

Wackelstein mit Schlupf. Harter Boden

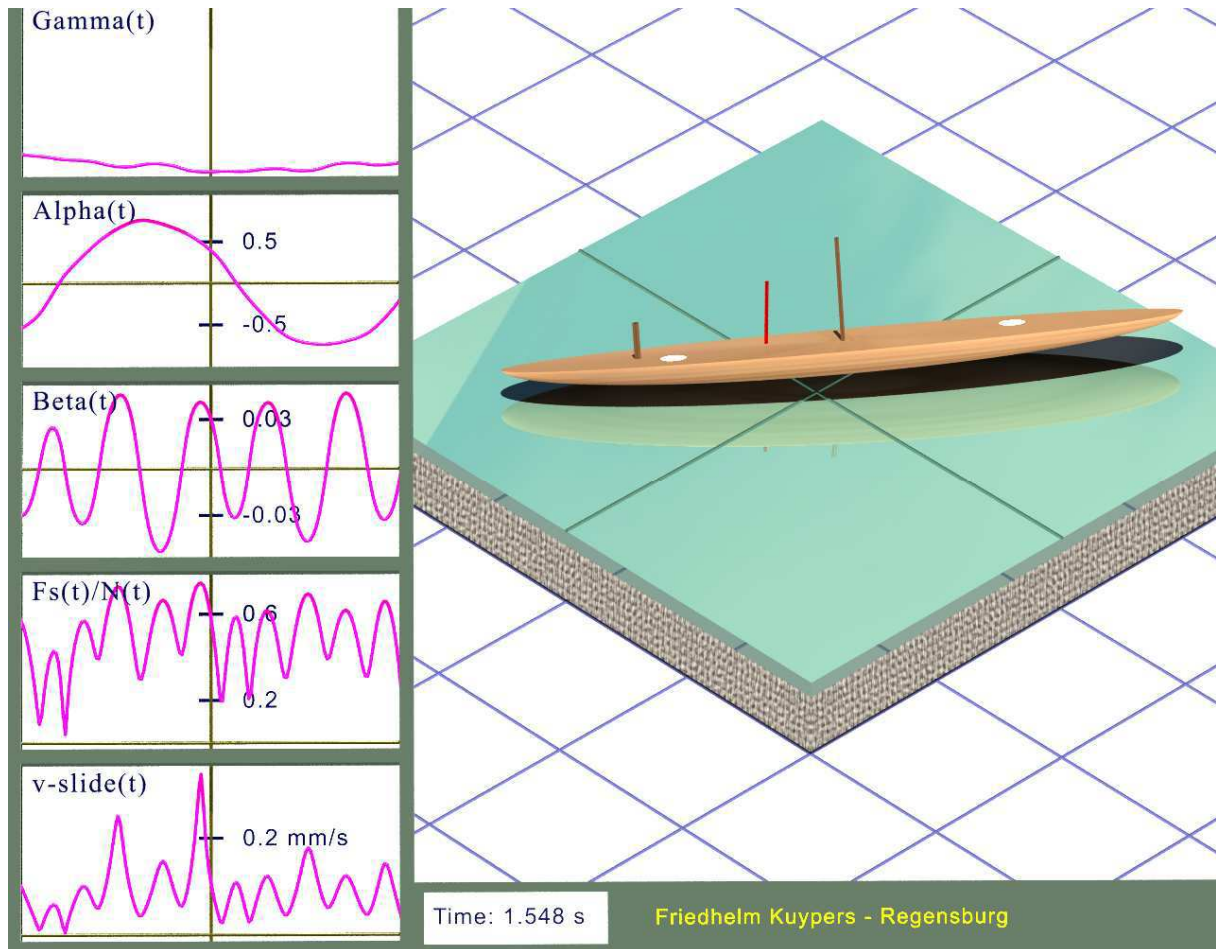


Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Der imaginäre, vertikale **rote** Stab geht durch den Auflagepunkt des Wackelsteines. Die 5 Kurven zeigen den Zeitverlauf der 3 Winkel Gamma, Alpha, Beta sowie den Zeitverlauf des Verhältnisses Haftreibungskraft/Normalkraft und der Geschwindigkeit, mit der der Wackelstein über den Boden rutscht.

