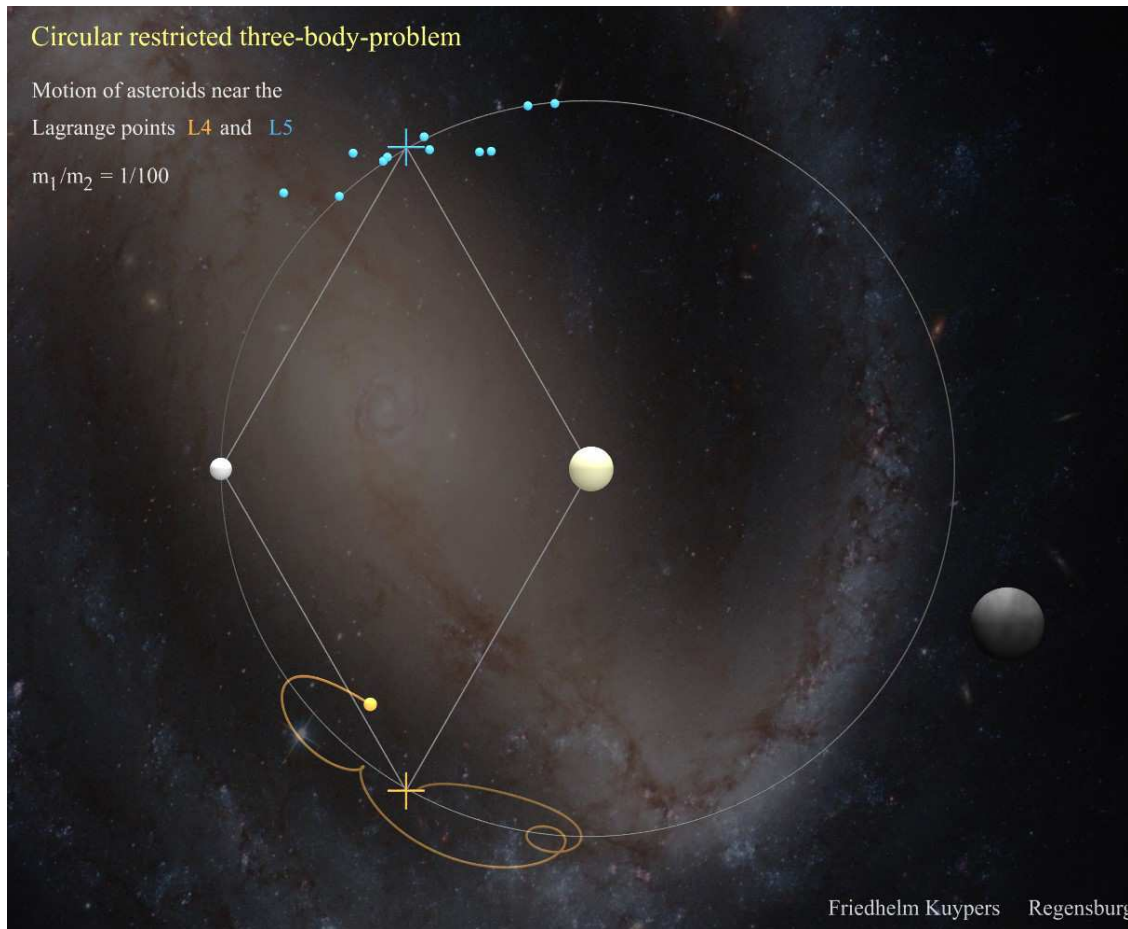


# Eingeschränktes Dreikörpersystem



**Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation.** In einem Inertialsystem laufen die gelbe Sonne und der weiße Planet auf Kreisbahnen im Gegenuhrzeigersinn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Die Kamera steht in einem Bezugssystem, das fest mit der gelben Sonne und dem weißen Planet verbunden ist und daher ebenfalls im Inertialsystem im Gegenuhrzeigersinn rotiert. Daher dreht sich die Spiralgalaxie im Hintergrund im Uhrzeigersinn.

