

bStehaufkreisel mit Stift. Weicher Boden



Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Der Stehaufkreisel hat sich fast vollständig auf dem Stift aufgerichtet. Die Spur des Stiftes bzw. der Hauptkugel auf dem Boden wird gelb bzw. schwarz markiert.

Der Stehaufkreisel besteht aus einer hohlen, abgeschnittenen Kugel mit einem aufgesetzten Stift. *Ohne* Drehung oder mit nur geringer Drehzahl ist die Lage ANF in Abb. 2 stabil; der Kreisel wackelt wie ein Stehaufmännchen hin und her, da der in Abb. 2 schwarz markierte Schwerpunkt unterhalb des Kugelmittelpunktes M liegt.

Hält man aber den Stift des Kreisels zwischen Daumen und Zeigefinger und versetzt den Kreisel in eine schnelle Rotation $\dot{\psi}(0)$ um die Symmetrieachse, so ist die Position ANF instabil; der Kreisel neigt sich immer stärker zur Seite, der

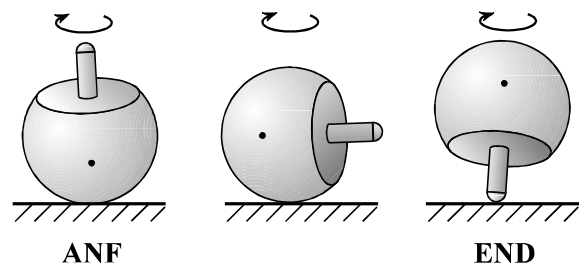


Abb. 2 Bei der Aufrichtung geht der durch einen schwarzen Punkt markierte Schwerpunkt in die höchste Lage. Die Richtungen des Drehimpulses \mathbf{L} und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ändern sich bei der Aufrichtung nur wenig.

Neigungswinkel ϑ wird laufend größer und der Kreisel richtet sich auf dem Stift auf. Der Schwerpunkt S hat die höchste Lage erreicht. Die stabile Rotation in der Lage END dauert so lange an, bis die Reibung die Winkelgeschwindigkeit unter einen kritischen Wert gedrückt hat. Dann taumelt der Kreisel und geht langsam in die Ausgangslage ANF zurück.

Mathematisches Modell

Entscheidend für die Aufrichtung ist die Reibungskraft auf dem Boden. Ohne Reibung am Boden kann sich der Kreisel nicht aufrichten.

Im mathematischen Modell rutscht der Kreisel bei der Aufrichtung **mit Schlupf** über einen **elastischen, weichen Boden** und kann sogar kurzfristig **in die Luft springen**.

Aufgrund der hohen Rotationsgeschwindigkeit um die inertielle z_I -Achse ist die Reibungskraft \mathbf{R} am Boden näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit \mathbf{v}_K , mit der der tiefste Punkt des Kreisels über den Boden rutscht (siehe F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9. Auflage, Aufgabe 12–19 f):

$$\mathbf{R} = -k N \mathbf{v}_K = -k m (g + \ddot{z}_S) \mathbf{v}_K \quad (1)$$

mit N = Normalkraft und k = Reibungskoeffizient [s/m].

Am Ende der Aufrichtung ist die Geschwindigkeit \mathbf{v}_K , mit der der tiefste Kreiselkontakt über den Boden rutscht, null: $\mathbf{v}_K = \mathbf{0}$. Da MECHANICUS neben dieser geschwindigkeitsproportionalen „Contensou-Reibung“ keine weitere Reibungskraft enthält, ist der mechanische Energieverlust im Modell am Ende der Aufrichtung null, so dass die Aufrichtung erhalten bleibt und sich der Kreisel – im Gegensatz zum Experiment mit seinen ständigen Reibungsverlusten – nicht mehr zu Boden neigt.

