

Toastbrot an der Tischkante

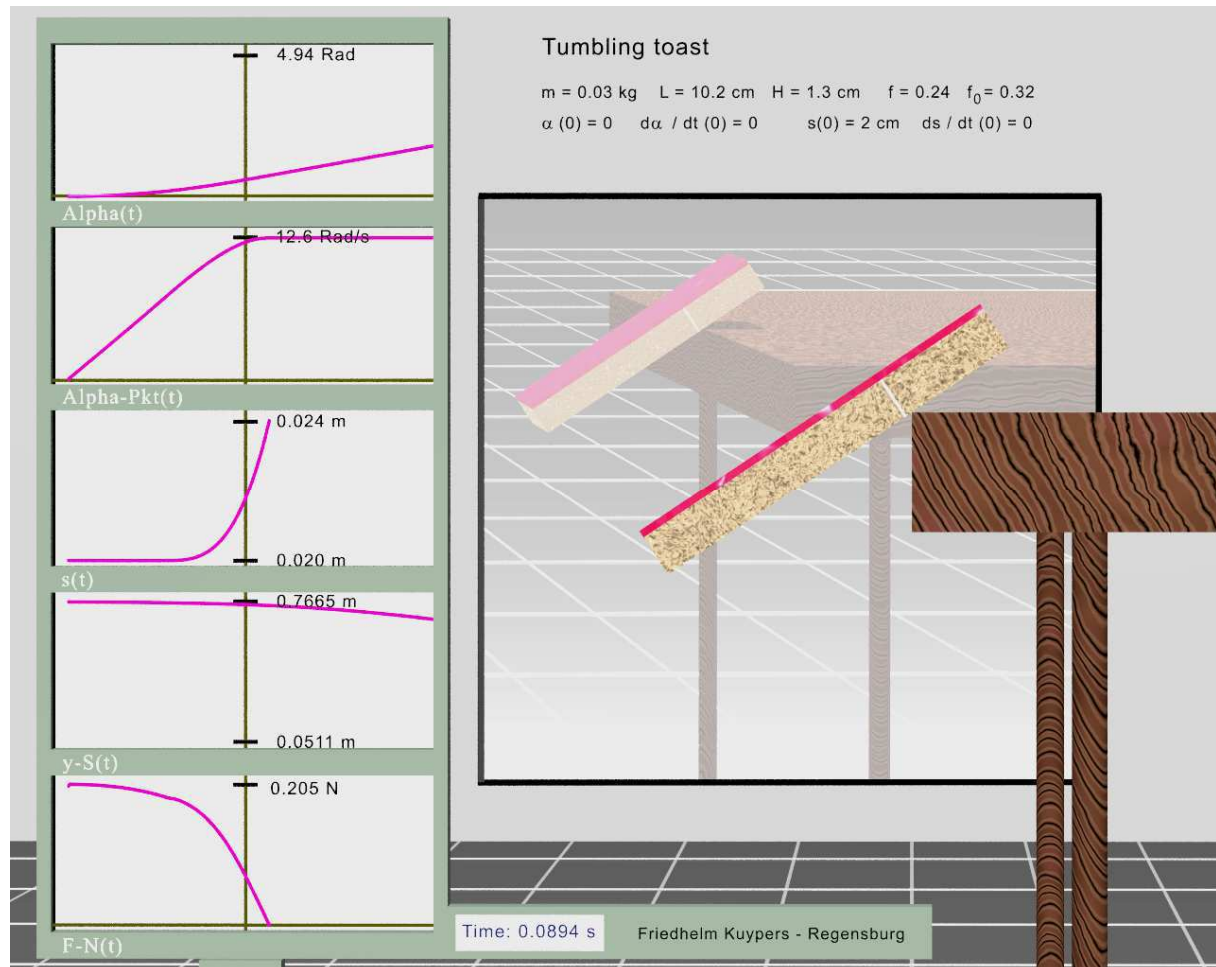


Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation.