In der Umgebung des Lagrangepunktes  $L_5$ , der durch ein türkises Kreuz markiert wird, laufen elf Asteroiden auf verschlungenen, weitreichenden Bahnen. In der Umgebung des orangenen Lagrangepunktes  $L_4$  bewegt sich ein einzelner gelber Asteroid und zieht eine orange Spur hinter sich her.

Rechts unten läuft im Vordergrund ein dunkler, *kräftefreier* Planet vorbei. Seine (im Inertialsystem gleichförmige) Bewegung sieht im rotierenden Bezugssystem ungleichförmig aus.

Der Hintergrund zeigt die „Barred Spiral Galaxie NGC 1300“. Die Aufnahme wurde vom NASA Raumteleskop **Hubble** aufgenommen und von der Internetseite [www.hubblesite.org](http://www.hubblesite.org) heruntergeladen. Im ersten Teil dieser POV-Ray-Animation ist kurzzeitig der Asteroid Vesta zu sehen; auch er wurde von Hubble aufgenommen und von der genannten Internetseite heruntergeladen.

## Dreikörpersystem oder „Doppelsternsystem mit einem Planeten“

Über Jahrhunderte haben sich die besten Mathematiker (u. a. Euler, Lagrange, Gauß, Poincaré) mit dem sog. **Dreikörperproblem**, also mit der reibungsfreien Bewegung von drei Körpern unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Gravitationskräfte beschäftigt – meistens vergeblich. Das Dreikörpersystem kann z. B.

- ein Doppelsternsystem mit einem Planeten sein oder
- eine einzelne Sonne mit einem Planeten und seinem Mond enthalten.

Einige große Mathematiker standen nach eigenem Bekunden oft am Rande der Verzweiflung. Seit etwa dem 100 Jahren wissen wir, dass das **Dreikörpersystem ein chaotisches System** ist, dessen Lösung nicht auf die Integration von eindimensionalen Integralen zurückgeführt werden kann.<sup>1</sup>

## Eingeschränktes Dreikörperproblem

Der französische Mathematiker Lagrange (1736 – 1813) hat deshalb seine Untersuchungen auf vereinfachte Dreikörpersysteme beschränkt:

- 1) **Zwei schwere Himmelskörper laufen auf einer Kreisbahn** – nicht einer Ellipsenbahn – um den gemeinsamen Schwerpunkt.
- 2) Ein **leichtes Objekt** – z. B. ein Planet in einem Doppelsternsystem –, das die Bewegung der beiden schweren Körper nicht beeinflusst, bewegt sich im Gravitationsfeld der schweren Körper.
- 3) Alle drei Körper bewegen sich in einer gemeinsamen Ebene – z. B. der x,y-Ebene.

Dreikörpersysteme mit diesen Eigenschaften heißen „**eingeschränkte Dreikörpersysteme**“.

## Dgln. eingeschränkter Dreikörpersysteme

Das Programm **Mechanicus** behandelt das sowohl analytisch als auch numerisch gut untersuchte **eingeschränkte Dreikörperproblem**. Folgende drei Bedingungen sind erfüllt:

- Zwei **schwere Sonnen** mit den Massen  $m_1, m_2$  laufen auf **Kreisbahnen** in der x,y-Ebene um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Der Schwerpunkt liegt im Koordinatenursprung.

---

<sup>1</sup> Es ist wenig bekannt, dass Karl Sundman das Dreikörper-Problem 1909 analytisch durch eine **konvergente Reihenentwicklung** gelöst hat und dass Qiu Dong Wang die Lösung 1990 auf  $N$ -Körper-Probleme verallgemeinern konnte, wenn nur der Gesamtdrehimpuls des Systems ungleich Null ist. Aber die Konvergenz der Reihen ist so erbärmlich schlecht, dass selbst Näherungslösungen die Summation unglaublich vieler Terme erfordern. Daher haben die konvergenten Potenzreihen nur geringen praktischen Wert.

- Ein **sehr leichter Planet** umläuft die beiden Sonnen in der x,y-Ebene. Wegen seiner geringen Masse  $m$  kann er die kreisförmige Bewegung der Sonnen nicht beeinflussen.

