

Federpendel

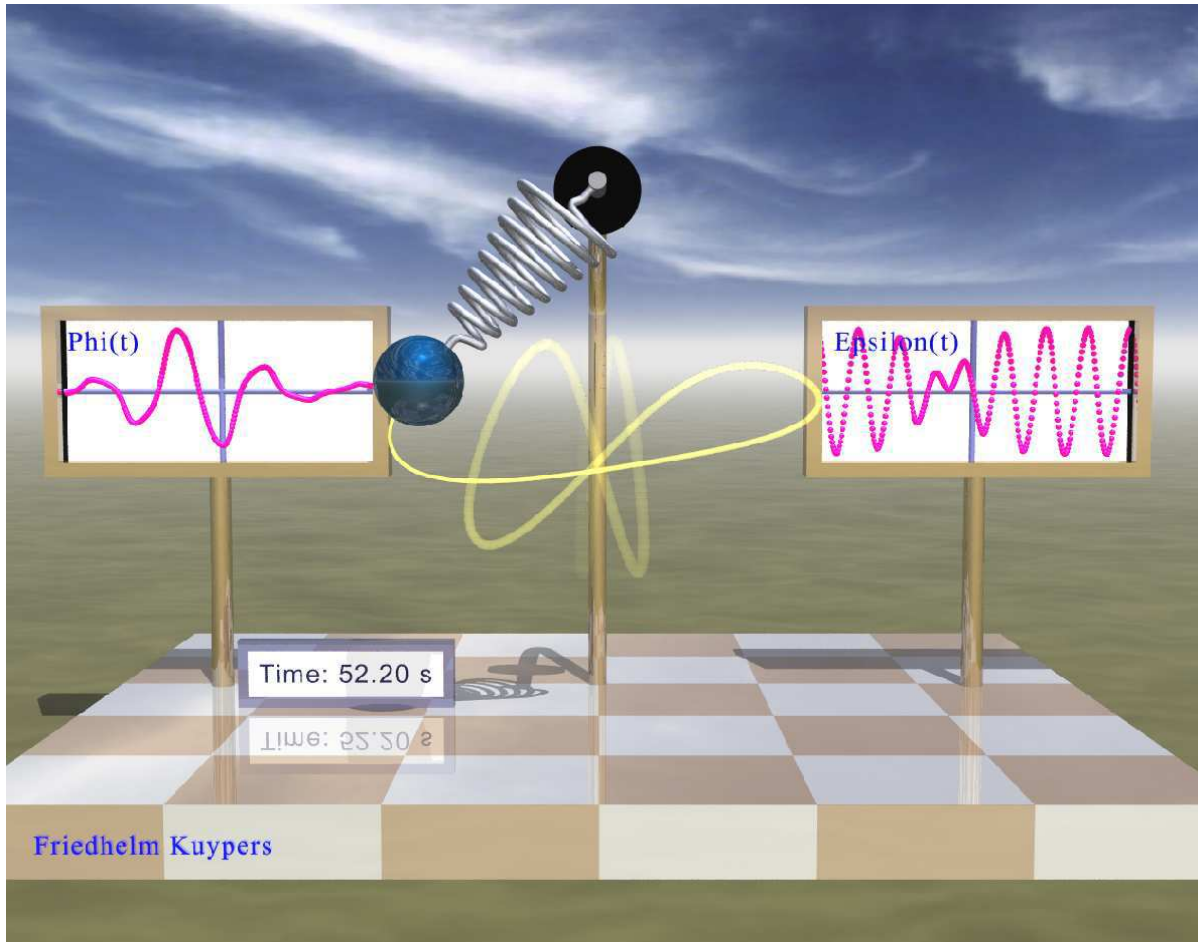


Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation, die für folgende Anfangsbedingungen und Parameter gemacht wurde:

$$\varphi_0 = 0.001 \text{ rad} \approx 0.057^\circ \quad \varepsilon_0 = 0,8 \text{ m} \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varepsilon}_0 = 0$$

$$m = 2,3 \text{ kg} \quad D = 50 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad l_{\text{Ruhelage}} = 1,805 \text{ m}$$

Wegen $\sqrt{\frac{g}{l_{\text{Ruhelage}}}} = 0,500006 \sqrt{\frac{D}{m}}$ ist die anfangs nahezu vertikale Schwingung **instabil**.