Ein Toastbrot mit dem anfänglichen Überhang $s(0) = 2 \text{ cm}$ kippt über eine Tischkante. Die 5 Kurven sind der Kippwinkel $\alpha(t)$ und seine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}(t)$, der Überhang $s(t)$, die Schwerpunkthöhe $y_S(t)$ und die Normalkraft $N(t)$ des Tisches auf das Toastbrot. Wenn das Brot vom Tisch abhebt, dann enden die 3. und 5. Kurve und das Brot fällt reibungsfrei zu Boden.

Hier soll die bekannte Frage untersucht werden, ob ein Toastbrot mit Länge l und Breite b , das über die Tischkante rutscht, mit der Butterseite nach oben oder nach unten auf den Fußboden fällt. Die Tischkante hat die Höhe h über dem Fußboden.

Differentialgl.

Nach Abb. 3 wird der Ortsvektor \mathbf{r}_S des Schwerpunktes S durch den Kippwinkel α und den Überhang s wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{r}_S = s \mathbf{e}_s - \frac{b}{2} \mathbf{e}_\alpha$$

Mit $\dot{\mathbf{e}}_s = \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ $\dot{\mathbf{e}}_\alpha = -\dot{\alpha} \mathbf{e}_s$

folgt: $\dot{\mathbf{r}}_S = \dot{s} \mathbf{e}_s + s \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha + \frac{b}{2} \dot{\alpha} \mathbf{e}_s$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_S = \ddot{s} \mathbf{e}_s + \dot{s} \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha + \dot{s} \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha + s \ddot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha - s \dot{\alpha}^2 \mathbf{e}_s + \frac{b}{2} \ddot{\alpha} \mathbf{e}_s + \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2 \mathbf{e}_\alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_S = \left(\ddot{s} - s \dot{\alpha}^2 + \frac{b}{2} \ddot{\alpha} \right) \mathbf{e}_s + \left(s \ddot{\alpha} + 2 \dot{s} \dot{\alpha} + \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2 \right) \mathbf{e}_\alpha \quad (1)$$

Der Term $2 \dot{s} \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha$ ist die Coriolisbeschleunigung.

Für ein an der Tischkante **rutschendes Toastbrot** ($\dot{s} > 0$) ergeben sich mit Gl. (1) der **Schwerpunktsatz** und der **Drehimpulssatz**:

$$\nearrow : m \left(\ddot{s} - s \dot{\alpha}^2 + \frac{b}{2} \ddot{\alpha} \right) = -F_R + m g \sin \alpha \quad (2)$$

$$\searrow : m \left(s \ddot{\alpha} + 2 \dot{s} \dot{\alpha} + \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2 \right) = -N + m g \cos \alpha \quad \text{für das rutschende Toastbrot} \quad (3)$$

$$\curvearrowright_S : I_S \ddot{\alpha} = N s + F_R \frac{b}{2} \quad (4)$$

Dabei ist N die Normalkraft und F_R die Reibungskraft der Tischkante auf das Brot.

Wir erwarten aufgrund unserer Erfahrung, dass das Brot am Anfang der Bewegung ohne Rutschen an der Tischkante kippen kann ($\dot{s} = 0$) und dass es später die Tischkante herunter rutscht ($\dot{s} > 0$).

Der Wechsel zwischen Kippen und Rutschen kann durch einen – im Maschinenbau üblichen – **kombinierten Reibungsansatz** beschrieben werden, der einen **stetigen Übergang zwischen Kippen und Rutschen** formuliert. Denkbar ist z. B. folgender kombinierter Reibungsansatz:

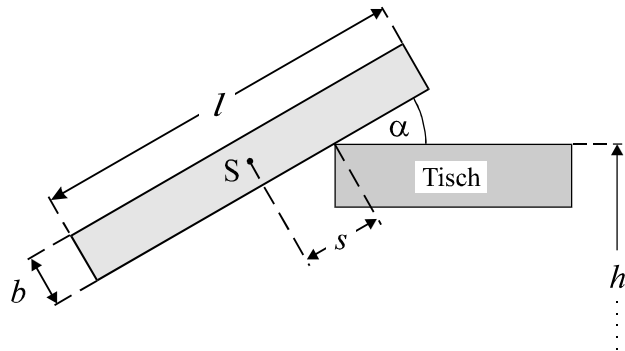


Abb. 2 Das Toastbrot mit Länge l und Breite b kippt über die Tischkante. Der Kippwinkel α und der Überhang s des Schwerpunktes beschreiben die Bewegung.

