

# Hilfe zu dem Menü „Dgln. numerisch lösen“

## Dgln. numerisch lösen

**Abb. 1** Anfangsbedingungen (links oben), Parameter (links unten), 4 Integrationsparameter (rechts unten) und der Name der Datei, die die numerisch berechnete Lösung aufnimmt, werden eingetippt. Beim Aufruf werden die Werte der *aktuellen* Datei, also derjenigen Datei, mit der Sie zuletzt gearbeitet haben, als Default-Werte automatisch in die Eingabefelder gesetzt. Sie können mit der Enter-Taste übernommen oder geändert werden.

Für das System „Kettenschwinger“ sieht die Eingabemaske völlig anders aus. Siehe dazu Abb. 2.

Vor der numerischen Berechnung der Dgln. werden links oben in der Groupbox „Anfangsbedingungen“ die Anfangsbedingungen, in der Groupbox „Parameter“ die physikalischen Parameter des Systems und in der Groupbox „Integrationsparameter“ die 4 numerischen Parameter des Lösungsverfahrens eingegeben. Abschließend muss der Anwender noch den Name der Datei eintippen, die die numerisch berechneten Daten aufnimmt. Die elf Zeichen / \ : \* ? „ < > | # \_ sind nicht zulässig.

**Winkel und Winkelgeschwindigkeiten sind im Bogenmaß** einzugeben. Reelle Zahlen müssen **Dezimalpunkte** enthalten – nicht Dezimalkommas. Die Parameter haben die **Einheiten kg, m, s**. Anstelle von Zahlenwerten dürfen **mathematische Gln.**, die MatLab lesen kann, verwendet werden. Z. B.: „sqrt(2)“ für 1.4142... oder „sin(pi/3)“ für 0.8660....

Nach dem Anklicken des Buttons Berechnen werden die eingetippten Zahlen auf Fehler überprüft; bei Fehlern gibt MECHANICUS eine Fehlermeldung.

Zuletzt wird geprüft, ob der gewählte Dateiname zulässig ist und ob bereits eine Datei mit dem eingetippten Namen existiert. Wenn schon eine Datei mit dem gewählten Namen existiert, dann fragt MECHANICUS, ob diese Datei überschrieben oder ob ein neuer Dateiname eingegeben werden soll. **Nur die Dateinamen „no“ und „noname“ werden nicht auf Überschreiben geprüft.**

Bei allen Eingaben kann man am besten und schnellsten **mit der Enter-Taste von einem Eingabefeld zum nächsten springen**. Die Maus ist nicht erforderlich.

Die vier Integrationsparameter haben folgende Bedeutung:

- **T-Ende** : Die Bewegung eines realen Systems bzw. eines bestehenden Experimentes wird bis zur Zeit T-Ende berechnet.
- **Schrittweite** : Die Daten, d. h. die Variablen  $y_i(t)$ , Zusatzfunktionen und Erhaltungsgrößen werden mit einer konstanten Ausgabeschrittweite  $\Delta t$  berechnet. Die zeitliche Schrittweite  $\Delta t$  der Lösungen muss konstant sein, damit Animationen mit konstanter Geschwindigkeit ablaufen.
- **RelTol und AbsTol** : Bei jedem Rechenschritt wird der tolerierte, lokale Fehler  $e_i$  jeder Variablenkomponente  $y_i(t)$  wie folgt begrenzt:

$$|e_i| \leq \max(\text{RelTol} \cdot |y_i|, \text{AbsTol})$$

The screenshot shows the MECHANICUS software interface for the 'Kettenschwinger' (Chain Oscillator) system. The top part features a schematic diagram of a chain of oscillators, labeled 'Erster Schwinger' (First Oscillator) and 'N-ter Schwinger' (N-th Oscillator). The diagram shows masses  $m_1, m_2, \dots, m_N$  connected by springs with constants  $D_1, D_2, \dots, D_N$  and dampers with constants  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . The left wall is labeled 'Erster Schwinger' and the right wall is labeled 'N-ter Schwinger'. The displacement of the left wall is given by  $A_{li} \sin(\Omega_{li} t)$ .

