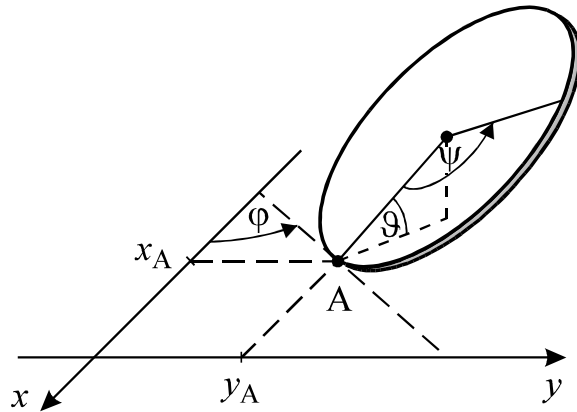


# Rollende Münze – Mit Schlupf, weicher Boden



**Abb. 1** Eine **dünne** Scheibe rollt ohne Schlupf oder rutscht mit Schlupf auf einem weichen Boden oder springt in die Luft. Die Koordinaten  $x_A, y_A$  des Auflagepunktes A, die Schwerpunktkoordinate  $z_S$  und die drei **Eulerwinkel**  $\varphi, \vartheta, \psi$  beschreiben Lage und Orientierung der Scheibe.

Eine Münze oder eine **dünne** Kreisscheibe mit Radius  $r$  **rollt oder rutscht** auf einem **weichen Boden** oder **springt in die Luft**. Drei Bewegungsphasen sind also möglich:

- Bewegungsphase = **1** : Die Münze rollt ohne Schlupf über den Boden.
- Bewegungsphase = **2** : Die Münze rutscht mit Schlupf über den Boden.
- Bewegungsphase = **3** : Die Münze fliegt durch die Luft und hat keinen Bodenkontakt.

Bei den meisten berechneten Bewegungen wechselt die Münze öfters zwischen zwei oder gar drei Bewegungsphasen hin und her.

## Mathematisches Modell

Als generalisierte Koordinaten werden die Koordinaten  $x_A, y_A$  des Auflagepunktes A, die Schwerpunktkoordinate  $z_S$  und die drei Eulerwinkel  $\varphi, \vartheta, \psi$  verwendet.  $\dot{x}_A, \dot{y}_A$  sind die inertialen Geschwindigkeiten des Auflagepunktes A.

Die Luftreibung wird stark vereinfachend **laminar** angesetzt, so dass die Reibungsmomente proportional zur Winkelgeschwindigkeit sind. Allerdings werden Reibungsmomente parallel zur Symmetrieachse der *glatten* Münzen vernachlässigt.

Der Einfachheit halber werden die Reibungskräfte der Luft, die die Schwerpunktbewegung hemmen, vernachlässigt.