Ein Keltischer Wackelstein oder Keltisches Wackelholz (Englisch: Celt oder Rattleback) ist ein starrer Körper aus Holz, der knapp die *Hälfte eines länglichen Ellipsoids* bildet, also eines Ellipsoids, von dem etwas mehr als die obere Hälfte abgeschnitten wurde. Die geometrischen Halbachsen haben die Längen

- a in x_1 – Richtung
- b in x_2 – Richtung
- c in x_3 – Richtung

wobei a deutlich größer ist als b, c (siehe die Abbn. 2 und 3a). In den Holzkörper werden *neben* der großen Halbachse *zwei Metallzylinder* eingesetzt (siehe die Aufsicht in Abb. 3a). Dadurch wird *die Massenverteilung unsymmetrisch*, so dass in der Ruhelage die zwei *horizon-*

tal \ddot{u} n Hauptträgheitsachsen *nicht* mit den *horizontalen* Halbachsen des Ellipsoids übereinstimmen, sondern mit ihnen einen Winkel δ einspannen. Für $\delta > 0$ sind die Hauptträgheitsachsen im mathematisch positiven Sinn gegenüber den Achsen des Ellipsoids gedreht.

Auf einer flachen Unterlage ruht der Wackelstein stabil, wobei die vertikale Hauptträgheitsachse mit der vertikalen Halbachse des Ellipsoids zusammenfällt.

Besonderheiten des Wackelsteins

Versetzt man einen Wackelstein auf einer horizontalen Unterlage in eine Drehung, so rotiert er bei *einem* Drehsinn – z. B. im Gegenuhrzeigersinn – erwartungsgemäß stabil, wobei die Drehung wegen der Reibung immer langsamer wird und nach einigen Sekunden aufhört. Beim umgekehrten Drehsinn – in diesem Fall im Uhrzeigersinn – zeigt er ein  berraschendes Verhalten: Es treten seitliche Kippbewegungen auf, die immer stärker werden und der Rotation die gesamte Bewegungsenergie entziehen. Nach wenigen Sekunden kommt die Rotation völlig zum Erliegen, und die Wackelbewegung enthält die ganze, bis dahin noch vorhandene Bewegungsenergie. Anschließend wird der größte Teil der kinetischen Energie wieder in Rotationsenergie umgesetzt, wobei die Rotation nun die bevorzugte Drehrichtung im Gegenuhrzeigersinn hat. *Der Wackelstein hat seinen Drehimpuls umgekehrt.*

Nur *die* Drehrichtung ist stabil, bei der die zwei horizontalen Hauptträgheitsachsen den horizontalen Halbachsen des Ellipsoids „vorauslaufen“. Der in den Abb. 2 und 3a dargestellte Wackelstein möchte sich daher im Uhrzeigersinn drehen; für ihn ist der Winkel $\delta < 0$. Bei einigen Wackelsteinen kommen im Experiment am Ende der Bewegung drei bis höchstens vier weitere Umkehrungen der Drehrichtung vor; sie sind allerdings wegen der kleinen