Das ebene Federpendel mit Masse m und Federkonstante D schwingt in der vertikalen Ebene und hat die unabhängigen Koordinaten ε, φ . ε ist die Längenänderung der Feder – bezogen auf l . l ist die **Gleichgewichtslänge** der Feder bei Belastung mit der Gewichtskraft $m g$.

Die Feder ist (wie auch in anderen Systemen mit Federn) masselos. Das Trägheitsmoment der schwingenden Masse wird vernachlässigt.

Der Aufhängepunkt A kann harmonisch auf und ab schwingen. Seine y-Koordinate lautet:

$$y_A(t) = A_y \cos(\Omega t)$$

Für einen ruhenden Aufhängepunkt ($A_y = 0$) hat die Gleichgewichtslage die Koordinaten

$$(x, y) = (0, -l).$$

Die schwingende Masse erfährt eine geschwindigkeitsproportionale **Reibungskraft**:

$$R = c v$$

mit v = Geschwindigkeit der Masse.

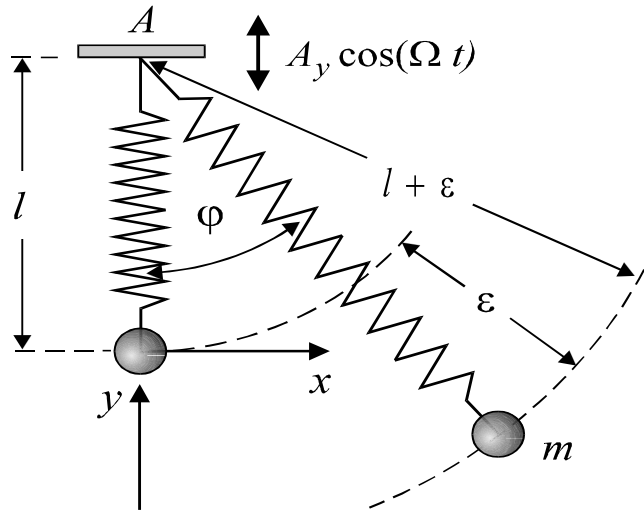


Abb. 2 Ebenes Federpendel mit vertikal schwingendem Aufhängepunkt A.

Differentialgln.

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{l+\varepsilon} \left[2 \dot{\varphi} \dot{\varepsilon} - A_y \Omega^2 \cos(\Omega t) \sin \varphi + g \sin \varphi \right] - \frac{1}{l+\varepsilon} \frac{c}{m} \left[(l+\varepsilon) \dot{\varphi} - A_y \Omega \sin(\Omega t) \sin \varphi \right] \quad (1a)$$

$$\ddot{\varepsilon} = (l+\varepsilon) \dot{\varphi}^2 - A_y \Omega^2 \cos(\Omega t) \cos \varphi - g (1 - \cos \varphi) - \frac{D}{m} \varepsilon - \frac{c}{m} (\dot{\varepsilon} + A_y \Omega \sin(\Omega t) \cos \varphi) \quad (1b)$$

Für $\varepsilon = -l$ schwingt die Masse m durch den Aufhängepunkt. Hier liegt eine Singularität vor.

Besonderheiten des Systems

Das System ist auch für $A_y = 0$, also auch für eine ruhende Aufhängung **chaotisch**.

Im nicht-chaotischen Bereich zeigt das Federpendel bei ruhendem Aufhängepunkt ($A_y = 0$) ein interessantes physikalisches Phänomen: Wenn die Gl. für die Parameter

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

erfüllt oder zumindest ungefähr erfüllt ist, dann sind **vertikale Schwingungen instabil**. Selbst die kleinste seitliche Auslenkung genügt, um die Masse irgendwann in starke seitliche Pendelschwingungen zu versetzen (siehe Abb. 1 und Abb. 3). Das System wechselt dann dauernd zwischen Pendelschwingungen und nahezu vertikalen Hubschwingungen hin und her.

Numerische Rechnungen mit den Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 \neq 0 \quad \varepsilon_0 \neq 0 \quad \dot{\varphi}_0 = 0 \quad \dot{\varepsilon}_0 = 0$$

zeigen:

- Der Wechsel zwischen seitlicher, pendelartiger Schwingung und vertikaler Schwingung erfolgt umso schneller, je größer φ_0 und ε_0 sind.
- Die maximale Stärke der pendelartigen Schwingung ist unabhängig von φ_0 und nimmt mit wachsendem ε_0 zu.
- Je ungenauer die Parametergl. (2) erfüllt ist, je stärker also n von einer ganzen Zahl abweicht, desto später setzt die seitliche Pendelbewegung ein und desto schwächer ist sie.