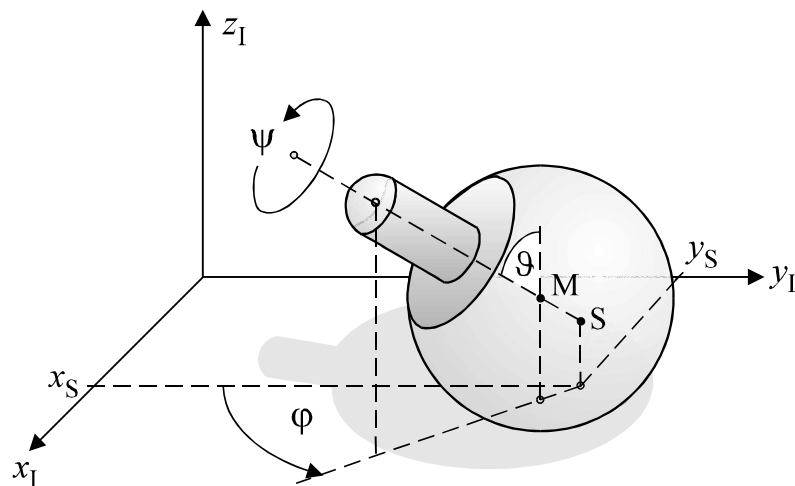


Abb. 3 Die Bewegung des Stehaufkreisels wird durch die drei Eulerschen Winkel

- Präzessionswinkel φ
- Neigungs- oder Nutationswinkel ϑ und
- Eigenrotationswinkel ψ

sowie durch die kartesischen Koordinaten x_S, y_S, z_S des Schwerpunktes S beschrieben.

Bei der Eingabe der Parameter (vor der numerischen Berechnung) muss folgendes beachtet werden:

- 1) Radius r der Hauptkugel $>$ Radius r' der Stift-Halbkugel
- 2) Abstand $a' >$ Abstand a (siehe Abb. 4)
- 3) Die Bedingungen 1) und 2) können nur *zugleich* übergangen werden durch

$$r = r' \quad \text{und} \quad a = a'$$

In diesem Fall liegt für $a > 0$ eine **inhomogene Kugel** ohne Stift vor.

Es ist nicht ganz einfach, Anfangsbedingungen und Parameter so zu finden, dass sich der Kreisel aufrichtet.

Numerische Lösungsverfahren

Die Verfahren ode45 und ode113 sind empfehlenswert. Bei harten Bodenaufschlägen ist evtl. das steife Verfahren ode15s vorzuziehen.

Bei vierstelligen oder gar noch größeren Federkonstanten des elastischen Bodens werden die numerischen Berechnungen kurzer und harter Boden-Aufschläge – nach höheren Luftsprüngen – schwierig. Bei den numerischen Berechnungen läuft der Fortschrittsbalken *ruckartig*, weil der PC bei heftigen Bodenaufschlägen pro Zeitschritt wesentlich länger rechnen muss als bei sanftem Rutschen auf dem Boden oder während der Luftsprünge.

Starke Bodenaufschläge können evtl. so schlecht berechnet werden, dass selbst bei sehr kleinen, aber verschiedenen Fehlertoleranzen verschiedene Kurven herauskommen und dass unter ungünstigen Umständen die berechnete Energie bei einem Bodenaufschlag wieder steigt – im Widerspruch zum Energieerhaltungssatz. Die nicht-steifen Verfahren ode45 und ode113 können evtl. auch abstürzen. Das steife Verfahren ode15s rechnet hier schneller und zuverlässiger mit geringerer Absturzwahrscheinlichkeit; allerdings sind auch hier Fehler bei harten Bodenaufschlägen zu erwarten.

Luftsprünge

Bei vielen numerisch berechneten Aufrichtungen treten zum Erstaunen der Beobachter zahlreiche **Luftsprünge** auf, bei denen der Kreisel jeweils kurz vom weichen Boden abhebt. Oft ist der Kreisel am Beginn der Aufrichtungen länger in der Luft als auf dem Boden.