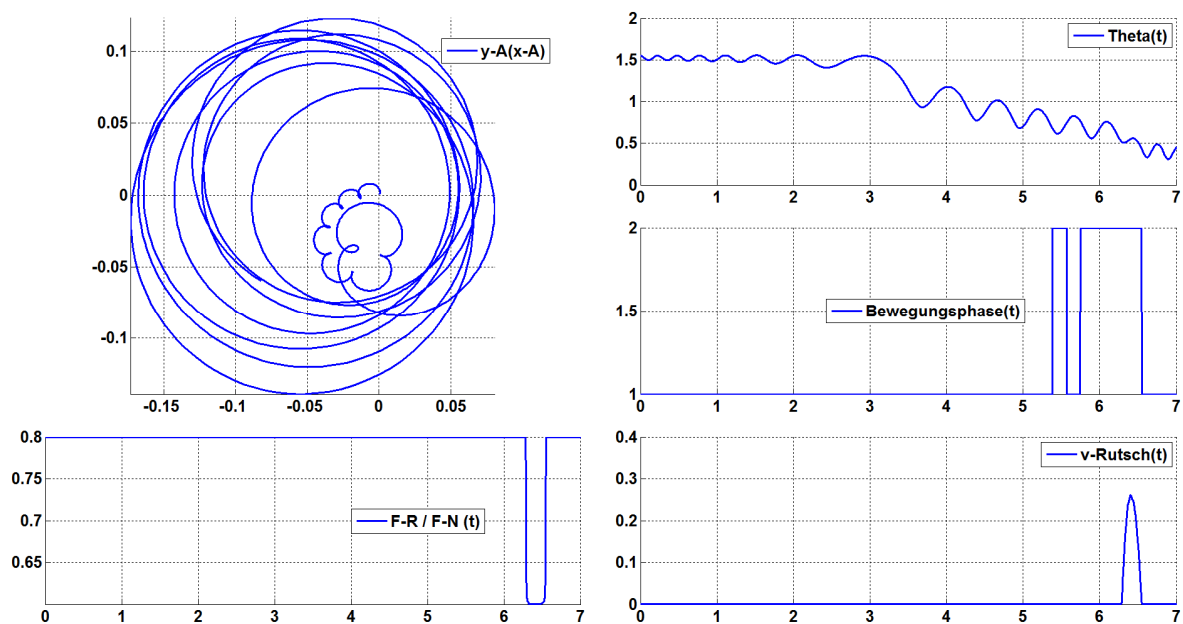
Die Reibung am Boden mit häufigem Wechsel zwischen reinem Rollen und Rutschen wird mit einem **kombinierten Reibungsansatz** beschrieben, *der reines Rollen durch Rutschen mit extrem kleinen Rutschgeschwindigkeiten ersetzt*. Daher werden insgesamt nur die 6 Dgln. fürs Rutschen benötigt; eigene Dgln. für „Gleiten ohne Schlupf“ sind nicht erforderlich.

Die Bodenaufschläge nach den Luftsprüngen sind elastisch ohne Energieverlust.

## Numerische Lösungsverfahren

Das **steife Lösungsverfahren ode15s** ist empfehlenswert, vor allem bei hohen Luftsprüngen und heftigen Bodenaufschlägen.

Bei vierstelligen oder gar noch größeren Federkonstanten des elastischen Bodens werden die



**Abb. 2** Die Kurven zeigen, wie eine Münze, die anfangs hochkant stehend um die Hochachse rotiert, wegen der mechanischen Energieverluste langsam umfällt.

Die rechts in der Mitte dargestellte *diskrete Bewegungsphase* kann nur folgende drei Werte einnehmen:

Bewegungsphase = **1** : Die Münze rollt ohne Schlupf über den Boden (genauer  $v_K < 0,3 \text{ mm/s}$ ).

Bewegungsphase = **2** : Die Münze rutscht mit Schlupf über den Boden (genauer  $v_K \geq 0,3 \text{ mm/s}$ ).

Bewegungsphase = **3** : Die Münze fliegt durch die Luft und hat keinen Bodenkontakt.

Dabei ist  $v_K$  die Geschwindigkeit des körperfesten Punktes, der momentan den Boden berührt. Mit anderen Worten:  $v_K$  ist die Rutschgeschwindigkeit.

Beim hier dargestellten Umkippen einer Münze tritt kein Luftsprung auf.

Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\dot{\vartheta}(0) = 30 \frac{\text{Rad}}{\text{s}} \quad \vartheta(0) = 1,55 \text{ Rad} \quad z_S(0) = 0,09 \text{ m}$$

Die restlichen 9 Anfangsbedingungen sind Null.

$$m = 1 \text{ kg} \quad r = 0,1 \text{ m} \quad f = 0,6 \quad f_0 = 0,8 \quad D_{\text{Boden}} = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$c_{\text{Luft}} = 10^{-3} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

$f$  und  $f_0$  sind die Gleit- und Haftreibungszahl.

numerischen Berechnungen kurzer und harter Boden-Aufschläge – nach höheren Luftsprüngen – schwierig. Bei den numerischen Berechnungen läuft der Fortschrittsbalken *ruckartig*, weil er bei heftigen Bodenaufschlägen infolge kleiner interner Schrittweiten pro Zeitschritt wesentlich länger rechnen muss als bei sanftem Rutschen auf dem Boden. Starke Bodenaufschläge können evtl. so schlecht berechnet werden, dass selbst bei sehr kleinen, aber verschiedenen Fehlertoleranzen verschiedene Kurven herauskommen. Unter sehr ungünstigen Umständen kann die berechnete Energie kurzfristig sogar wieder steigen.