Ein aufschaukelndes Federpendel lässt sich leicht herstellen, indem man eine Feder nicht an die Decke, sondern an einen Faden hängt, der an der Decke befestigt wird. Dadurch lässt sich die erforderliche Gesamtlänge l von Faden und Feder leicht einstellen. Die Länge l von der Decke bis zur Ruhelage der eingehängten Masse ergibt sich für $n = 1$ aus Gl. (2) zu

$$\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{\pi}{T_e} \quad \text{mit } T_e = \text{Periode des vertikal schwingenden Oszillators.}$$

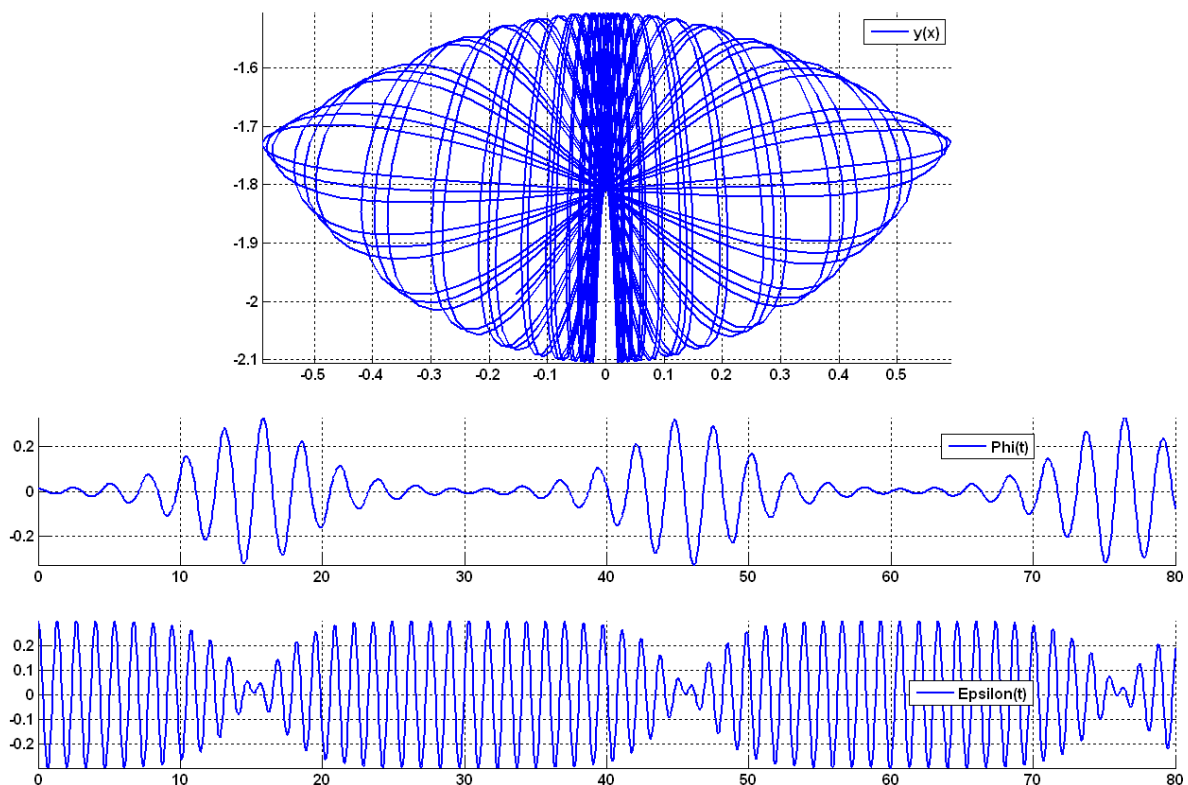


Abb. 3 Die Kurven zeigen die seitliche Aufschaukelung eines anfangs nahezu vertikal schwingenden Federpendels. Die nahezu vertikalen Hubschwingungen und seitlichen Pendelschwingungen wechseln sich ständig ab. Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 0,01 \text{ Rad} \approx 0,57^\circ & \varepsilon_0 &= 0,3 \text{ m} & \dot{\varphi}_0 &= \dot{\varepsilon}_0 = 0 \\ m &= 2,3 \text{ kg} & D &= 50 \text{ N/m} & l_{\text{Ruhelage}} &= 1,805 \text{ m} \Rightarrow \sqrt{g/l_{\text{Ruhelage}}} \approx 0,5 \sqrt{D/m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow l = \frac{g}{\pi^2} T_\varepsilon^2 \approx 0,994 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot T_\varepsilon^2$$

