

Feder mit Längs- und Torsionsschwingung

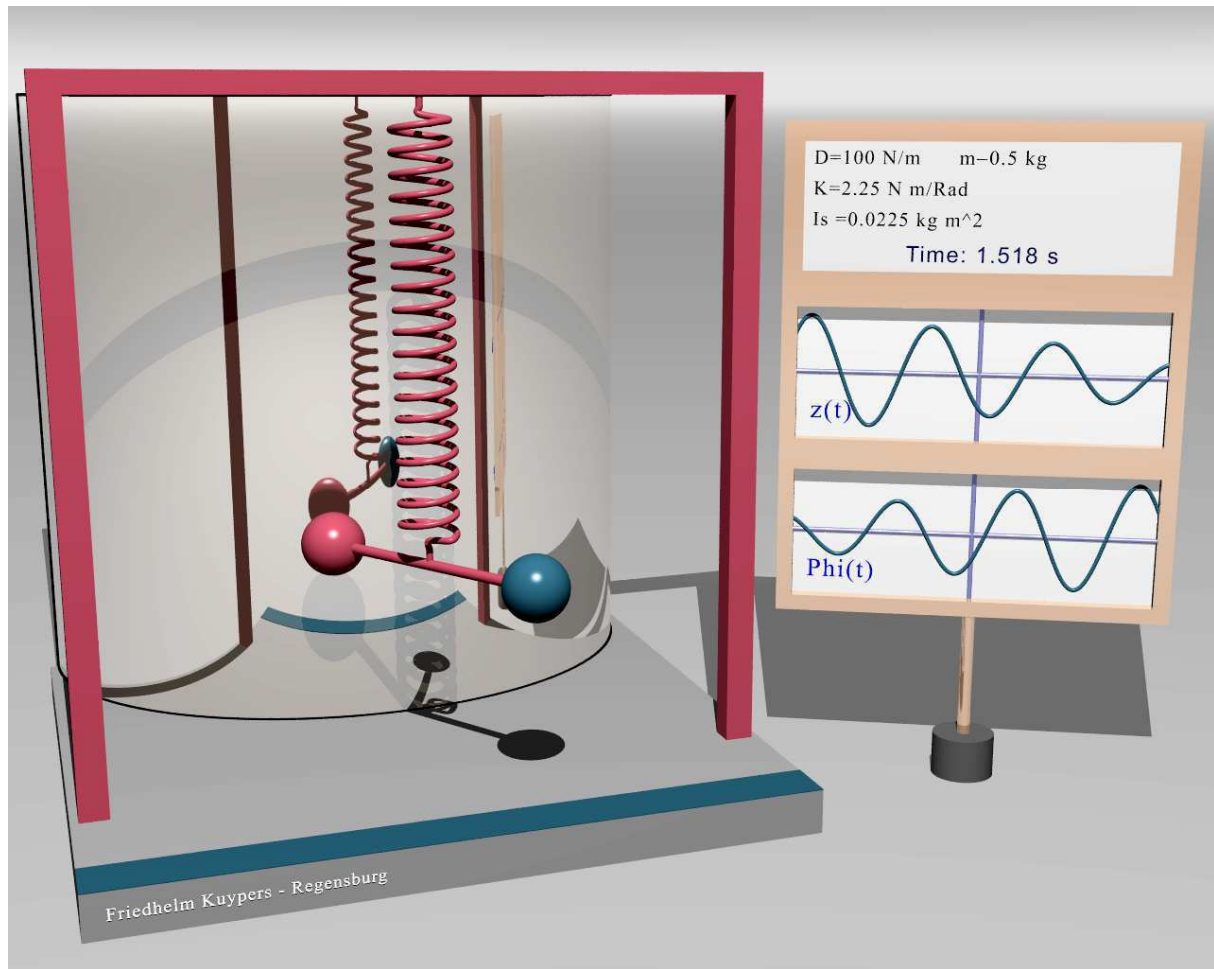


Abb. 1 Das sog. Wilberforce-Pendel schwingt vor einem zylindrischen Wölbspiegel. Rechts werden die Kurven $z(t)$ und $\varphi(t)$ dargestellt.

An einer Feder hängt eine Hantel mit masseloser Hantelstange der Länge l und mit zwei Kugeln, die jeweils die Masse m und vernachlässigbare Trägheitsmomente haben.

Nach dem Satz von Steiner hat die Hantel für Drehungen um eine Achse, die senkrecht zu ihrer Längsachse durch den Schwerpunkt läuft, das Trägheitsmoment

$$I_S = 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m}{2} l^2$$

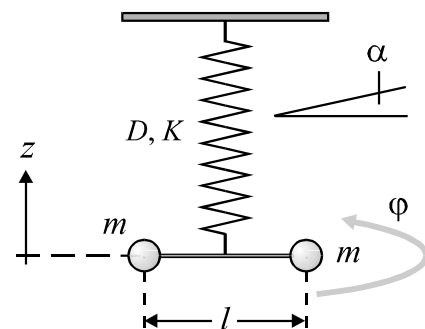


Abb. 2 Eine Hantel hängt an einer Feder, die gekoppelte Längs- und Torsionsschwingungen ausführt. z ist die Auslenkung aus der vorgespannten Ruhelage.