Der Einfachheit wegen wird nur die Bewegung untersucht, bei der die langen Seiten des Toastbrotes parallel bzw. senkrecht zur Tischkante sind.

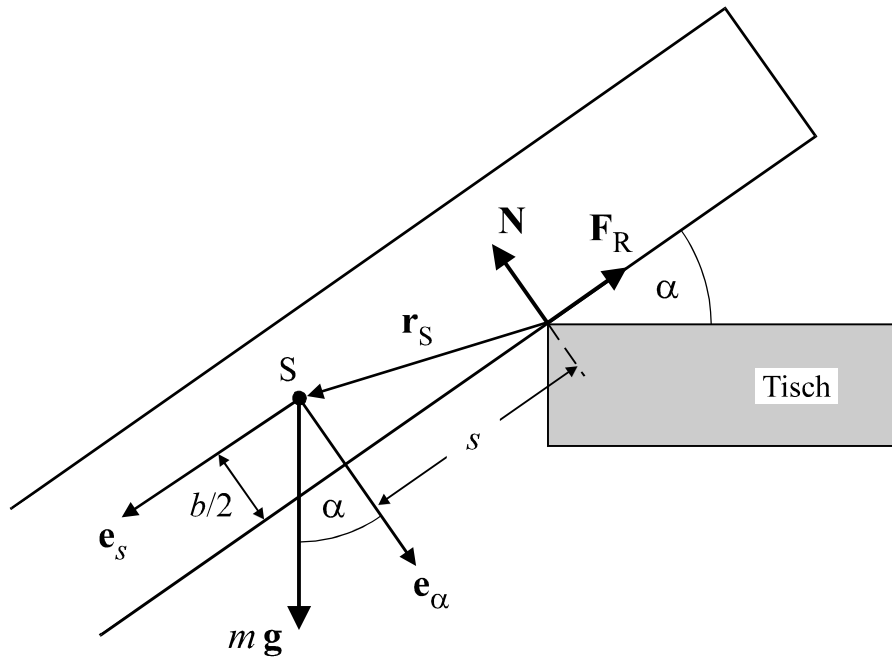


Abb. 3 Die Vektoren $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\alpha$ sind die körperfesten Basisvektoren. Die Lage des Schwerpunktes S wird durch die Koordinaten s, α beschrieben.

$$F_R = f_{\text{eff}} N \quad (5)$$

mit der „effektiven Reibungszahl“

$$f_{\text{eff}} := \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{s}{m} \right)^2 \dot{s}^2} \right) \frac{\dot{s}}{\sqrt{10^{-8} \left(\frac{m}{s} \right)^2 + \dot{s}^2}} \quad (6)$$

In Abb. 4 wird F_R in Abhängigkeit von der Reibgeschwindigkeit \dot{s} dargestellt. Beachte, dass die Reibungskraft F_R bei sehr kleinen Geschwindigkeiten \dot{s} äußerst empfindlich von \dot{s} abhängt.

Die effektive Reibungszahl f_{eff} liefert einen stetigen Übergang zwischen der Gleitreibungszahl f und einem Maximum, das für kleine Rutschgeschwindigkeiten \dot{s} der Haftreibungszahl f_0 nahe kommt. Der hintere Quotient in Gl. (6) lässt die Reibungskraft für $\dot{s} \rightarrow 0$ gegen Null gehen und liefert $F_R(\dot{s}=0) = 0$.

