

Nichtlinearer Oszillator

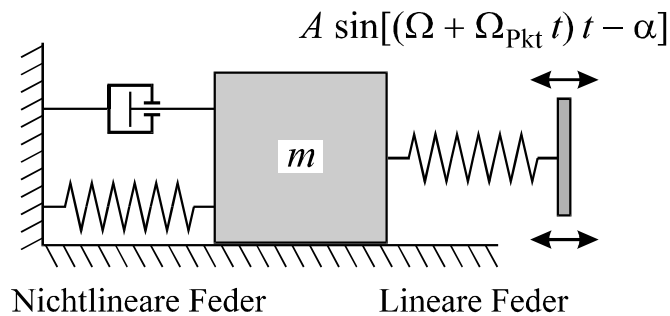


Abb. 1 Der nichtlineare Oszillator kann mit Coulombscher Reibungskraft über den Boden rutschen.

Ein Körper mit Masse m ist auf der linken Seite mit einer nichtlinearen Feder, deren Federkonstante linear in der Zeit geändert werden kann (siehe Dgl.), und einem nichtlinearen Stoßdämpfer verbunden. Auf der rechten Seite ist der Körper an einer linearen Feder befestigt, deren äußerer Fußpunkt harmonisch bewegt werden kann. Die Frequenz der Fußpunktbewegung kann linear in der Zeit verschoben werden, so dass sich z. B. Resonanzkurven durchfahren lassen.

Der angeregte nichtlineare Oszillator ist ein ausführlich untersuchtes **chaotisches System**.

Differentialgln. (abgekürzt Dgln.)

Haften und Gleiten auf dem Boden können *näherungsweise* durch die Gln.

$$R_{\text{Haft}}^{\max} = f_0 N \quad \text{und} \quad R_{\text{Rutsch}} = f N \quad \text{mit } f < f_0 \quad (1)$$

beschrieben werden. Wegen der Unstetigkeit beim Wechsel Gleiten \leftrightarrow Haften ist die numerische Lösung der Dgln. schwierig.

Folgende zwei Lösungsmöglichkeiten liefern meistens *ähnliche Bewegungen*:

1-te Möglichkeit: Der Körper soll zur Zeit $t = 0$ mit Schlupf ($|\dot{x}| \neq 0$) starten.

- Das Lösungsverfahren muss die Dgln. für Rutschen verwenden, bis der Betrag $|\dot{x}|$ der Rutschgeschwindigkeit unter einen sehr kleinen Wert (z. B. 10^{-6} m/s) gefallen ist.
- Dann wird die (sehr kleine) Rutschgeschwindigkeit gleich Null gesetzt und solange auf Null gehalten ($\ddot{x} = 0$), bis die Summe der beiden Federkräfte die maximale Haftkraft $f_0 N$ überschreitet.
- Sodann wird dem Körper eine Geschwindigkeit in die entgegengesetzte Richtung der letzten Haftkraft gegeben mit einem kleinen Betrag (z. B. 10^{-5} m/s). Das Verfahren rechnet jetzt wieder mit den Dgln. für Rutschen weiter usw.

2-te Möglichkeit: Im Maschinenbau werden oft **kombinierte Reibungsansätze** verwendet, die einen *stetigen Übergang* zwischen Rollen und Rutschen beschreiben. Denkbar ist z. B. der Ansatz

$$R = - \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \dot{x}^2} \right) m g \frac{\dot{x}}{\sqrt{10^{-8} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \dot{x}^2}} \quad (2)$$

Die runde Klammer liefert einen stetigen Übergang zwischen einem Maximum, das der Haftreibungszahl f_0 nahe kommt, und der Gleitreibungszahl f . Der Bruch am Ende verhindert Divisionen durch Null und sorgt für einen stetigen Übergang der Reibungskraft beim Vorzeichenwechsel von \dot{x} . In Abb. 2 wird R in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsbetrag \dot{x} dargestellt. Beachte, dass sich die Reibungskraft R bei sehr kleinen Rutschgeschwindigkeiten \dot{x} bei kleinsten Verschiebungen von \dot{x} extrem stark ändert. Diese hohe Empfindlichkeit des kombinierten Reibungsansatzes macht numerische Berechnungen der Dgln. schwierig und anspruchsvoll.

Der Ansatz in Gl. (2) ersetzt das Haften mit $\dot{x} = 0$ durch eine Gleitbewegung mit sehr kleiner Rutschgeschwindigkeit $\dot{x} < 0,4 \text{ mm/s}$.