In **Mechanicus** ist die Bewegung der Sonnen wie folgt fest vorgegeben und kann daher vom Anwender nicht geändert werden: Die Sonnen **kreisen** in der x,y-Ebene mit dem gegenseitigen Abstand

$$r_1 + r_2 = 1 \quad (\text{dimensionslose Länge})$$

und mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = 1 \quad (\text{dimensionslose Zeit})$$

um den gemeinsamen Schwerpunkt S, der im Koordinatenursprung liegt.

Zur Zeit  $t=0$  liegen die beiden Sonnen auf der inertialen x-Achse. Daher lauten die Koordinaten der beiden kreisenden Sonnen im Inertialsystem bei jeder Berechnung:

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

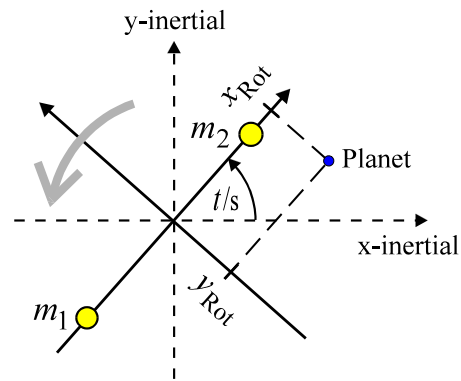
$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = +\frac{m_1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Die Bewegungsgln. für den Planeten werden nicht im Inertialsystem aufgestellt, sondern im mitbewegten Koordinatensystem: Das mitbewegte Koordinatensystem ist fest mit den beiden Sonnen verbunden, rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 1$ . Die beiden Sonnen stehen fest auf der bewegten x-Achse. Nach Abb. 2 lässt sich die Bewegung des Planeten im mitbewegten System viel besser verstehen und interpretieren als im Inertialsystem.

Aus den beiden Kräftegleichgewichten für die kreisenden Sonnen

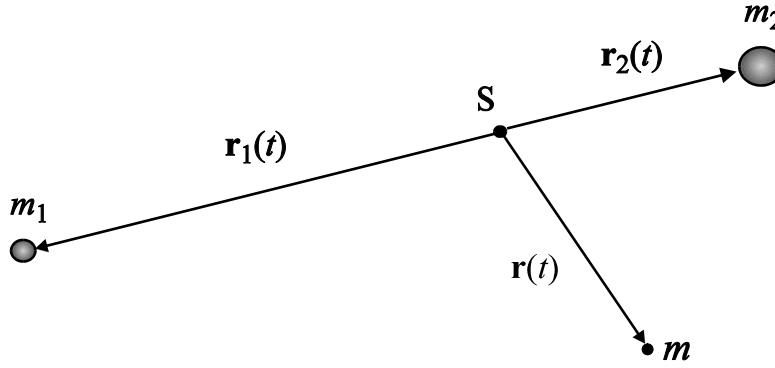
$$m_1 r_1 \Omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_2 r_2 \Omega^2$$

$$\text{folgt: } r_1 = m_2 \left[ \frac{\gamma}{\Omega^2 (m_1 + m_2)^2} \right]^{1/3} \quad \text{und} \quad r_2 = m_1 \left[ \frac{\gamma}{\Omega^2 (m_1 + m_2)^2} \right]^{1/3}$$



**Abb. 2** Im Inertialsystem kreisen die beiden Sonnen um den gemeinsamen Schwerpunkt S. Der kleine Planet bewegt sich im Schwerefeld der beiden Sonnen.

$x_{\text{rot}}, y_{\text{rot}}$  sind die Planetenkoordinaten im rotierenden System.



**Abb. 3** Die beiden Sonnen mit den Massen  $m_1, m_2$  kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt S mit dem Abstand  $r_1 + r_2 = 1$  und mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 1$ . Der winzige Planet mit Masse  $m$  bewegt sich in einem zeitabhängigen Gravitationsfeld.

Mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 1$  und dem Abstand  $r_1 + r_2 = 1$  ergibt sich die Gravitationskonstante  $\gamma$  zu

$$\gamma = \frac{1}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

In dem *rotierenden Koordinatensystem*, in dem die Sonnen ruhen, wirken auf den Planeten die [Gravitationskräfte](#) der beiden Sonnen sowie [Zentrifugal-](#) und [Corioliskraft](#).

Die Beschleunigung  $\mathbf{a}_{\text{rot}}$  des Planeten – gemessen im rotierenden System – und damit die Dgl. für die Bewegung des Planeten lautet mit Gl. (1):

$$\mathbf{a}_{\text{rot}} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{1;\text{rot}}}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{1;\text{rot}}|^3} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{2;\text{rot}}}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{2;\text{rot}}|^3} + \mathbf{r}_{\text{rot}} \Omega^2 + 2 \mathbf{v}_{\text{rot}} \times \vec{\Omega} \quad (2)$$

Bemerkung: Das sog. “[Zweizentrenproblem](#)” beschreibt die Bewegung einer Masse im Gravitationsfeld von zwei *festgehaltenen* Körpern, also von zwei Körpern, die im Inertialsystem *ruhen*. Dieses Problem gehört zu den wenigen Problemen der Mechanik, die *nur* mit der Hamilton-Jacobi-Theorie *exakt* gelöst werden können. Dabei müssen elliptische Koordinaten verwendet werden. Aufgrund der exakten Lösbarkeit ist das Zweizentrenproblem nicht chaotisch. Siehe: Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 21–5.

## Jacobi-Konstante

Mit  $\vec{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$  lässt sich die Bewegungsgl. (2) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \ddot{x}_{\text{rot}} \\ \ddot{y}_{\text{rot}} \end{pmatrix} + 2\Omega \begin{pmatrix} -\dot{y}_{\text{rot}} \\ \dot{x}_{\text{rot}} \end{pmatrix} = & -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{1;\text{rot}}|^3} \begin{pmatrix} x_{\text{rot}} - x_{1;\text{rot}} \\ y_{\text{rot}} - y_{1;\text{rot}} \end{pmatrix} \\
 & -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{2;\text{rot}}|^3} \begin{pmatrix} x_{\text{rot}} - x_{2;\text{rot}} \\ y_{\text{rot}} - y_{2;\text{rot}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{\text{rot}} \\ y_{\text{rot}} \end{pmatrix} \Omega^2
 \end{aligned} \quad (3)$$

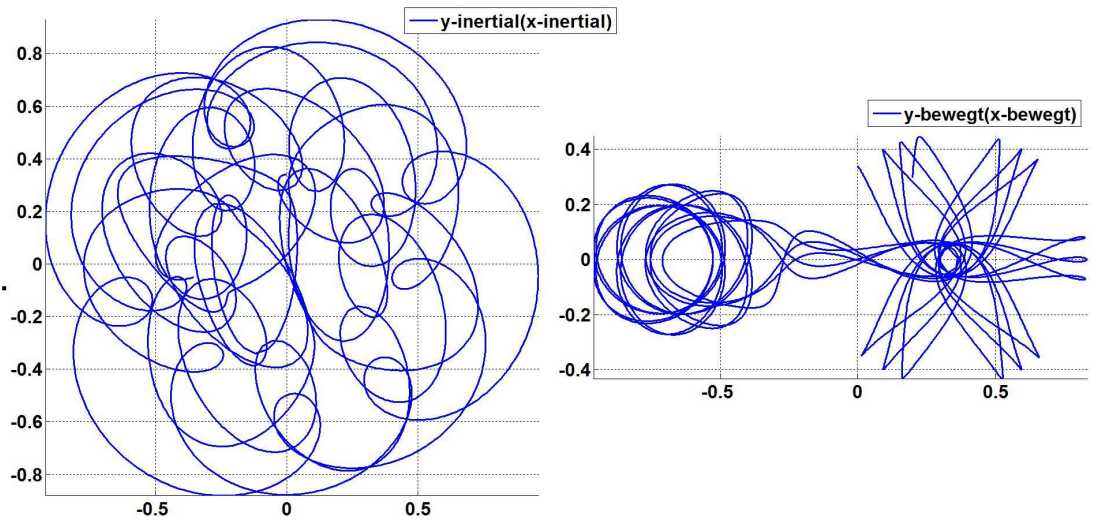
Dabei sind

$$x_{1;\text{rot}} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad x_{2;\text{rot}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

die konstanten, dimensionslosen x-Koordinaten der beiden Sonnen im rotierenden Bezugssystem (siehe Abb. 2).