Bei fallender Reibgeschwindigkeit \dot{s} steigt die Reibungskraft *stetig* gegen $f_0 N$ an – in guter Übereinstimmung mit Messungen. *Der kombinierte Reibungsansatz ersetzt Haftung durch Gleiten mit kleiner Gleitgeschwindigkeit $\dot{s} < 0,4 \text{ mm/s}$.* Aus dieser angenäherten Haftung kann sich das Toastbrot nur „befreien“, wenn die Reibungskraft den Wert $f_0 N$ übersteigt (Siehe die Kurve $\dot{s}(t)$ zweite Zeile rechts in Abb. 5).

Die Bewegung des Toastbrottes an der Tischkante kann vollständig mit den drei Dgln. (2/3/4) und dem Reibungsansatz (5/6) beschrieben werden. Die drei Dgln. enthalten die drei unbekannten Funktionen s, α, N .

Wir lösen Gl. (4) nach N auf

$$N = \frac{I_S \ddot{\alpha}}{s + f_{\text{eff}} \frac{b}{2}} \quad (7)$$

Hinweis: Für den Anfangswert $\dot{s}(0) = 0$ machen die Normalkraft N und die Reibungskraft F_R beim ersten numerischen Zeitschritt kleine Sprünge, da sich $\dot{s}(t)$ und damit auch f_{eff} im ersten numerischen Zeitintervall ebenfalls sprunghaft ändern.

Wir setzen N in die Dgl. (3) ein:

$$m \left(s \ddot{\alpha} + 2 \dot{s} \dot{\alpha} + \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2 \right) = - \frac{I_S \ddot{\alpha}}{s + f_{\text{eff}} \frac{b}{2}} + m g \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \left(m s + \frac{I_S}{s + f_{\text{eff}} \frac{b}{2}} \right) \ddot{\alpha} = - m \left(2 \dot{s} \dot{\alpha} + \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2 \right) + m g \cos \alpha$$

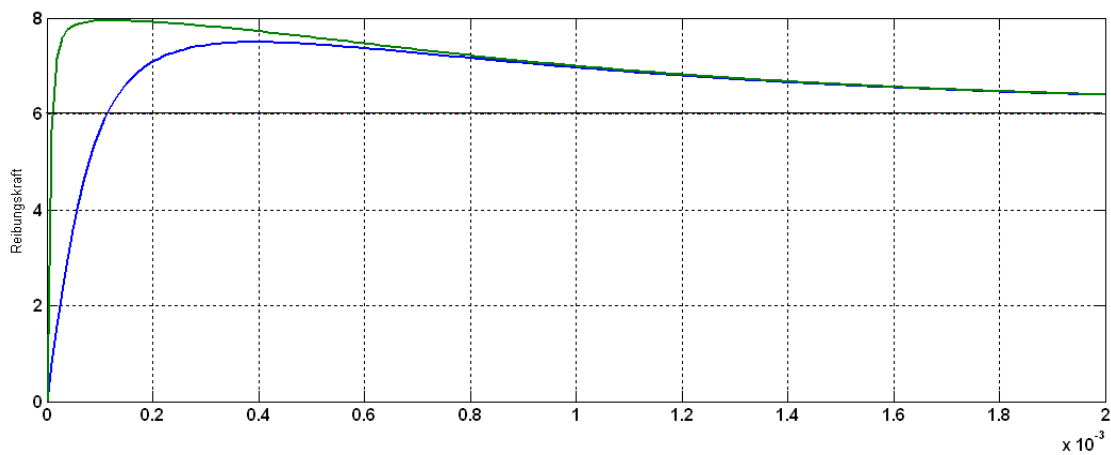


Abb. 4 Die Kurven zeigen die kombinierte Haftreibungs-Gleitreibungs-Kraft

$$F_R = f_{\text{eff}} N = \left(f + \frac{f_0 - f}{1 + 10^6 \left(\frac{s}{m} \right)^2 \dot{s}^2} \right) \frac{\dot{s}}{\sqrt{v_{\text{gr}}^2 + \dot{s}^2}} N$$

für Beträge der Rutschgeschwindigkeit im Intervall $0 \leq \dot{s} \leq 2 \text{ mm/s}$ und für

$$f = 0.6 \quad f_0 = 0.8 \quad \text{Normalkraft } N = 10 \text{ N}$$

$$v_{\text{gr}} = 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{blaue Kurve}) \quad \text{bzw.} \quad v_{\text{gr}} = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{grüne Kurve})$$