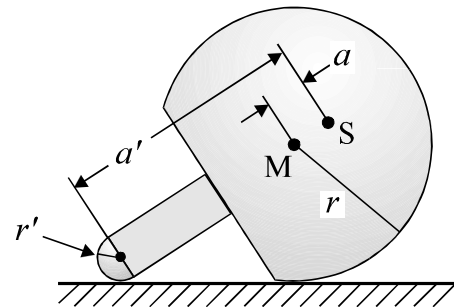


Abb. 4 Kurz vor Ende der Aufrichtung tritt eine kurzer Doppelkontakt auf: Kugel und Stift berühren den Boden gleichzeitig.

Bei numerischen Berechnungen müssen u. a. die Längen a' und a eingegeben werden.

Die Luftsprünge sind auf die Nutationen des Kreisels zurückzuführen. Bei den Nutationen, d. h. bei den Schwingungen des Neigungswinkels ϑ wird der Schwerpunkt des Stehaufkreisels abwechselnd nach oben und unten beschleunigt. Dabei kann die vertikale Beschleunigung \ddot{z}_S des Schwerpunktes auf $-g = -9,81 \text{ m/s}^2$ fallen, so dass die Normalkraft des Bodens auf den Kreisel Null wird und der Kreisel vom Boden abheben kann.

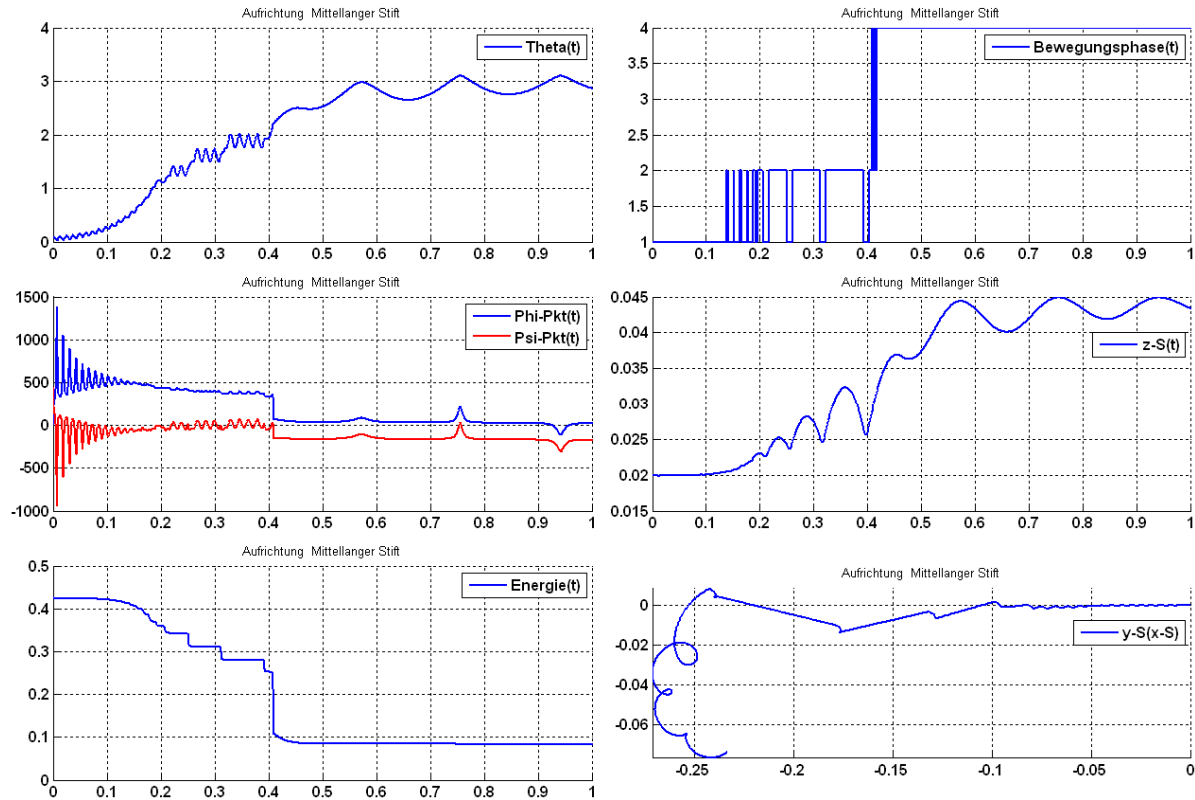


Abb. 5 Die Kurven zeigen eine schnelle Aufrichtung. Folgende Zeitverläufe werden dargestellt:

- Neigungswinkel $\vartheta(t)$. Wegen $\vartheta \rightarrow \pi$ richtet sich der Kreisel in knapp einer Sekunde auf.
- Diskrete **Bewegungsphase**. Sie kann nur die vier folgenden diskreten Werte einnehmen:
 - 1 : Nur die große Hauptkugel hat Bodenkontakt.
 - 2 : Der Stehaufkreisel fliegt in der Luft.
 - 3 : Große Hauptkugel und kleine Halbkugel berühren *gleichzeitig* den Boden. Diese Phase dauert nur wenige Millisekunden und ist bei der vorliegenden Auflösung nicht erkennbar (siehe Abb. 4).
 - 4 : Der Kreisel steht auf dem Stift.
- Höhe $z_S(t)$ des Schwerpunktes.
- Die Energie $E(t)$.
- Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)$.
- Schwerpunktbewegung $y_S(x_S)$. Der Beobachter sieht senkrecht auf den Kreisel herab.

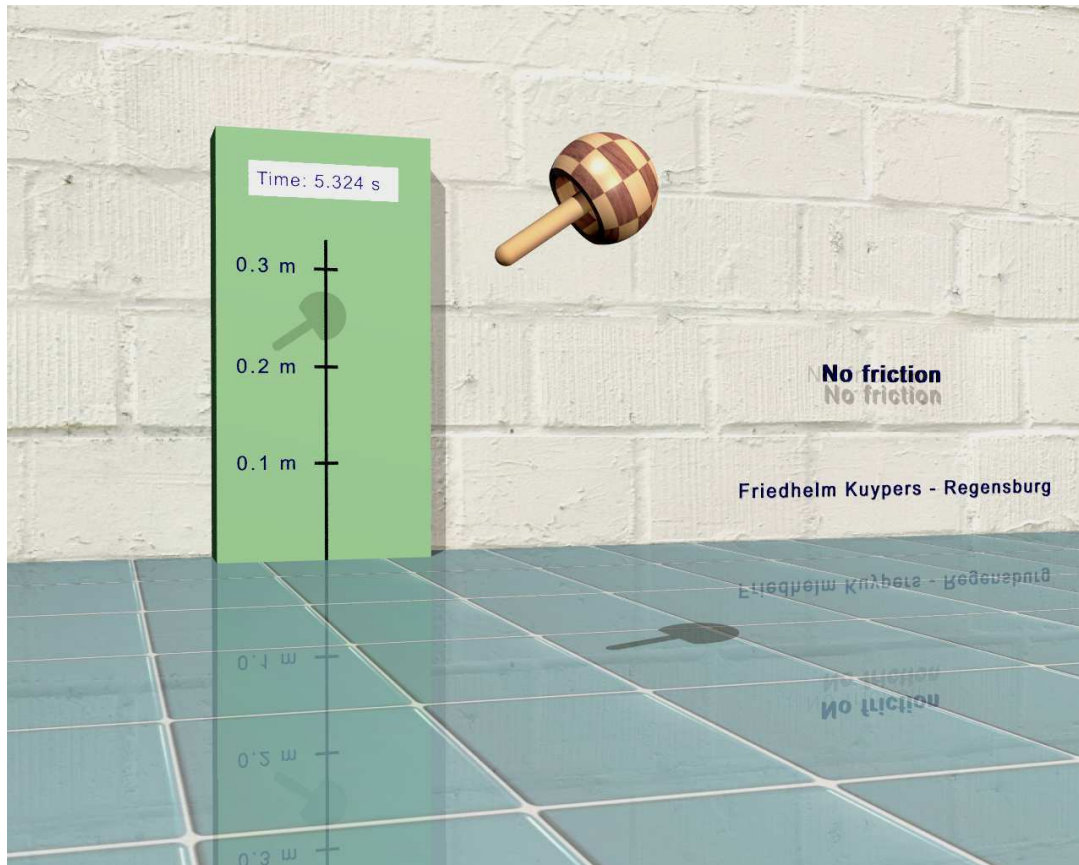


Abb. 6 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation. Der Stehaufkreisel wird ohne anfängliche kinetischer Energie in 30 cm Höhe losgelassen und springt anschließend auf einem elastischen, völlig **glatten** Boden ohne Energieverlust auf und ab. Dabei ändert sich von den drei Eulerwinkeln nur der Neigungswinkel $\vartheta(t)$. Die beiden anderen Winkel sind konstant: $\varphi(t) = \text{const}$ $\psi(t) = \text{const}$.

Da keine horizontalen Kräfte wirken, bewegt sich der Schwerpunkt auf einer vertikalen Geraden (siehe den Schatten auf der grünen Skala).

Auch in **Experimenten** kann man Luftsprünge mit einigen Millimetern Höhe beobachten. Wiederholte, harte Bodenaufschläge können akustisch an einem Rattern erkannt werden.¹

Ein ähnliches Phänomen kann der sportliche Leser leicht an sich selber beobachten, wenn er sich gerade hinstellt und dann durch rhythmisches Wippen mit Füßen und Beinen den Körperschwerpunkt regelmäßig nach oben und unten beschleunigt. Wenn die Beine dabei schnell genug angezogen („verkürzt“) werden, so verlieren die Füße den Bodenkontakt und haben kurzfristig vom Boden ab.