Das Potential

$$U(x_{\text{rot}}, y_{\text{rot}}) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{1;\text{rot}}|} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{2;\text{rot}}|} - \frac{\Omega^2}{2} \mathbf{r}_{\text{rot}}^2 \quad (4)$$



**Abb. 4** Das rechte Bild zeigt die *chaotische* Planetenbahn in einem Koordinatensystem, das mit den beiden Sonnen fest verbunden ist und daher mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = 1$  rotiert. Die beiden (nicht dargestellten) Sonnen mit dem Massenverhältnis  $m_1/m_2 = 0.5$  ruhen auf der rotierenden x-Achse mit den Koordinaten

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Man erkennt deutlich, dass sich der Planet abwechselnd um jede Sonne bewegt und dass diese Bewegung wohl kein biologisch zuträgliches Klima ermöglicht. Die rechte Kurve erinnert an den chaotischen Flug einer Motte um zwei Lichtquellen.

Das linke Bild zeigt die Planetenbahn im Inertialsystem. Die beiden (auch hier nicht dargestellten) Sonnen laufen auf Kreisbahnen mit den Radien  $2/3$  und  $1/3$  um den gemeinsamen Schwerpunkt, der wieder im Koordinatenursprung liegt. Hier ist die Planetenbahn viel schlechter zu beurteilen als im rechten Bild. Vor allem erkennt man nicht, in welchem Anziehungsbereich der Planet jeweils läuft.

enthält zwei Gravitationspotentiale und ein Zentrifugalpotential. Mit diesem Potential lauten die zwei Dgln. in Gl. (3):

$$\ddot{x}_{\text{rot}} - 2\Omega \dot{y}_{\text{rot}} = -\frac{\partial U}{\partial x_{\text{rot}}} \quad (5a)$$

$$\ddot{y}_{\text{rot}} + 2\Omega \dot{x}_{\text{rot}} = -\frac{\partial U}{\partial y_{\text{rot}}} \quad (5b)$$

Wir multiplizieren Gl. (5a) mit  $\dot{x}_{\text{rot}}$  und Gl. (5b) mit  $\dot{y}_{\text{rot}}$  und addieren beide Gln.:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\text{rot}} \ddot{x}_{\text{rot}} + \dot{y}_{\text{rot}} \ddot{y}_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}_{\text{rot}}^2 + \dot{y}_{\text{rot}}^2) = \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x_{\text{rot}}} \dot{x}_{\text{rot}} - \frac{\partial U}{\partial y_{\text{rot}}} \dot{y}_{\text{rot}} = -\frac{dU}{dt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\dot{x}_{\text{rot}}^2 + \dot{y}_{\text{rot}}^2) + U = \text{const} =: C$$

mit der sog. **Jacobi-Konstanten**

$$C = \frac{1}{2} (\dot{x}_{\text{rot}}^2 + \dot{y}_{\text{rot}}^2) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{1;\text{rot}}|} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{|\mathbf{r}_{\text{rot}} - \mathbf{r}_{2;\text{rot}}|} - \frac{\Omega^2}{2} \mathbf{r}_{\text{rot}}^2$$

Die Jacobi-Konstante ist die einzige Erhaltungsgröße (Konstante der Bewegung) des eingeschränkten Dreikörperproblems.

## Animation

Wenn sich der Planet sehr weit von den beiden Sonnen, die im konstanten Abstand  $r_1 + r_2 = 1$  (dimensionslose Länge) umeinander kreisen, entfernt, so werden die Sonnen und der Planet evtl. bei der Animation so klein dargestellt, dass sie auf dem Bildschirm kaum noch oder auch gar nicht erkennbar sind.