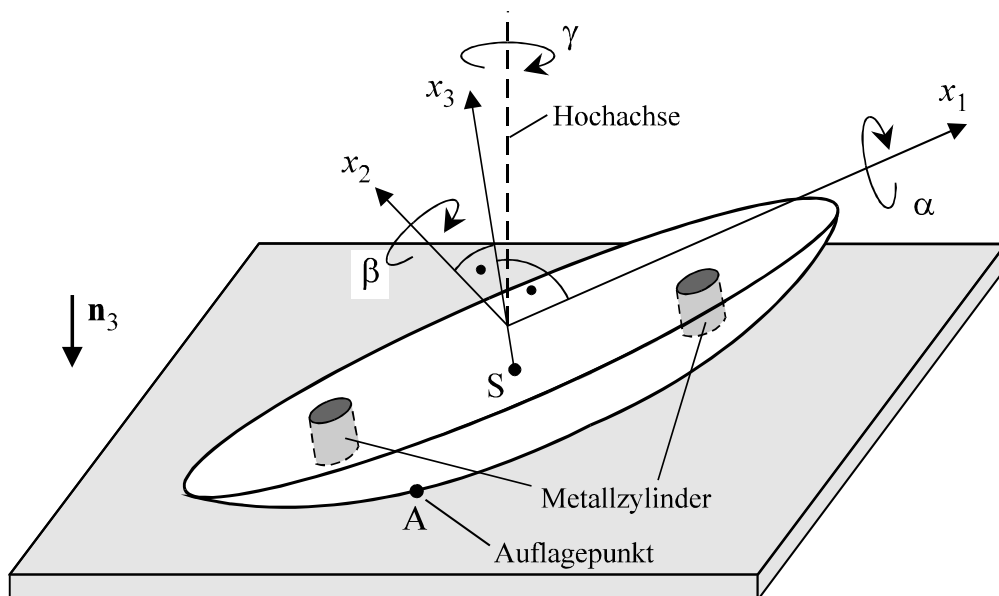


Abb. 2 Die körperfesten x_1, x_2 -Achsen laufen durch den **geometrischen** Mittelpunkt des (nichtabgeschnittenen) Ellipsoids und sind parallel zur ebenen Decke des Wackelsteins. Die x_3 -Achse steht senkrecht auf der Deckfläche. Die Drehungen um α, β erfolgen um die körperfesten x_1, x_2 -Achsen, die γ -Drehung erfolgt um die inertielle Hochachse.

verbleibenden Energie nur sehr schwach.

Wackelhölzer können in einigen Spielzeuggeschäften gekauft werden. Mit Geduld und Glück lassen sich am Strand Kieselsteine mit gewölbter Unterfläche und „schiefer“ Massenverteilung finden, die die Eigenschaften eines Wackelsteines haben. Mit solchen Kieselsteinen haben angeblich keltische Priester früher Entscheidungen getroffen.

Mathematisches Modell

Die Orientierung und damit auch die Bewegung des Wackelsteins werden durch drei Drehungen in folgender Reihenfolge beschrieben:

- 1) Drehung γ um die inertielle Hochachse
- 2) Drehung α um die körperfeste Längsachse x_1 des Ellipsoids
- 3) Drehung β um die körperfeste Querachse x_2 des Ellipsoids

Für die **laminare Luftreibung** wird folgendes körperfeste Reibungsmoment angesetzt:

$$\mathbf{N}_R = - \begin{pmatrix} c_1 \omega_1 \\ c_2 \omega_2 \\ c_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i = \text{Luft-Reibungskoeffizient.} \quad (1)$$

Der hier simulierte Wackelstein kann **mit Schlupf** über den **harten Boden rutschen** oder **ohne Schlupf rollen**. Der tiefste Punkt des Wackelsteins *kann nicht vom harten Boden abheben*.

Die Geschwindigkeit, mit der der tiefste körperfeste Punkt des Wackelsteines über den Boden rutscht, wird \mathbf{v}_K genannt. Im Verlauf der meisten Bewegungen tritt neben reinem Rollen (mit $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$) zumindest zeitweise auch Rutschen ($\mathbf{v}_K \neq \mathbf{0}$) auf. Der Wechsel zwischen Rollen und Rutschen bereitet ein Problem bei der Aufstellung und Lösung der Dgln. Die Gründe dafür sind die bekannten und nur *näherungsweise richtigen* Gln.