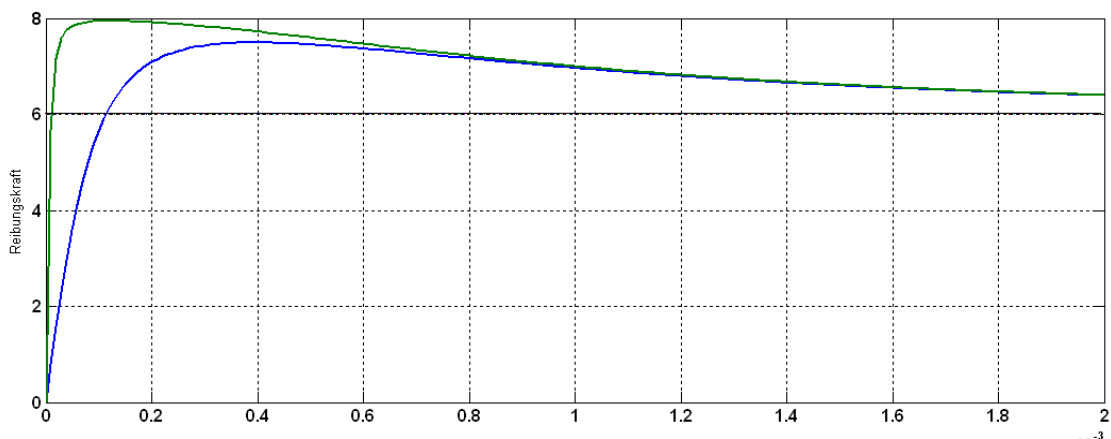


Abb. 2 Die Kurven zeigen den kombinierten Haftreibungs-Gleitreibungs-Ansatz

$$R = \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \dot{x}^2} \right) N \frac{\dot{x}}{\sqrt{v_{\text{gr}}^2 + \dot{x}^2}}$$

für Beträge der Rutschgeschwindigkeit im Intervall $0 \leq \dot{x} \leq 2 \text{ mm/s}$. Folgende Parameter wurden gewählt:

$$f = 0.6 \quad f_0 = 0.8 \quad \text{Normalkraft } N = 10 \text{ N}$$

$$v_{\text{gr}} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{blaue Kurve}) \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{gr}} = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{grüne Kurve})$$

Das Programm MECHANICUS arbeitet mit diesem kombinierten Reibungsansatz, so dass folgende Dgl. gelöst wird:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{x} = & - \left(D_1 + D_1\text{-Pkt} \cdot t \right) x - D_2 x^2 - D_3 x^3 \\
 & - D_{\text{Anreg}} \left[x - A_{\text{Anreg}} \sin \left\{ (\Omega + \Omega\text{-Pkt} \cdot t) t - \alpha \right\} \right] \\
 & - c_1 \dot{x} - c_2 \dot{x}^2 - c_3 \dot{x}^3 \\
 & - \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{\text{s}}{\text{m}} \right)^2 \dot{x}^2} \right) m g \frac{\dot{x}}{\sqrt{10^{-8} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 + \dot{x}^2}}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Der lineare Anteil der nichtlinearen Feder wird bei $D_1\text{-Pkt} \neq 0$ linear in der Zeit geändert. Die Frequenz, mit der die rechte Wand hin und her schwingt, kann ebenfalls linear in der Zeit geändert werden; auf diese Art können z. B. *Resonanzkurven durchfahren* werden – wie beim Anlaufen und Auslaufen von Maschinen.

Numerische Lösungsverfahren

Ohne Coulombsche Reibung am Boden ist das Verfahren ode45 empfehlenswert. Wenn hingegen auf dem Boden Coulombsche Reibung auftritt, so ist ein steife Lösungsverfahren (z. B. ode15s) unbedingt vorzuziehen, da sich die Reibungskraft nach Abb. 2 bei sehr kleinen Geschwindigkeiten \dot{x} dramatisch ändert.

Animation

Eine schnelle MatLab-Animation ist nur möglich, wenn Längenänderungen der Feder mit dem Skalierungsbefehl ‚scale‘ von MatLab durchgeführt werden. Dabei ändert sich leider auch die Dicke der Windungen in Skalierungsrichtung.

Literatur

- Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag, 9-te Auflage, Kapitel 14. Hier werden nichtlineare Schwingungen mit der Störungsrechnung und mit dem Verfahren der harmonischen Balance berechnet.