Below the diagram, there are input fields for the number of oscillators (Zahl der Bereiche) and the number of regions (Zahl der Bereiche). The number of regions is set to 3. The input fields for the left wall are: Amplitude A-links (0), Omega-links (0), Federkonst. D-links (500), and Dämpferkonst. c-links (0).

The input fields for the oscillators are organized into three sections, each corresponding to a region:

- 1. Bereich der Schwingerkette:**
  - Zahl N1 der Schwinger: 1000
  - Masse m: 0.0001
  - x(0): 0
  - Federkonst. D: 1000
  - x-Pkt(0): 1
  - Dämpferkonst. c: 0
- 2. Bereich der Schwingerkette:**
  - Zahl N2 der Schwinger: 1
  - Masse m: 100
  - x(0): 0
  - Federkonst. D: 0
  - x-Pkt(0): 1
  - Dämpferkonst. c: 0
- 3. Bereich der Schwingerkette:**
  - Zahl N3 der Schwinger: 0
  - Masse m: 0
  - x(0): 0
  - Federkonst. D: 0
  - x-Pkt(0): 0
  - Dämpferkonst. c: 0

On the right side, there are additional input fields for the left wall movement (Bewegung der linken Wand) and integration parameters (Integrationsparameter):

- Bewegung der linken Wand:**
  - Radio buttons: ☒ eine Halbwelle, ☐ ein Sägezahn, ☐ harmonisch
- Integrationsparameter:**
  - T-Ende: 150
  - Schrittweite: 0.05
  - RelTol: 1e-006
  - AbsTol: 1e-008

At the bottom right, there are buttons for 'Berechnen', 'Hauptmenü', 'Animation', 'Alte Grafik', and 'Neue Grafik'. The 'Datei-Vorname' field is set to 'Schweres Sellende'.

**Abb. 2** Bei dem mechanischen System „Kettenschwinger“ sieht die Eingabemaske völlig anders aus als bei den übrigen Systemen. Der Text rechts oben gibt den Grund für die Abweichung an. Beispiele für sinnvolle Eingaben sind zu finden im Menü Eingebettete Systeme → Kettenschwinger erläutern

Folglich wird bei allen Rechenschritten der tolerierte, lokale Fehler  $e_i$  einer jeden berechneten Variablenkomponente  $y_i(t)$  durch die relative Toleranz RelTol bestimmt – so lange der lokale Fehler  $e_i$  die absolute Toleranz AbsTol nicht unterschreitet. Demnach bestimmt AbsTol den Fehler nur für sehr kleine Funktionen bzw. für Funktionen, die gegen Null gehen. MatLab hat für RelTol den Default-Wert 1E-3 und für AbsTol den Defaultwert 1E-6.

Leider gibt es keine einfache und sinnvolle Abschätzung für den umfassenden Fehler, der in einer numerischen Lösung – nach vielen Ausgabeschritten – *insgesamt* gemacht wird.

Die Pushbuttons **Neue Grafik** und **Alte Grafik** sind deaktiviert, solange noch keine numerisch berechneten Dateien existieren. Der Pushbutton **Alte Grafik** ist auch dann deaktiviert, wenn weder eine alte Grafik noch eine gespeicherte Vorzugsgrafik vorliegt.

## Wahl des numerischen Verfahrens

Der Anwender kann durch Anklicken eines Radiobuttons zwischen sieben Verfahren zur numerischen Lösung der Dgln. wählen. Zu jedem Verfahren werden einige Bemerkungen gegeben. Es gibt kein Lösungsverfahren, das für alle Dgln. am besten ist. Leider gibt es auch keine allgemein gültigen Regeln, welche Verfahren für welche Dgln. am besten sind. Hier hilft am ehesten die Erfahrung.

Bei den meisten mechanischen Systemen ist das Verfahren ode45 bei gegebener Genauigkeit

Wahl des Lösungsverfahrens gewöhnlicher expliziter Dgln.