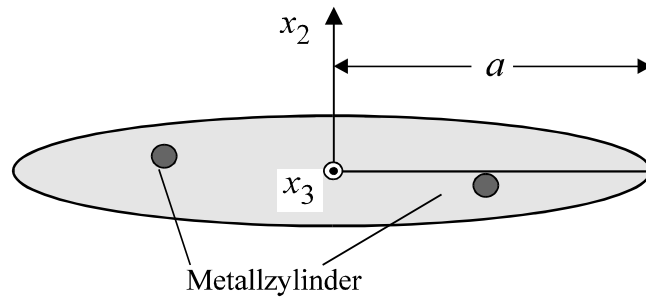


Abb. 3a Aufsicht des Wackelsteins. Hier ist $\delta < 0$.

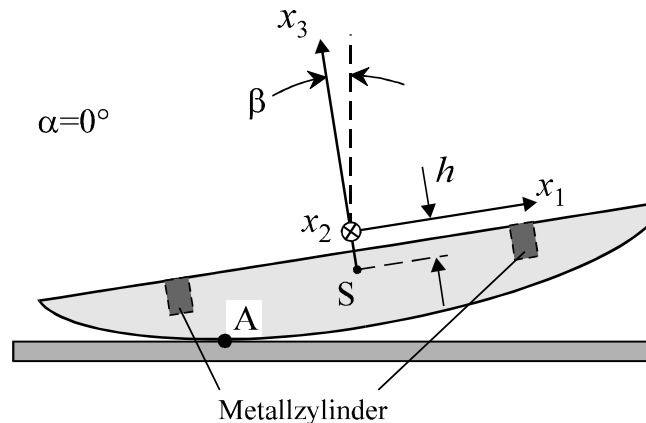


Abb. 3b Seitenansicht des Wackelsteins für $\alpha = 0^\circ$.

$$R_{\text{Haft}}^{\max} = f_0 N \quad \text{und} \quad \mathbf{R}_{\text{Rutsch}} = -f N \frac{\mathbf{v}_K}{v_K} \quad (2a/b)$$

mit N = Normalkraft und $f < f_0$. Sie liefern bei den Übergängen „Haften \leftrightarrow Rutschen“ *Unstetigkeiten* in der Reibungskraft. Außerdem sind die Dgln. beim Rollen anders als beim Rutschen.

Folgende zwei Lösungsmöglichkeiten liefern meistens *ähnliche Bewegungen*:

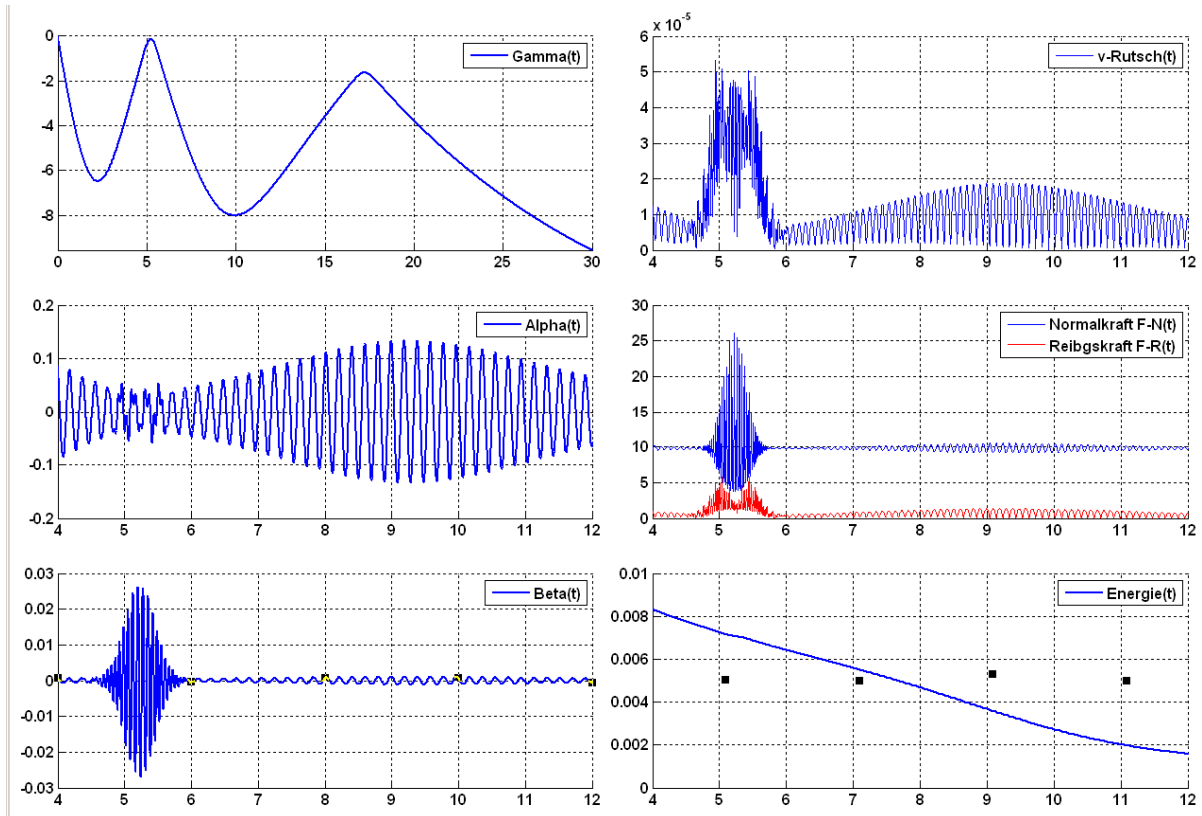


Abb. 4 Die numerisch berechneten Kurven zeigen links die Winkel $\gamma(t), \alpha(t), \beta(t)$ und rechts die Geschwindigkeit $v_K(t)$, mit der der Wackelstein über den Boden rutscht, sowie Normalkraft, Reibungskraft und Energie. Die erste Kurve $\gamma(t)$ wurde für das volle Zeitintervall $[0, 30\text{ s}]$ gezeichnet, die fünf restlichen Kurven für das verkleinerte zeitliche Teilintervall $[4, 12\text{ s}]$. Die Drehrichtung – beschrieben durch $\gamma(t)$ – dreht sich viermal um.

Die Anfangsbedingungen und Parameter des hier berechneten Wackelsteins lauten:

$$\alpha = \beta = -0,01 \text{ Rad} \quad \omega_3 = -5 \text{ Rad/s} \quad \dot{y}_S = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{Die restlichen 4 Anfangsbedn. sind null.}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad I_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad I_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad I_3 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$a = 0,2 \text{ m} \quad b = 0,03 \text{ m} \quad c = 0,02 \text{ m} \quad \delta = -0,1 \text{ Rad}$$

$$\overline{SM} = 0,01 \text{ m} \quad \text{Luftreibg. } c = 1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2/\text{s} \quad f\text{-Gleiten} = 0,6 \quad f\text{-Haften} = 0,8$$

Die Toleranzen des ODE-Verfahrens sind sehr klein: Rel-Tol = 10^{-8} Abs-Tol = 10^{-10}

1-te Möglichkeit: Wir nehmen an, dass der Wackelstein zur Zeit $t = 0$ mit Schlupf startet ($v_K \neq 0$):

- Das Lösungsverfahren muss solange die Dgln., die bei Schlupf gelten, verwenden, bis der Betrag v_K der Rutschgeschwindigkeit unter einen sehr kleinen Wert (z. B. 10^{-6} m/s) gefallen ist.
- Dann wird die (sehr kleine) Rutschgeschwindigkeit gleich Null gesetzt und das Lösungsverfahren arbeitet solange mit den Dgln. für reines Rollen, bis die Haftkraft den maximal möglichen Wert $f_0 N$ überschreitet.
- Sodann wird dem tiefsten Punkt des Wackelsteins eine Geschwindigkeit v_K in die entgegengesetzte Richtung der letzten Haftkraft gegeben mit einem kleinen Betrag (z. B. 10^{-5} m/s). Das Verfahren rechnet jetzt wieder mit den Dgln. weiter, die für Rutschen gelten usw.