### Differentialgl.n. (abgekürzt Dgln.)

Die Strömungen der Luft am Münzenrand, das Entweichen der Luft unter der umkippenden, zu Boden fallenden Münze, die Abhängigkeit der Luftreibung von der Orientierung der Münze usw. können nicht realistisch eingeschätzt werden. Daher kann die Luftreibung nur durch einen ganz groben Ansatz beschrieben werden.

Die Luftreibung soll **laminar** sein, wobei Reibungsmomente bei Drehungen um die Symmetrieachse der *glatten* Münze vernachlässigt werden. Die Komponente der Winkelgeschwindigkeit, die parallel zur Symmetrieachse der Münze ist, wird also vernachlässigt. Daher wird das Moment der Luftreibung im körperfesten Koordinatensystem wie folgt angesetzt:

$$\mathbf{N}_{\text{Luft}} = -c_{\text{Luft}} \vec{\omega} = -c_{\text{Luft}} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \dot{\phi} + \cos \psi \dot{\vartheta} \\ \sin \vartheta \cos \psi \dot{\phi} - \sin \psi \dot{\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Der Einfachheit halber werden die Reibungskräfte der Luft, die die Schwerpunktbewegung hemmen, vernachlässigt.

Beim Rutschen auf dem Boden tritt zusätzlich noch die Gleitreibungskraft

$$\mathbf{F}_R = -f N \frac{\mathbf{v}_K}{v_K} \quad \text{mit } f = \text{Gleitreibungszahl}$$

auf. Dabei ist  $\mathbf{v}_K$  die horizontale Geschwindigkeit, mit der der tiefste körperfeste Punkt über den Boden rutscht:

$$\mathbf{v}_K = \begin{pmatrix} v_{K,x} \\ v_{K,y} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_S + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{SA})_{\text{horizontal}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_A + r \dot{\psi} \cos \varphi \\ \dot{y}_A + r \dot{\psi} \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

Die Dgln. für Rutschen mit Schlupf auf dem weichen Boden lauten:

$$\ddot{\phi} = \frac{2 \dot{\vartheta} \dot{\psi}}{\sin \vartheta} - \frac{4}{m r^2} c \dot{\phi} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} = & -\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 2 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \vartheta + \\ & \frac{4 f D (r \sin \vartheta - z_S)}{m r \sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} (\dot{x}_A \sin \varphi - \dot{y}_A \cos \varphi) \sin \vartheta - \\ & \frac{4 D (r \sin \vartheta - z_S)}{m r} \cos \vartheta - \frac{4}{m r^2} c \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\ddot{\psi} = -\ddot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \frac{2 f D (r \sin \vartheta - z_S)}{m r \sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} (r \dot{\psi} + \dot{x}_A \cos \varphi + \dot{y}_A \sin \varphi) \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A = & r \left[ \ddot{\phi} \cos \varphi \cos \vartheta - \ddot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta - (\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \sin \varphi \cos \vartheta - 2 \dot{\phi} \dot{\vartheta} \cos \varphi \sin \vartheta \right] - \\ & \frac{f D (r \sin \vartheta - z_S)}{m \sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} (\dot{x}_A + r \dot{\psi} \cos \varphi) \end{aligned} \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_A = & r \left[ \ddot{\phi} \sin \varphi \cos \vartheta + \ddot{\vartheta} \cos \varphi \sin \vartheta + (\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2) \cos \varphi \cos \vartheta - 2 \dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta \right] - \\ & \frac{f D (r \sin \vartheta - z_S)}{m \sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} (\dot{y}_A + r \dot{\psi} \sin \varphi) \end{aligned} \quad (5e)$$

$$\ddot{z}_S = -g - \frac{D}{m} (z_S - r \sin \vartheta) \quad (5f)$$

Dies sind sechs Dgln. 2. Ordnung.

