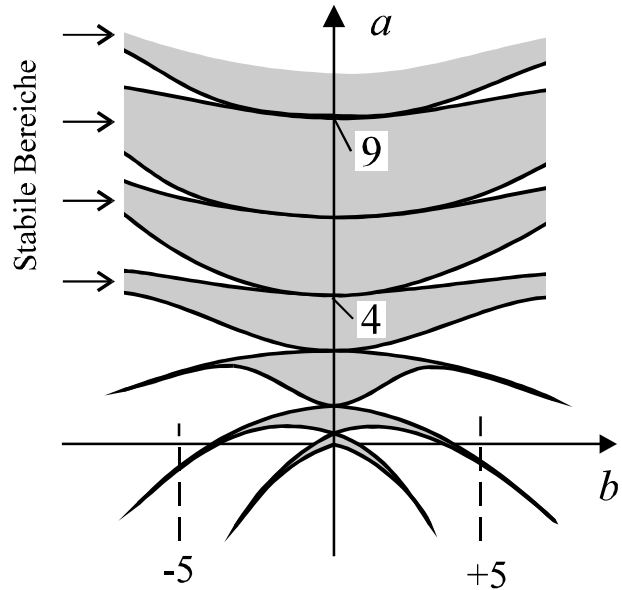


Abb. 3 Struttsche Stabilitätskarte für die Mathiesche Dgl. Die stabilen Bereiche sind grau gezeichnet.

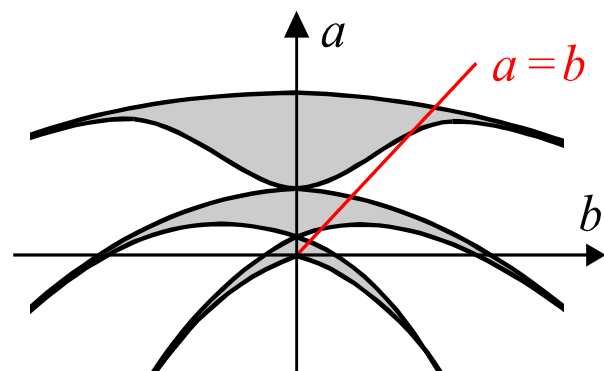


Abb. 4 Die Schnittpunkte der Grenzkurven mit der roten Geraden (siehe Gl. (5)) legen stabile und instabile Bereiche der Eigendrehung fest.

Zur Ermittlung der stabilen und instabilen Bereiche berechnen wir nun die **Schnittpunkte der Grenzkurven** a_2, a_3, a_4 mit der roten Geraden $a = b$ in Abb. 4, die die Gl. (5) wiedergibt.

1) Schnittpunkt mit der 2. Kurve $a_2(b)$:

$$\frac{1}{4} - \frac{b}{2} = b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta_0 = \sqrt{8b} \approx 1,16 \text{ rad} \approx 66^\circ$$

Daher sind kleine Drehschwingungen des Winkels ψ im Bereich

$$0 \leq \vartheta_0 \leq 66^\circ$$

stabil.

2) Schnittpunkt mit der 3. Kurve $a_3(b)$:

$$\frac{1}{4} + \frac{b}{2} = b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta_0 = \sqrt{8b} = 2 \text{ rad} \approx 115^\circ$$

Daher sind kleine Drehschwingungen des Winkels ψ im Bereich

$$66^\circ \leq \vartheta_0 \leq 115^\circ$$

instabil.

3) Schnittpunkt mit der 4. Kurve $a_4(b)$:

$$1 - \frac{b^2}{12} = b \quad \Rightarrow \quad b \approx 0.928$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta_0 = \sqrt{8b} \approx 2,72 \text{ rad} \approx 156^\circ$$

Daher sind kleine Drehschwingungen des Winkels ψ im Bereich

$$115^\circ \leq \vartheta_0 \leq 156^\circ$$

stabil. Abb. 5 fasst die Ergebnisse in graphischer Form zusammen.

Beachte, dass diese Ergebnisse nur Anhaltspunkte liefern. Die Voraussetzung $\vartheta_0 \ll 1$ wurde bei der Berechnung der drei Schnittpunkte stark verletzt. Daher dürfen wir uns nicht wundern, wenn die numerische Berechnung zwar die Existenz von stabilen und instabilen Bereichen bestätigt, allerdings mit anderen Grenzwinkeln ϑ_0 .

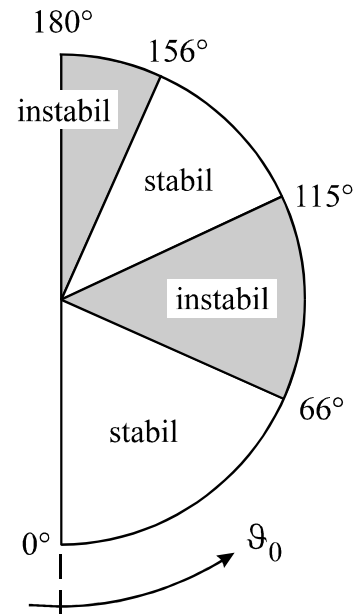


Abb. 5 Stabilitätsdiagramm nach der Struttischen Stabilitätskarte.

MECHANICUS liefert bei **numerischen Rechnungen** mit kleiner Luftreibung in **grober Näherung** (siehe auch Abb. 2) : Die Gleichgewichtslage $\psi(\tau) = 0$ ist für

- $0^\circ < \vartheta < 65^\circ$ stabil $\Leftrightarrow 0 < \vartheta < 1,1 \text{ rad}$ stabil.
- $65^\circ < \vartheta < 110^\circ$ instabil $\Leftrightarrow 1,1 \text{ rad} < \vartheta < 1,9 \text{ rad}$ instabil.
- $110^\circ < \vartheta < 155^\circ$ stabil $\Leftrightarrow 1,9 \text{ rad} < \vartheta < 2,7 \text{ rad}$ stabil.
- $155^\circ < \vartheta < 180^\circ$ instabil $\Leftrightarrow 2,7 \text{ rad} < \vartheta < \pi$ instabil.

Literatur

- F. Pfeiffer, *Einführung in die Dynamik*, Teubner-Verlag
- K. Magnus / K. Popp, *Schwingungen*, Teubner-Verlag