## Literatur

- Praxis der Naturwissenschaften : Physik. Heft 7/36 , Oktober 1987 , Aulis-Verlag
- Matthias Kemper, Guido Willems: Das 3-Körper-Problem, Uni Münster

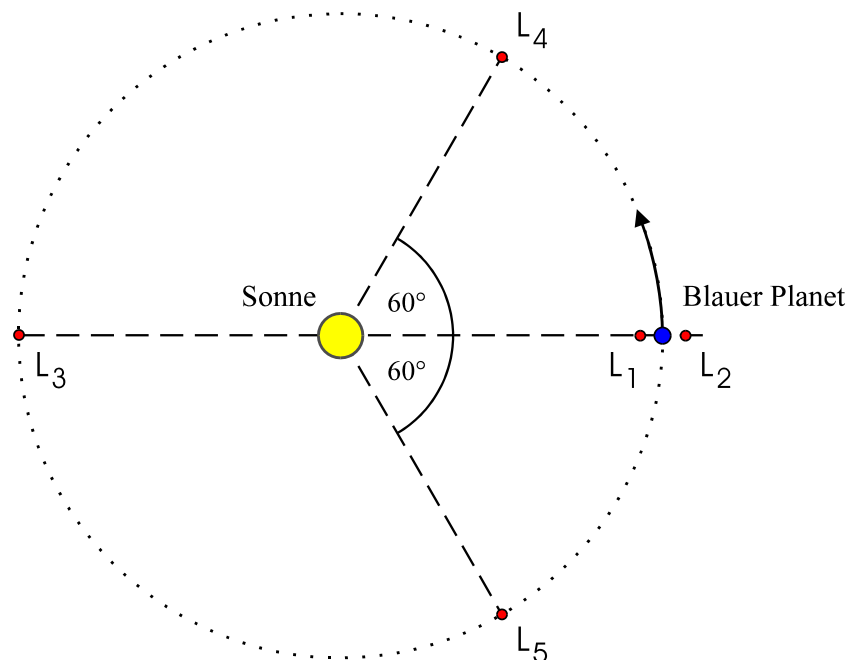
# Anhang

## Librationspunkte im Sonnensystem

Die folgenden Untersuchungen des **eingeschränkten Dreikörpersystems** sind vor allem für unser Sonnensystem von Bedeutung: Die Sonne und ein Planet – dies sind die zwei schweren Körper – sowie ein Asteroid oder ein Satellit – das ist der leichte Körper – bilden ein eingeschränktes Dreikörpersystem; solche Dreikörpersysteme haben einen Einfluss auf die Verteilung von Asteroiden in unserem Sonnensystem und ermöglichen zweckmäßige Parkpositionen für Satelliten.

Lagrange konnte beweisen, dass es **in eingeschränkten Dreikörpersystemen fünf Gleichgewichtspunkte** für den leichten Körper gibt (siehe Abb. 5). Diese fünf denkbaren Parkpositionen sind die sog. „**Lagrangepunkte**“ oder „**Librationspunkte**“  $L_1$  bis  $L_5$ . An den Gleichgewichtspunkten heben sich die Gravitationskräfte der beiden schweren Himmelskörper und die Zentrifugalkraft des leichten Objektes gegenseitig auf, so dass sich der leichte Körper immer an derselben Stelle des rotierenden Bezugssystem befindet, das mit den beiden schweren Objekten fest verbunden ist.

Ein Körper, der die Sonne auf dem Lagrangepunkt  $L_1$  umkreist, würde normalerweise eine kürzere Umlaufdauer haben als die Erde. Durch die Anziehungskraft der Erde wird jedoch die



**Abb. 5** Fünf Lagrangepunkte im System Sonne-Erde.

Die Lagrangepunkte  $L_1$  und  $L_2$  haben eine Entfernung von etwa 1,5 Millionen km zur Erde, der Lagrangepunkt  $L_3$  ist etwa 300 Millionen km (2 AE) von der Erde entfernt.



Anziehungskraft der Sonne auf den Körper „geschwächt“, so dass sich seine Umlaufdauer erhöht und er sich im Punkt  $L_1$  synchron zur Erde bewegt.