Für den **Flug in der Luft** gelten die Dgln. (5a) bis (5f) mit  $D = 0$ .

Wegen  $1/\sin \vartheta$  in Dgl. (5a) laufen die Dgln. für  $\vartheta \rightarrow 0$  in eine Singularität hinein oder über eine Singularität hinweg, die die numerischen Lösungsverfahren von MatLab zum Absturz bringen kann.

Bei vielen Bewegungen treten neben den Rutschbewegungen (mit  $\mathbf{v}_K \neq \mathbf{0}$ ) auch reine Rollbewegungen (mit  $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$ ) auf – zumindest zeitweise. Der Wechsel zwischen Rutschen und

Rollen bereitet ein Problem bei der Aufstellung und Lösung der Dgln. Die Gründe dafür sind die bekannten und nur *näherungsweise richtigen* Gln.

$$R_{\text{Haft}}^{\max} = f_0 N \quad \text{und} \quad R_{\text{Rutsch}} = f N \quad \text{mit} \quad f < f_0 \quad (6)$$

Sie liefern bei den Übergängen „Haften  $\leftrightarrow$  Rutschen“ *Unstetigkeiten* in der Reibungskraft. Außerdem sind die Dgln. beim Rollen anders als beim Rutschen.

Folgende zwei Lösungsmöglichkeiten liefern meistens *ähnliche Bewegungen*:

1-te Möglichkeit: Wir nehmen an, dass die Münze zur Zeit  $t = 0$  mit Schlupf startet:

- Das Lösungsverfahren muss solange die Dgln. (5) verwenden, bis der Betrag  $v_K$  der Rutschgeschwindigkeit unter einen sehr kleinen Wert (z. B.  $10^{-6}$  m/s) gefallen ist.
- Dann wird die (sehr kleine) Rutschgeschwindigkeit gleich Null gesetzt und das Lösungsverfahren arbeitet solange mit den Dgln. für reines Rollen, bis die Haftkraft den maximal möglichen Wert  $f_0 N$  überschreitet.
- Sodann wird dem tiefsten Punkt der Münze eine Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung der letzten Haftkraft gegeben mit einem kleinen Betrag (z. B.  $10^{-5}$  m/s). Das Verfahren rechnet jetzt wieder mit den Dgln. (5) weiter usw.

Diese erste Möglichkeit ist aufwendig und natürlich nicht ganz exakt.

2-te Möglichkeit: Im Maschinenbau werden oft **kombinierte Reibungsansätze** verwendet, die einen *stetigen Übergang* zwischen Rollen und Rutschen beschreiben. Denkbar ist z. B. der Ansatz

$$\mathbf{R} = - \left( f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left( \frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) D s_{\text{Boden}} \frac{\mathbf{v}_K}{\sqrt{10^{-8} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + v_K^2}} \quad (7)$$

Die runde Klammer liefert einen stetigen Übergang zwischen einem Maximum, das der Haftreibungszahl  $f_0$  nahe kommt, und der Gleitreibungszahl  $f$ . Der Bruch am Ende verhindert Divisionen durch Null und sorgt für einen stetigen Übergang der Reibungskraft beim Vorzeichenwechsel des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}_K$ . In Abb. 3 wird  $R$  in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsbetrag  $v_K$  dargestellt. Beachte, dass sich die Reibungskraft  $R$  bei sehr kleinen Rutschgeschwindigkeiten  $v_K$  bei kleinsten Verschiebungen von  $v_K$  extrem stark ändert. Diese hohe Empfindlichkeit des kombinierten Reibungsansatzes erschwert numerische Berechnungen der Dgln. erheblich.

Der Ansatz in Gl. (7) ersetzt die reine Rollbewegung mit  $v_K = 0$  durch eine Gleitbewegung mit sehr kleiner Rutschgeschwindigkeit  $v_K < 0,4$  mm/s.