Daraus folgt die erste explizite Dgl.:

$$\ddot{\alpha} = \frac{g \cos \alpha - 2 \dot{s} \dot{\alpha} - \frac{b}{2} \dot{\alpha}^2}{s + \frac{I_S}{m \left(s + f_{\text{eff}} \frac{b}{2} \right)}} \quad (8)$$

Für die numerische Lösung muss die zweite Dgl. nicht mehr explizit aufgelöst werden. Aus Gl. (2) folgt:

$$\ddot{s} = s \dot{\alpha}^2 - \left(\frac{b}{2} + \frac{I_S}{m} \frac{f_{\text{eff}}}{s + f_{\text{eff}} \frac{b}{2}} \right) \ddot{\alpha} + g \sin \alpha \quad (9)$$

Die Parameter m und I_S kommen nur in der Kombination I_S/m vor. Dies ist auch plausibel, da die Länge des Brotes parallel zur Tischkante keine Rolle spielt.

Es gilt

$$x_S = -s \cos \alpha - \frac{b}{2} \sin \alpha \quad (10a)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_S = -\dot{s} \cos \alpha + s \dot{\alpha} \sin \alpha - \frac{b}{2} \dot{\alpha} \cos \alpha \quad (10b)$$

$$\text{sowie } y_S = -s \sin \alpha + \frac{b}{2} \cos \alpha + h \quad (11a)$$

$$\Rightarrow \dot{y}_S = -\dot{s} \sin \alpha - s \dot{\alpha} \cos \alpha - \frac{b}{2} \dot{\alpha} \sin \alpha \quad (11b)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{b^2}{4} \dot{\alpha}^2 + b \dot{s} \dot{\alpha}$$

Die Energie des rutschenden Toastbrotes beträgt daher

$$E = \frac{I_S}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2} \left[\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{b^2}{4} \right) \dot{\alpha}^2 + b \dot{s} \dot{\alpha} \right] - m g \left(s \sin \alpha - \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{b}{2} \right) \quad (12)$$

Die numerische Lösung der Dgln. (8/9) wird von MECHANICUS – mit event-functions – automatisch beendet, wenn der Überhang s die halbe Länge $l/2$ des Toastbrotes erreicht oder wenn die Normalkraft N kleiner oder gleich Null wird.

Anschließend schaltet das Programm MECHANICUS automatisch auf den **freien Fall** um mit sechs Anfangsbedingungen für $\alpha, \dot{\alpha}, x_S, \dot{x}_S, y_S, \dot{y}_S$. Beim freien Fall wird die *Luftreibung vernachlässigt*.

Die numerische Berechnung des freien Falls wird von MECHANICUS automatisch beendet, wenn eine Ecke des Toastbrotes auf den Boden trifft, wenn also eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

$$y_S - \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad y_S + \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad (13a/b)$$

$$\text{oder} \quad y_S - \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad y_S + \frac{b}{2} \cos \alpha + \frac{l}{2} \sin \alpha = 0 \quad (13c/d)$$