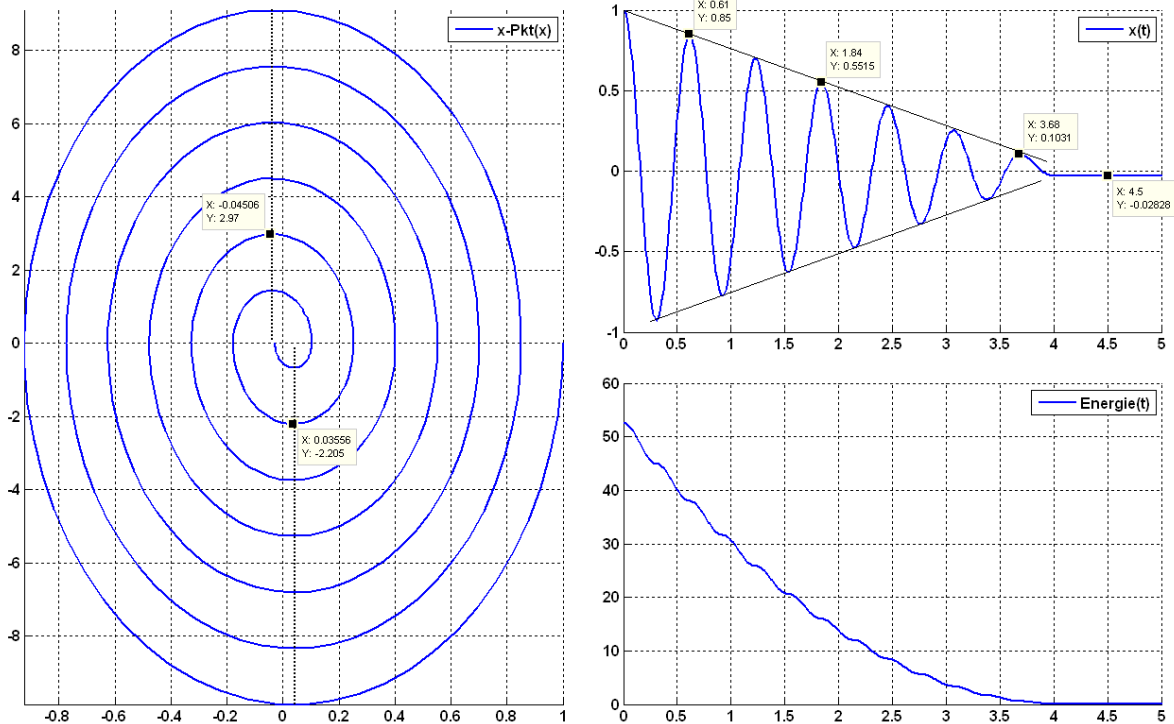


Abb. 3 Die Kurven wurden mit folgenden Anfangsbedingungen und Parametern berechnet:

$$x_0 = 1 \text{ m} \quad v_0 = 0 \quad m = 1 \text{ kg} \quad D_1 = 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad f = 0,4 \quad f_0 = 0,6$$

(Die restlichen 11 Parameter sind null.) Folglich zeigen die Kurven die Schwingung eines freien linearen Oszillators, der mit dem **kombinierten Reibungsansatz** in Gl. (2) über den Boden rutscht.

Wenn man die Schwingung mit den Reibungsansätzen nach Gl. (1) **stückweise analytisch** berechnet, so hat jede Halb-Schwingung die Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \mp \frac{f m g}{D_1} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \dot{x} > 0 \\ \dot{x} < 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D_1}{m}}$$

Folglich tritt nach jeder Halbschwingung ein Amplitudenverlust auf in der Höhe

$$\frac{2 f m g}{D_1} = 0,07848 \text{ m} \quad (4)$$

Die **Schwingungsamplitude fällt** nicht exponentiell, sondern **linear**. Am Ende kommt die Schwingung nicht unbedingt bei $x=0$ zur Ruhe, sondern irgendwo im Intervall $[-f_0 m g, f_0 m g]/D_1$.

Für Schwingungen mit den Anfangsbedingungen $x_0 \neq 0, v_0 = 0$ ist die Zahl der durchgeführten Halb-Schwingungen die kleinste natürliche Zahl n , die folgende Gl. erfüllt:

$$|x_0| - \frac{2 f m g}{D_1} n \leq \frac{f_0 m g}{D_1} = 0,05886 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad n \geq 11.992 \quad \Rightarrow \quad n = 12$$

Die Kurven in Abb. 4 wurden mit dem **kombinierten Reibungsansatz** numerisch berechnet. Sie zeigen ebenfalls einen linearen Abfall der Amplitude. In Abb. 4 kommt die Schwingung aber erst nach $n=13$ zur Ruhe, weil der Amplitudenverlust beim kombinierten Reibungsansatz nach jeder Halbschwingung knapp 0,075 m beträgt, also etwas weniger als in Gl. (4).