Die Bewegung der auf weichem Boden rutschenden und rollenden Münze kann vollständig mit den Dgln. (5) berechnet werden, wenn man in diesen Dgln. den Term

$$\frac{f}{\sqrt{v_{K,x}^2 + v_{K,y}^2}} = \frac{f}{v_K}$$

durch den Term

$$\left( f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left( \frac{s}{m} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) \frac{1}{\sqrt{10^{-8} \left( \frac{m}{s} \right)^2 + v_K^2}}$$

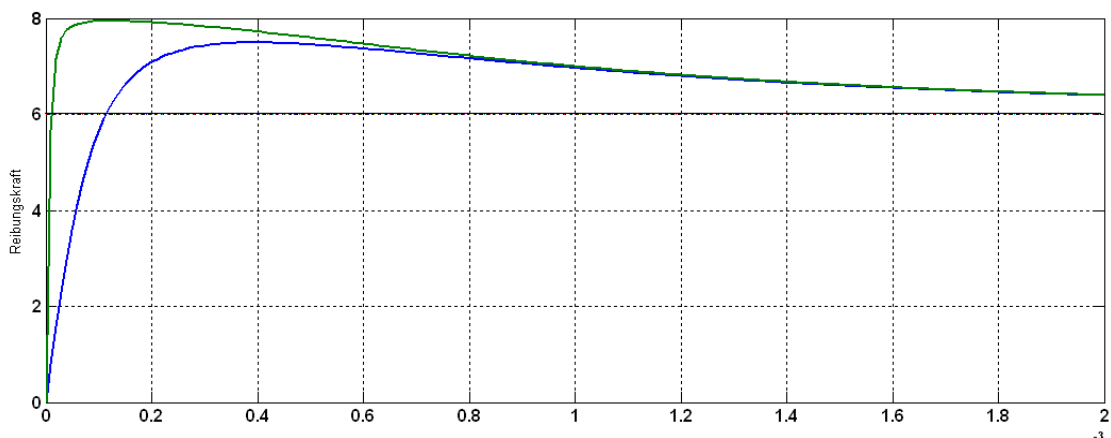
ersetzt. Das Programm MECHANICUS arbeitet mit dieser einfacheren Möglichkeit.

Hinweis: Die Zusatzfunktion „Reibungskraft / Normalkraft“ wird bei der numerischen Lösung der Dgln. gleich Null gesetzt, wenn die Normalkraft  $D s_{\text{Boden}}$  Null ist.

## Animation

Die Bewegungsgln. (5a) bis (5f) gelten für eine *unendlich dünne* Münze. Bei der Animation hingegen wird eine Münze mit einer endlichen Dicke gezeichnet. Folglich bewegt sich bei der Animation eine kleine Ecke der Münze *unter* dem Boden.

Die bei der MatLab-Animation auf den Boden gezeichnete Kurve ist die vertikale Projektion



**Abb. 3** Die Kurven zeigen den kombinierten Haftreibungs-Gleitreibungs-Ansatz

$$R = \left( f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left( \frac{s}{m} \right)^2 \cdot v_K^2} \right) N \frac{v_K}{\sqrt{v_{gr}^2 + v_K^2}}$$

für Beträge der Rutschgeschwindigkeit im Intervall  $0 \leq v_K \leq 2 \text{ mm/s}$ . Folgende Parameter wurden gewählt:

$$f = 0.6 \quad f_0 = 0.8 \quad \text{Normalkraft } N = 10 \text{ N}$$

$$v_{gr} = 10^{-4} \frac{m}{s} \quad (\text{blaue Kurve}) \quad \text{bzw.} \quad v_{gr} = 10^{-5} \frac{m}{s} \quad (\text{grüne Kurve})$$

des tiefsten Punktes der Münze auf den Boden. Bei Bodenkontakt ist die Kurve folglich die Spur der Münze auf dem Boden.

## Literatur

Literatur ist nicht bekannt. Eine auf *festem* Boden *ohne* Schlupf rollende Münze wird untersucht in: F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12-18.