Wir wollen noch kurz *andeuten*, wie sich das Aufschaukeln der pendelartigen Schwingungen mathematisch beweisen lässt. Dazu betrachten wir die partikuläre Lösung

$$\varphi(t) = 0 \quad \varepsilon(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t + \alpha\right) \quad (3a/b)$$

und untersuchen die *Nachbarbewegungen*

$$\varphi(t) = 0 + \tilde{\varphi}(t) \quad (4a)$$

$$\varepsilon(t) = A \cos(\omega_\varepsilon t) + \tilde{\varepsilon}(t) \quad \omega_\varepsilon = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (4b)$$

mit $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\varepsilon}(t)$ = *kleine* Abweichungen von der partikulären Lösung (3a) und (3b). (α aus Gl. (3b) wurde der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null gesetzt.) Die Gln. (4a) und (4b) werden in die Dgln. (1a) und (1b) eingesetzt, wobei *nur lineare Terme* in den kleinen Abweichungen berücksichtigt werden. Dann finden wir näherungsweise

$$\left[l + A \cos(\omega_\varepsilon t) \right] \ddot{\tilde{\varphi}} - 2 A \omega_\varepsilon \sin(\omega_\varepsilon t) \dot{\tilde{\varphi}} + g \tilde{\varphi} = 0 \quad (5a)$$

$$m \ddot{\tilde{\varepsilon}} + D \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (5b)$$

Obwohl diese Dgln. für die kleinen Abweichungen $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varepsilon}$ nicht gekoppelt sind, wird $\tilde{\varphi}(t)$ durch die partikuläre Lösung $\varepsilon(t) = A \cos(\omega_\varepsilon t)$ beeinflusst: Die lineare Dgl. (5a) enthält *zeitabhängige Koeffizienten* mit der Frequenz $\omega_\varepsilon = \sqrt{D/m}$ der Grundschiwingung (3b).

In K. Magnus: Schwingungen, Teubner-Verlag, Abschn. 6.1 wird beschrieben, wie die Dgl. (5a) mit einer Transformation in die Mathieusche Dgl.

$$\ddot{y} + P(t) y = 0$$

überführt werden kann mit einem harmonisch-zeitabhängigen Koeffizienten $P(t)$. In der Theorie der Mathieuschen Dgl. wird gezeigt, dass bei bestimmten Verhältnissen von der Eigenfrequenz $\omega_\varphi = \sqrt{g/l}$ des Schwingers zu der Frequenz $\omega_\varepsilon = \sqrt{D/m}$ des zeitabhängigen Koeffizienten $P(t)$ instabiles Verhalten auftreten kann. In unserem Fall ergibt sich die Gl. (2):

$$\omega_\varphi = \frac{n}{2} \omega_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (2)$$

Animation

Eine schnelle MatLab-Animation ist nur möglich, wenn Längenänderungen der Feder mit dem Skalierungsbefehl „scale“ von MatLab durchgeführt werden. Dabei ändert sich leider auch die Dicke der Windungen in Skalierungsrichtung.

Bei den hochwertigen mit POV-Ray erstellten Filmen wird die Feder conusförmig gezeichnet, so dass sich die Federwindungen beim starken Zusammendrücken der Feder aneinander vorbeischieben können. Zusätzlich wird eine Art Kondensstreifen gezeichnet, der von einem schwachen Wind langsam weggeblasen wird und sich dabei verflüchtigt.

Bei den numerisch berechneten Lösungen bewegt sich die Masse oft sehr nahe an der Federaufhängung vorbei. Die Animationen sind nicht realistisch, wenn die Masse in einer Entfernung am Aufhängepunkt vorbeiläuft, die kleiner ist als der Radius der Masse. Da die Masse bei der Animation aber nicht zu klein gezeichnet werden kann, ist dieser Konflikt bei der Animation nicht sinnvoll lösbar.

Man könnte aber ein zusätzliches Potential einführen, das in der Umgebung der Federaufhängung stark ansteigt und daher die Masse weit genug von der Aufhängung fern hält. Dann hätten die Dgln. aber eine Form, die nicht mit den üblicherweise in der Literatur untersuchten Dgln. übereinstimmt.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage. In Aufgabe 5–12 wird das System mit ruhender Aufhängung ($A_y = 0$) untersucht.
- R. Mahnke: *Nichtlineare Physik in Aufgaben*, Teubner Verlag