Die Feder hat die Federkonstante D und die Torsionskonstante K mit $[K] = \text{N m/Rad}$.

Die ungestörte Eigenfrequenz für reine Längsschwingungen entlang der vertikalen z -Achse ist

$$\omega_{0,\text{län}} = \sqrt{\frac{D}{2m}} \quad (1)$$

Die ungestörte Eigenfrequenz für reine Torsionsschwingungen, die durch den Winkel φ beschrieben werden und um die Längsachse der Feder erfolgen, beträgt

$$\omega_{0,\text{tor}} = \sqrt{\frac{K}{I_S}} \quad (2)$$

Dieses System wird in der Literatur sehr oft „**Wilberforce-Pendel**“ genannt – nach dem englischen Physiker L. R. Wilberforce, der es im Jahre 1894 erfand. Wir wollen den Namen „Pendel“ hier nicht verwenden, da wir aufgrund der Anfangsbedingungen keine seitlichen Pendel-Schwingungen zulassen.

Besonderheiten des Systems

Wenn die beiden ungestörten Eigenfrequenzen $\omega_{0,\text{län}}$ und $\omega_{0,\text{tor}}$ gleich sind, so tritt eine **Schwebung** auf: Zieht man die Hantel aus der Ruhelage senkrecht nach unten und lässt sie los, so schwingt sie zunächst auf und ab. Dabei beginnt die Hantel langsam um die Hochachse zu schwingen. Die Torsionsschwingung wird immer stärker und entzieht der Längsschwingung die Energie, bis die Hantel nur noch um die Hochachse schwingt. Anschließend geht die Energie von der Torsionsschwingung wieder in die Längsschwingung zurück usw. (siehe Abb. 2).

Man kann dieses Phänomen vergleichen mit der Schwebung von zwei identischen, schwach gekoppelten Pendeln. Wenn die beiden ungestörten Eigenfrequenzen $\omega_{0,\text{län}}$ und $\omega_{0,\text{tor}}$ nur näherungsweise gleich sind, so führt nur diejenige Koordinate eine reine (vollständige) Schwebung durch, deren Auslenkung am Anfang Null ist.

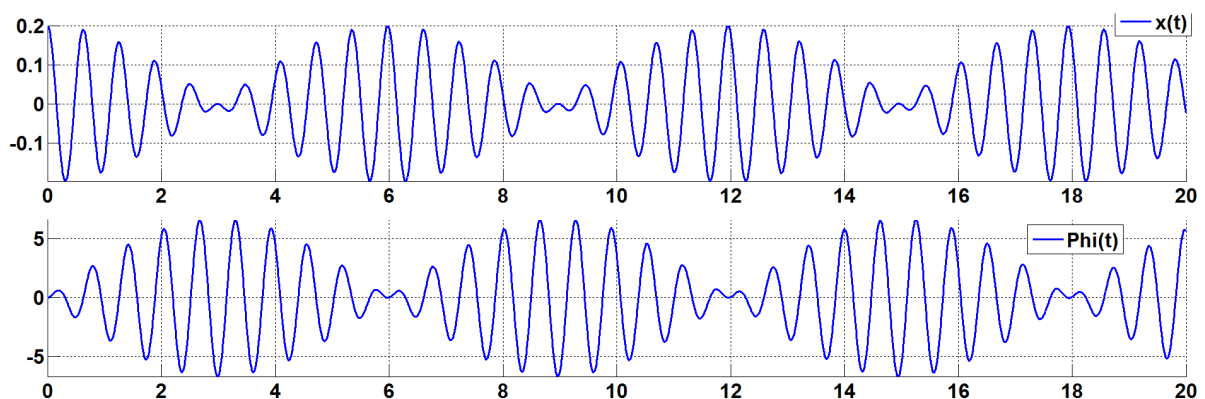


Abb. 3 Schwebung der gekoppelten Längs- und Torsionsschwingungen. Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$z(0) = 0.2 \text{ m} \quad \dot{z}(0) = 0 \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$$

$$m = 0.5 \text{ kg} \quad l = 0.3 \text{ m} \quad D = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad K = 2.25 \frac{\text{N m}}{\text{Rad}} \quad R = 0.03 \text{ m} \quad \alpha = \frac{\pi}{30}$$

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Wir betrachten eine Feder, die oben fest mit einer Decke verbunden ist; das obere Ende der Feder kann also weder verschoben noch gedreht werden. Von oben betrachtet soll die *Schraubenlinie im Uhrzeigersinn nach unten laufen*.