Die ersten drei Lagrangepunkte sind nur bezüglich Abweichungen senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen den beiden großen Körpern stabil, während sie bezüglich Abweichungen in Richtung dieser Verbindungslinie instabil sind. Ein Körper, der sich vom Punkt  $L_1$  aus senkrecht von der Verbindungslinie entfernt, wird von den senkrechten Komponenten der Gravitationskräfte zurück gezogen. Wird hingegen ein Objekt vom  $L_1$ -Punkt heraus etwas näher an einen der beiden anderen Körper bewegt, so ist die Gravitationskraft des Körpers, dem er näher ist, größer.

In Doppelsternsystemen können sich keine Planeten an den ersten drei Lagrangepunkten aufhalten, da diese Positionen instabil sind. Dennoch sind die Punkte  $L_1$  und  $L_2$  von Nutzen, da **geringe Korrekturmanöver eines Satelliten** ausreichen, um ihn dort zu halten.

**$L_1$**  : Der innere Lagrangepunkt  $L_1$  des Systems Erde-Sonne wird von mehreren Sonden und Satelliten umkreist. Seit 1995 umrundet ihn der europäische Sonnenbeobachtungssatellit **SOHO** im Abstand von rund 600.000 km.

**$L_2$**  : Der äußere Lagrangepunkt  $L_2$  des Systems Erde-Sonne wird gerne für Weltraumteleskope verwendet, da dort die Strahlung von Sonne, Erde und Mond mit nur einem Schirm abgeschirmt werden kann. Die ESA hat im Mai 2009 im Tandem auf einer Trägerrakete Ariane die Teleskope **Herschel** und **Planck** zum Lagrangepunkt  $L_2$  geschickt. Sie umrunden  $L_2$  im Abstand von 400.000 km.

**Herschel** ist das größte Infrarot-Weltraumteleskop und soll im fernen Infrarotspektrum einige der kältesten Objekte im Weltraum untersuchen. Dieser Teil des elektromagnetischen Spektrums wurde bisher kaum erforscht. Das Weltraumteleskop **Planck** soll dagegen das Licht aus den Anfängen des Universums mit bisher unerreichter Empfindlichkeit aufzeichnen.

**$L_3$**  : Der äußere Lagrangepunkt  $L_3$  befindet sich hinter der Sonne im Abstand von 300 Millionen km zur Erde. Da er von uns aus nie gesehen wird, spielt er eine Rolle in einigen Science-Fiction-Romanen: Dort parken die Außerirdischen, um uns unbemerkt zu beobachten.

Für die Librationspunkte  $L_4$  und  $L_5$  konnte Lagrange folgende Aussage beweisen:

Wenn die Masse eines Himmelskörpers **weniger als 4%** der Masse eines anderen Himmelskörpers beträgt, dann ist die Bewegung eines dritten, sehr kleinen Körpers in der Umgebung der beiden Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$  **stabil**.

Jeder der beiden Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$  bildet zusammen mit den beiden schweren Himmelskörpern ein **gleichseitiges Dreieck**, das in der Bahnebene der schweren Himmelskörper liegt und mit deren konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  rotiert.