Diese erste Möglichkeit ist aufwendig und natürlich – wie auch die zweite Möglichkeit – nicht ganz exakt.

2-te Möglichkeit: Im Maschinenbau werden oft **kombinierte Reibungsansätze** verwendet, die einen *stetigen Übergang* zwischen Rollen und Rutschen beschreiben. Denkbar ist z. B. der Ansatz

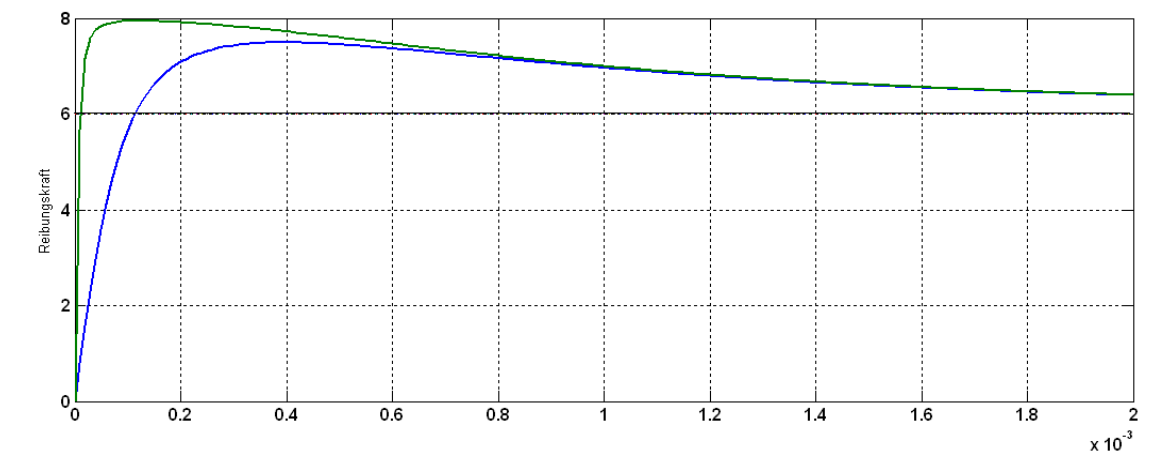


Abb. 5 Die Kurven zeigen den kombinierten Haftreibungs-Gleitreibungs-Ansatz

$$R = \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{s}{m} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) N \frac{v_K}{\sqrt{v_{gr}^2 + v_K^2}} \quad \text{mit } N = \text{Normalkraft}$$

für Beträge der Rutschgeschwindigkeit im Intervall $0 \leq v_K \leq 2$ mm/s. Folgende Parameter wurden gewählt:

$$f = 0.6 \quad f_0 = 0.8 \quad \text{Normalkraft } N = 10 \text{ N}$$

$$v_{gr} = 10^{-4} \frac{m}{s} \quad (\text{blaue Kurve}) \quad \text{bzw.} \quad v_{gr} = 10^{-5} \frac{m}{s} \quad (\text{grüne Kurve})$$

$$\mathbf{R} = - \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) N \frac{v_K}{\sqrt{10^{-8} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + v_K^2}} \quad (3)$$

Die runde Klammer liefert einen stetigen Übergang zwischen einem Maximum, das der Haftreibungszahl f_0 nahe kommt, und der Gleitreibungszahl f . Der Bruch am Ende verhindert Divisionen durch Null und sorgt für einen stetigen Übergang der Reibungskraft beim Vorzeichenwechsel des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_K . In Abb. 5 wird R in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsbetrag v_K dargestellt. Beachte, dass sich die Reibungskraft R bei sehr kleinen Rutschgeschwindigkeiten v_K bei kleinsten Verschiebungen von v_K extrem stark ändert. Diese hohe Empfindlichkeit des kombinierten Reibungsansatzes macht numerische Berechnungen der Dgln. schwierig und anspruchsvoll.