<input checked="" type="radio"/> <b>ode45 : Runge-Kutta 4/5-ter Ordnung</b>	nur für nichtsteife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode23 : Runge-Kutta 2/3-ter Ordnung</b>	nur für nichtsteife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode113: Adams-Bashforth-Moulton</b>	nur für nichtsteife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode15s : NDFs (BDFs)</b>	auch für steife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode23s : Rosenbrock</b>	auch für steife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode23t : Trapezregel</b>	auch für steife Dgln.
<input type="radio"/> <b>ode23tb: Trapezregel-BDF2</b>	auch für steife Dgln.

Mathematischer Hinweis:

Ein System von (mindestens zwei) Dgln. erster Ordnung heißt steif, wenn die Lösungen Anteile mit sehr unterschiedlichem Wachstum enthalten, also z. B. exponentiell schwach und stark abfallende Anteile.

Steife Dgln. können mit den ersten drei Verfahren nicht zuverlässig gelöst werden, treten aber zum Glück nur selten auf. Steif sind z. B. die Dgln. des Van-de-Pol-Oszillators bei dreistelligen Parametern Epsilon.

**Gewähltes Verfahren übernehmen**

**Abbrechen**

Bemerkungen zu den Lösungsverfahren

ode45 : Standardlösungsverfahren von MATLAB für nichtsteife Dgln. Das Verfahren ist wie alle Runge-Kutta-Verfahren ein Einschrittverfahren und beruht auf der Prince-Dormand-Einbettungsformel.

ode23 : Dieses Runge-Kutta-Verfahren 2/3-ter Ordnung beruht auf der Bogacki-Shampine-Einbettungsformel und ist bei kleiner Steifheit und geringer Genauigkeitsanforderung oft besser als ode45.

ode113 : Das Adams-Bashforth-Moulton-Mehrschrittverfahren ist bei hoher Genauigkeitsanforderung oder bei Dgln., deren Auswertung rechenintensiv ist, oft besser als ode45.

ode15s : Standardlösungsverfahren von MATLAB für steife Dgln. Wenn ode45 versagt oder nicht effizient arbeitet oder wenn Steifheit vermutet wird, dann sollte ode15s eingesetzt werden – vor allem bei hoher Genauigkeitsanforderung.

ode23s : Das Rosenbrock-Verfahren ist ein Einschrittverfahren und bei geringer Genauigkeitsanforderung oft besser als ode15s.

ode23t : Das Verfahren beruht auf der Trapezregel und ist für gemäßigt steife Dgln. und bei geringer Genauigkeitsanforderung geeignet.

ode23tb : Dieses Verfahren ist bei geringer Genauigkeitsanforderung oft besser als ode15s.

Kein Verfahren ist für alle Dgln. das beste Verfahren. Theoretische Überlegungen liefern keine strengen Kriterien, welche Methode bei gegebenen Dgln. und geforderter Genauigkeit bestmöglich ist. Vielmehr muss der Anwender die Vor- und Nachteile der Verfahren kennen und im Einzelfall entscheiden bzw. testen, welches Verfahren optimal ist.

**Abb. 3** Der Anwender kann zwischen sieben Verfahren zur numerischen Lösung der Dgln. wählen. Jedes Verfahren wird unten kurz kommentiert.

am schnellsten. Daher ist ode45 zu Recht das Standardlösungsverfahren von MatLab. Es gibt aber auch nichtsteife Dgln., die sich mit ode113 deutlich schneller berechnen lassen.

Systeme, in denen der Übergang zwischen Haft- und Gleitreibung z. B. durch einen kombinierten Reibungsansatz beschrieben wird, sollten in aller Regel mit dem Verfahren ode15s gelöst werden. Dieses Verfahren ist für steife Dgln. oft hundertmal schneller als ode45 oder ode113.

Das vom Anwender gewählte Lösungsverfahren *gilt für alle mechanischen Systeme*. Der Name des aktuellen Verfahrens steht am Ende der blauen Titelleiste von MECHANICUS.