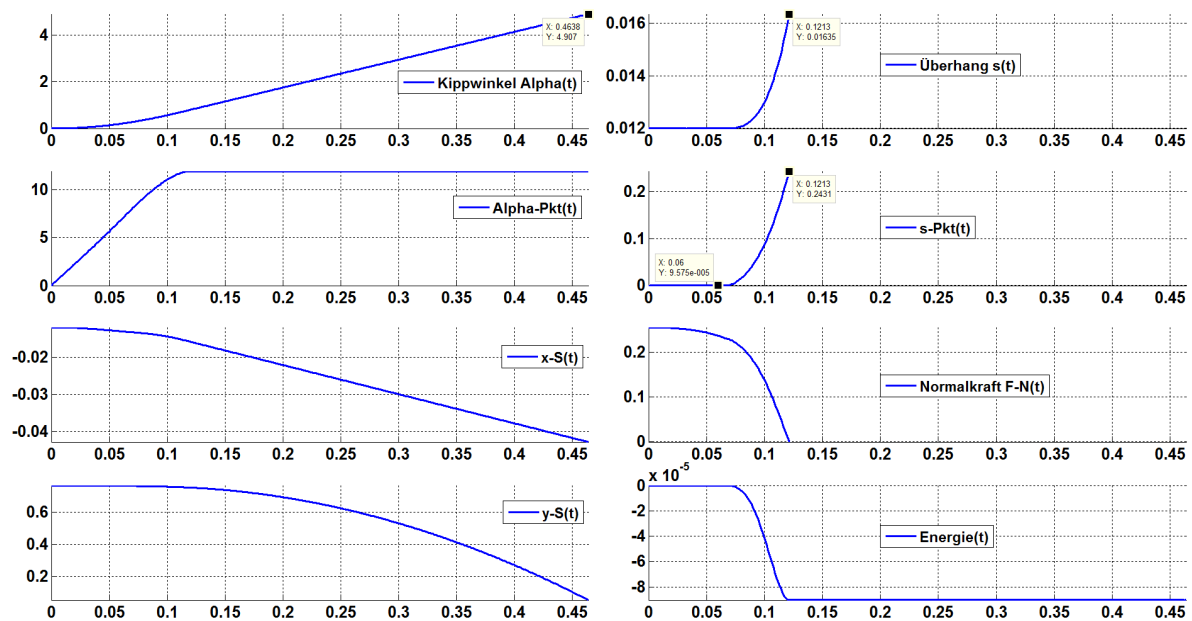


Abb. 5 Ein Toastbrot kippt von einem 76 cm hohen Tisch. Die ersten 75 ms kippt das Brot ohne Rutschen ($\dot{s} \approx 0$); danach rutscht das Toastbrot ($\dot{s} > 0$) und hebt zur Zeit $t \approx 121$ ms vom Tisch ab; hier enden die Kurven $s(t), \dot{s}(t), F_N(t)$. Zur Zeit $t \approx 464$ ms berührt das Brot mit dem Winkel $\alpha \approx 4,91$ rad $\approx 281^\circ$ erstmals den Boden und bleibt danach mit der *Butterseite nach oben* liegen.

Die Anfangsbedingungen und Parameter lauten:

$$\alpha_0 = \dot{\alpha}_0 = 0 \quad s_0 = 1,2 \text{ cm} \quad \dot{s}_0 = 0$$

$$m = 30 \text{ g} \quad l = 10,2 \text{ cm} \quad b = 1,3 \text{ cm} \quad h = 76 \text{ cm} \quad f = 0,24 \quad f_0 = 0,32$$