Jetzt hängen wir an das untere Ende der momentenfreien Feder einen *dünnen* Faden und dehnen – durch vertikales Ziehen am Faden – die Feder um die Strecke z ; nach Abb. 2 ist $z < 0$. *Da sich die Länge des Federdrahtes und der Windungsradius R bei der Dehnung der Feder kaum ändern*, muss sich das untere Ende der Feder mit dem Winkel φ um die Längsachse der Feder drehen. *Eine Dehnung der Feder reduziert die Zahl der Windungen*. (Umgekehrt erhöht eine Stauchung der Feder die Zahl der Windungen.)

Nach der etwas schwierigeren Rechnung von U. Köpf in Am. J. Phys. **58**(9), Sep. 1990, 833-837 lautet der positive Gleichgewichts-Torsionswinkel φ_{gl} bei der momentenfreien Längenänderung z für kleine Steigungswinkel α der Schraubenlinie näherungsweise :

$$\varphi_{\text{gl}}(z) = -\frac{\alpha}{R} z \quad (3a)$$

mit α = Steigungswinkel der Schraubenlinie, also der Federwindungen.¹

und R = Radius der Schraubenlinie.

Wenn wir umgekehrt das untere Ende der kräftefreien Feder mit einem Drehmoment um den Winkel φ drehen, dann ändert sich der Radius R der Federwindung kaum; daher verschiebt sich die Gleichgewichtslage des unteren Federendes um die Strecke z . Die Gleichgewichtsdehnung z_{gl} bei einer kräftefreien Torsion φ lautet ebenfalls nach U. Köpf:

$$z_{\text{gl}}(\varphi) = -\alpha R \varphi \quad (3b)$$

Mit D = Federkonstante der drehmomentfreien Feder

und K = Torsionskonstante der kräftefreien Feder ($[K] = \text{N m / Rad}$)

ergeben sich die Bewegungsgln. für kleine Ausschläge zu

$$2 m \ddot{z} = -D \left(z + \alpha R \varphi \right) \quad (4a)$$

$$I_S \ddot{\varphi} = -K \left(\varphi + \frac{\alpha}{R} z \right) \quad (4b)$$

Diese Dgln. beinhalten eine Kopplung zwischen den Längsschwingungen und den Torsionsschwingungen. **Sie gelten näherungsweise nur für kleine Steigungswinkel α der Feder.**

¹ Der Steigungswinkel α soll größer bzw. kleiner als Null sein, wenn – von oben betrachtet – die Feder im Uhrzeigersinn bzw. im Gegenuhrzeigersinn nach unten läuft. Für unsere Feder ist $\alpha > 0$.

Der Kopplungsgrad der beiden Schwingungen ist proportional zum Steigungswinkel α der Federwindungen. Für $\alpha = 0$ sind die Längs- und die Torsionsschwingung entkoppelt.

Lösung der linearen Dgln.

Die Dgln.

$$\frac{2m}{D} \ddot{z} + z + \alpha R \varphi = 0 \quad (5a)$$

$$\frac{I_S}{K} \ddot{\varphi} + \varphi + \frac{\alpha}{R} z = 0 \quad (5b)$$

sind zwei gekoppelte, lineare, homogene Dgln. zweiter Ordnung. Sie können leicht mit einem Exponentialansatz gelöst werden. Der Ansatz

$$z(t) = a_1 e^{i\omega t} \quad \varphi(t) = a_2 e^{i\omega t}$$

führt auf

$$\left(-\frac{2m}{D} \omega^2 + 1 \right) a_1 + \alpha R a_2 = 0 \quad (6a)$$

$$\frac{\alpha}{R} a_1 + \left(-\frac{I_S}{K} \omega^2 + 1 \right) a_2 = 0 \quad (6b)$$

Dieses Gleichungssystem für die Koeffizienten a_1, a_2 hat nur dann nicht verschwindende Lösungen (mindestens ein $a_i \neq 0$), wenn ihre Determinante Null ist:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2m}{D} \omega^2 - 1 \right) \left(\frac{I_S}{K} \omega^2 - 1 \right) - \alpha^2 = 0 \\ \Rightarrow & \left(\omega^2 - \frac{D}{2m} \right) \left(\omega^2 - \frac{K}{I_S} \right) - \frac{D K}{2m I_S} \alpha^2 = 0 \\ \Rightarrow & \omega^4 - \left(\frac{K}{I_S} + \frac{D}{2m} \right) \omega^2 + \frac{D K}{2m I_S} (1 - \alpha^2) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gl. für ω^2 . Zur Vereinfachung nehmen wir nun an, dass die beiden ungestörten Eigenfrequenzen, also die zwei Eigenfrequenzen von nicht gekoppelten Schwingungen ($\alpha = 0$) gleich sind:

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{2m}} = \sqrt{\frac{K}{I_S}} \quad (7)$$

Diese Gl. für die Übereinstimmung der beiden Eigenfrequenzen entkoppelter Schwinger ($\alpha = 0$) hängt weder von der Windungszahl n noch vom Windungsradius R der Feder ab.

$$\Rightarrow \omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4(1-\alpha^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2} = \sqrt{\omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 - \omega_0^4(1-\alpha^2)}} = \sqrt{1 \pm \alpha} \omega_0$$

Wir setzen $\omega_{1/2}$ unter Beachtung der Gl. (7) in die Gln. (6a/6b) ein und erhalten die beiden Normalschwingungen (Fundamentalschwingungen):

- $\omega_1 = \sqrt{1+\alpha} \omega_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{R} a_1$
- $\omega_2 = \sqrt{1-\alpha} \omega_0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{R} a_1$

Animation

Bei schnellen MatLab-Animationen *wird die Torsion der Feder nicht dargestellt*. Da der Anwender bei der Animation die meiste Zeit auf die Hantel blickt, wird die *ganze* Feder wie die Hantel um die Hochachse gedreht. Folglich dreht sich die Feder auch oben an ihrem Aufhängepunkt; das sollte aber nicht allzu sehr stören, da der Anwender wohl nur selten auf den Aufhängepunkt schaut.

Außerdem wird der Steigungswinkel der Schraubenlinie bei der MatLab-Animation nicht richtig wiedergegeben.

Bei fotorealistischen POV-Ray-Animationen hingegen wird die Torsion der Feder dargestellt und die Neigung der Schraubenlinie wird korrekt wiedergegeben. An ihrem oberen Ende wird die Feder nicht gedreht.

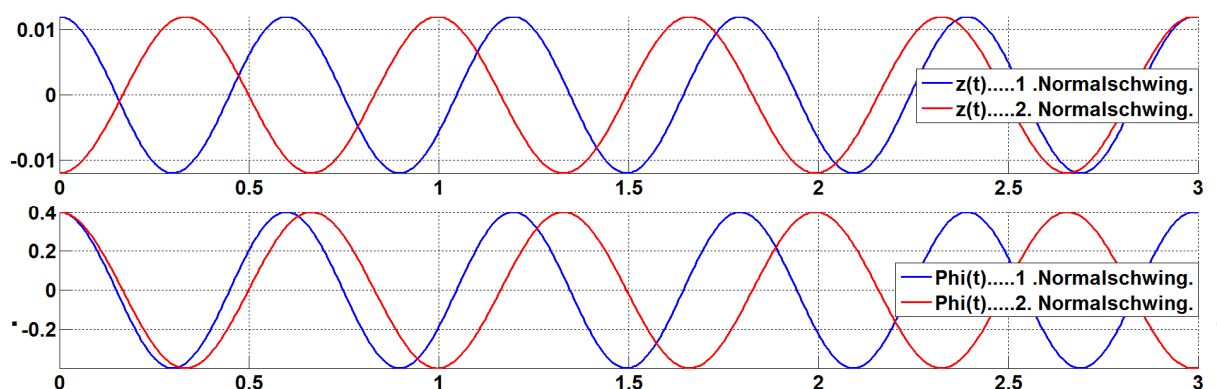


Abb. 4 Erste und zweite Normalschwingung der gekoppelten Längs- und Torsionsschwingungen.

Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten für die blau gezeichnete **erste Normalschwingung**:

$$z(0) = 0.012 \text{ m} \quad \dot{z}(0) = 0 \quad \varphi(0) = 0.4 \text{ Rad} \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

$$m = 0.5 \text{ kg} \quad l = 0.3 \text{ m} \quad D = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad K = 2.25 \frac{\text{N m}}{\text{Rad}} \quad R = 0.03 \text{ m} \quad \alpha = \frac{\pi}{30}$$

Bei der rot gezeichneten **zweiten Normalschwingung** wurde nur das Vorzeichen von $z(0)$ umgekehrt.

Literatur

- H. J. Leisi: Klassische Physik, Birkhäuser-Verlag. Leisi setzt in den Gln. (3a/b) nur unbekannte Konstanten c_1, c_2 anstelle von $\alpha_0 R$ und α_0/R ein.
- U. Köpf: Am. J. Phys. **58**(9), Sep. 1990, 833–837. Hier werden u. a. die Gln. (3a/b) hergeleitet.
- A. Sommerfeld: Mechanik der deformierbaren Medien, Verlag Harri Deutsch, „§42. Torsion und Biegung bei der Schraubenfeder“. Diese Abhandlung arbeitet mit dem Prinzip von Castigliano und ist schwierig.