Der kombinierte Ansatz ersetzt die reine Rollbewegung mit $v_K = 0$ durch eine Gleitbewegung mit sehr kleiner Rutschgeschwindigkeit $v_K < 0,4 \text{ mm/s}$.

Die Bewegung des rutschenden und rollenden Wackelsteins kann vollständig mit den Dgln. für Rutschen berechnet werden, wenn man in diesen Dgln. den Term (siehe Gl. (2b))

$$\frac{f}{\sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} = \frac{f}{v_K}$$

durch den Term

$$\left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) \frac{1}{\sqrt{10^{-8} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + v_K^2}}$$

ersetzt. Das Programm MECHANICUS arbeitet mit dieser einfacheren Möglichkeit.

Grafik

Zum Wackelstein mit Schlupf gibt es 17 Zusatzfunktionen. Die Zusatzfunktion

Neigungswinkel Theta

ist wie folgt definiert: Wir denken uns einen dünnen, masselosen Stab, der *senkrecht* auf der ebenen Deckfläche des Wackelsteines steht und daher in der Ruhelage des Wackelsteines senkrecht nach oben zeigt. Die Neigung dieses Stabes verdeutlicht die Größe der Winkel α und β . Der „Neigungswinkel Theta“

$$\vartheta = \arccos(\cos \alpha \cos \beta)$$

ist der Winkel zwischen diesem Stab und der Hochachse, die durch das untere Stabende läuft.

Animation

Der Auflagepunkt (Kontaktpunkt mit dem Boden) wird bei der MatLab-Animation durch einen vertikalen **roten Pfeil**, bei der POV-Ray-Animation durch einen vertikalen **roten Stab** markiert, die beide durch den Auflagepunkt des Wackelsteins gehen.

Zur Verdeutlichung der Kippbewegungen enthält der in der Animation dargestellte Wackelstein einen (oder gar zwei) masselose dünne Stäbchen, die senkrecht auf der ebenen Deckfläche des Wackelsteins stehen. Bei der POV-Ray-Animation werden beide Stäbe von einer senkrecht über ihnen stehenden Lichtquelle beleuchtet und werfen einen Schatten.

Ein Wackelstein, der sich aufgrund „untypischer“ Anfangsbedingungen überschlägt, bewegt sich laut *mathematischem Modell* wie ein *vollständiger* Ellipsoid, also nicht wie ein abgeschnittener Ellipsoid mit ebener Deckfläche. Deshalb kann der Wackelstein bei der Animation (dort wird er – wie in Abb. 1 – mit ebener Deckfläche dargestellt) zeitweise in der Luft schweben.

Wenn der Winkel δ zwischen den Hauptträgheitsachsen und den geometrischen Halbachsen mit Längen a, b gleich Null ist ($\delta = 0$), so werden bei der Animation keine Metallzylinder gezeichnet.

Bei der Wahl der Hauptträgheitsmomente I_1, I_2, I_3 einerseits und der Längen a, b, c der geometrischen Halbachsen andererseits ist zu beachten, dass diese Größen ungefähr zusammenpassen. Andernfalls kann die Animation eventuell etwas befremdlich wirken.

Numerische Lösungsverfahren

Da sich die Reibungskraft R nach Abb. 5 bei sehr kleinen Rutschgeschwindigkeiten v_K bei kleinsten Änderungen von v_K extrem stark ändert, sind die Dgln. steif. Daher ist das steife Lösungsverfahren ode15s empfehlenswert; es arbeitet schneller und zuverlässiger als die nicht-steifen Verfahren ode45 und ode113.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Die Dgln. sind sehr lang und werden daher hier nicht angegeben.

Literatur

- Literatur ist mir nicht bekannt. Allerdings werden in MECHANICUS die Dgln. des Wackelsteins **ohne** Schlupf aufgestellt. Siehe die pdf- oder die Word-Datei zu dem System Wackelstein ohne Schlupf.
- Siehe auch K. Magnus, *Kreisel – Theorie und Anwendungen*, Springer Verlag 1971.