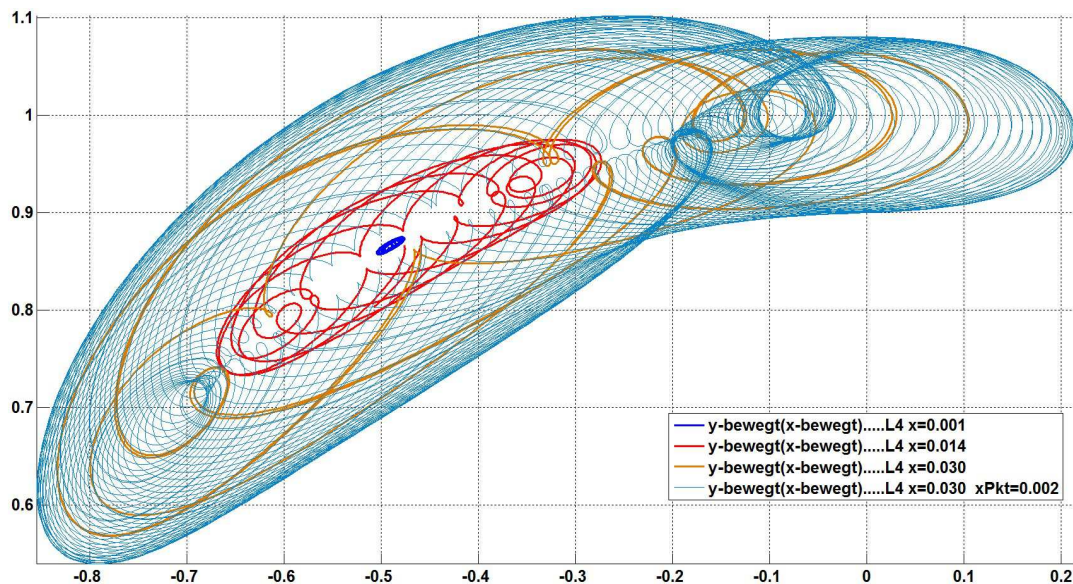


Für ein Sternsystem mit nur einem Stern gilt diese Aussage für diesen Stern, einen darum kreisenden, viel leichteren Planeten und einen Satellit oder Asteroid, der sich stabil im Punkt  $L_4$  und  $L_5$  aufhalten kann.

Im Gegensatz zu  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  sind  $L_4$  und  $L_5$  **stabil**, d. h. in ihrer Nähe können sich Körper auch ohne Bahnkorrektur dauerhaft aufhalten. Daher werden an diesen Punkten natürliche Objekte erwartet. Tatsächlich befinden sich in der Nähe von  $L_4$  und  $L_5$  des Systems Sonne-Erde viele lichtschwache Staubwolken und Kleinkörper.

**Jupitertrojaner** : Im Jahre 1906 wurde der erste Asteroid im Librationspunkt  $L_4$  des Systems Sonne-Jupiter entdeckt; er erhielt den Namen „Achilles“. In der Folgezeit wurden alle Asteroiden im Lagrange-Punkt  $L_4$  bzw.  $L_5$  des Jupiters nach griechischen bzw. trojanischen Helden der Ilias benannt.

Um den Punkt  $L_4$  laufen z. B. „Patroclus (1906 entdeckt), „Agamemnon“ (1919) und „Odysseus“



**Abb. 6** Vier Trojaner umlaufen im rotierenden Koordinatensystem den Lagrange-Punkt  $L_4$ . Die beiden Sonnen mit dem Massenverhältnis  $m_2/m_1 = 100$  ruhen auf der rotierenden x-Achse mit den Koordinaten

$$x_1 = -\frac{100}{101} \quad x_2 = \frac{1}{101} \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 = 1$$

Der Punkt  $L_4$  hat die Koordinaten

$$x_4 = 0,5 - \frac{100}{101} \approx -0,49 \quad y_4 = \sqrt{1 - 0,5^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

$L_4$  liegt innerhalb der kleinen, blauen Bahn. Die Bahnen sind **verschlungen und haben bananenartige Einhüllende**.

Die dargestellte Laufzeit der 4. Kurve ist zehnmal größer als die Laufzeit der drei anderen Kurven.

(1930). Den Punkt  $L_5$  umrunden z. B. „Priamos“ (1917) und „Aeneas“ (1930). Der 1907 in  $L_5$  entdeckte „Hektor“ dürfte mit einer Ausdehnung von 370 x 195 km der größte Jupiter Trojaner sein.

Bislang wurden fast 3000 Jupiter Trojaner entdeckt. Die Trojaner umlaufen ihren Librationspunkt auf [verschlungenen, teils sehr weit reichenden Bahnen, wobei die Einhüllende der Bahnen bananenförmig ist.](#)

**Weitere Trojaner :** Bisher (Stand 2009) sind vier Mars-Trojaner bekannt. Ende 2001 fand man einen Neptun-Trojaner mit 230 km Ausdehnung. Er umrundet die Sonne – wie Neptun – in 166 Erdjahren.