¹ Nutationen sind ein typisches Kreisel-Phänomen. Physiker und Maschinenbauer lernen die Nutationen zumeist bei der Bewegung des schweren Kreisels kennen. Unter Nutationen versteht man die schnellen Schwankungen des Neigungswinkels ϑ , die langsameren Bewegungen von ϑ oder konstanten Werten von ϑ überlagert sind.

Die Kurve $\vartheta(t)$ links oben in Abb. 5 zeigt die Nutationen recht deutlich.

Differentialgln.

In Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12-19 werden die Dgln. aufgestellt sowie Reibung, Bewegungen und Stabilitäten untersucht.

Für die numerische Lösung müssen die Dgln. in explizite Form umgerechnet, also nach den sechs zweiten Ableitungen aufgelöst werden. Die Dgln. für $\dot{\phi}$ und $\ddot{\psi}$ enthalten Terme mit $\sin \vartheta$ im Nenner, so dass für $\sin \vartheta = 0$ eine **Singularität** vorliegt.

Diese Singularität ist der entscheidende Nachteil der Eulerwinkel. Auch andere Winkel wie z. B. die Kardanwinkel enthalten Singularitäten, allerdings bei anderen Orientierungen. Singularitäten können durch die Verwendung von Dreh-Quaternionen vermieden werden.

Animation

Die graue, bei der MatLab-Animation auf den Boden gezeichnete Kurve ist die vertikale Projektion des Kugelmittelpunktes auf den Boden. Bei Bodenkontakt der Hauptkugel ist diese Kurve zugleich die Spur der Hauptkugel am Boden.

Die Animationen und Filme laufen in der Regel mit einer *extremen Zeitlupe* ab. Typischerweise dauert eine Animation ungefähr hundertmal länger als das reale Experiment. Nur mit extremer Zeitlupe können die schnellen Eigenrotationen $\dot{\psi}$ um die Symmetrieachse erkannt werden.

Literatur

- F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Aufgabe 12–19.
- K. Magnus, *Kreisel – Theorie und Anwendungen*, Springer Verlag 1971. Magnus untersucht die Stabilität von vertikal rotierenden Kreisel mit der ersten Methode von Ljapunow. Seine Ergebnisse sind daher auf den Anfang und das Ende einer möglichen Aufrichtung beschränkt.