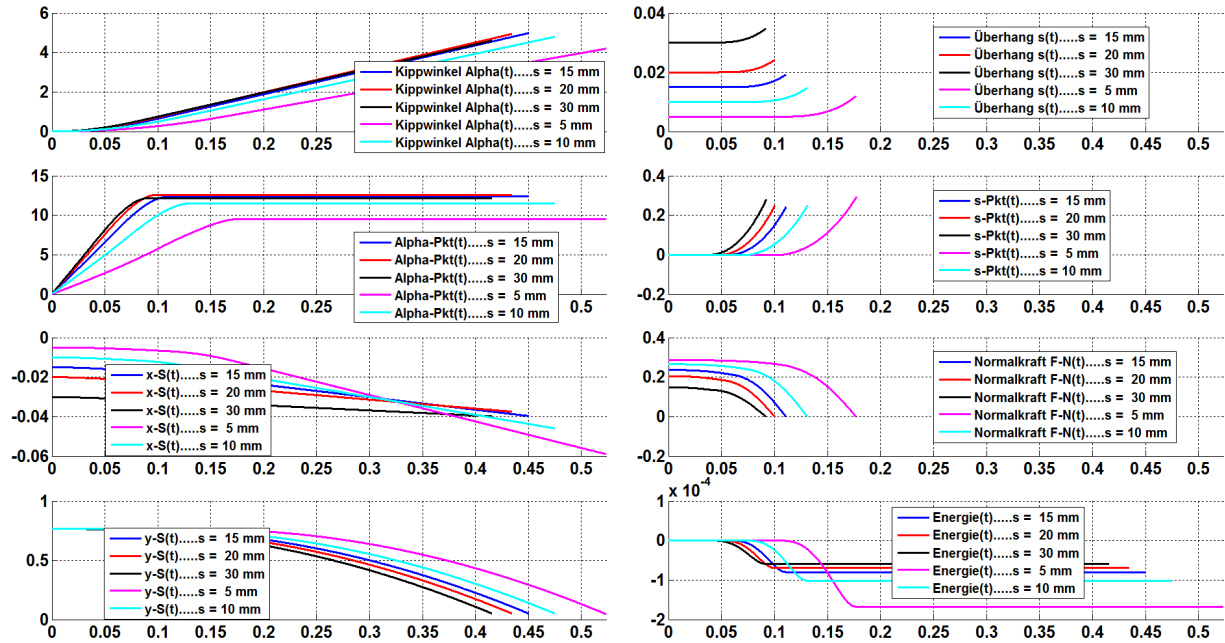


Abb. 6 Die fünf Berechnungen haben dieselben Anfangsbedingungen und Parameter wie die vorangehende Abb. 5 – mit einer Ausnahme: Der anfängliche Überhang s_0 beträgt 5, 10, 15, 20, 30 mm.

Wie erwartet werden mit einem wachsenden anfänglichen Überhang s_0 die Normalkraft F_N , der Energieverlust und die Zeit bis zum Bodenkontakt kleiner.

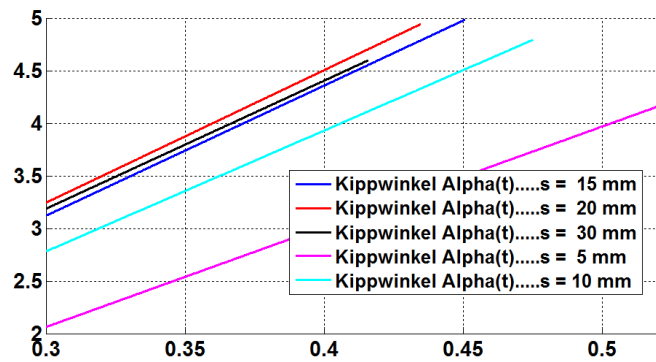


Abb. 7 Hier wird das erste Fenster in Abb. 6 im Zeitintervall $[0,3\text{ s}, 0,52\text{ s}]$ vergrößert dargestellt. Der Winkel beträgt beim ersten Bodenkontakt:

$s_0 = 5\text{ mm}$	$\alpha_{\text{End}} \approx 4,16\text{ Rad} \approx 238^\circ$	\Rightarrow	Butterseite unten
$s_0 = 10\text{ mm}$	$\alpha_{\text{End}} \approx 4,79\text{ Rad} \approx 274^\circ$	\Rightarrow	Butterseite oben
$s_0 = 15\text{ mm}$	$\alpha_{\text{End}} \approx 4,98\text{ Rad} \approx 285^\circ$	\Rightarrow	Butterseite oben
$s_0 = 20\text{ mm}$	$\alpha_{\text{End}} \approx 4,94\text{ Rad} \approx 283^\circ$	\Rightarrow	Butterseite oben
$s_0 = 30\text{ mm}$	$\alpha_{\text{End}} \approx 4,60\text{ Rad} \approx 263^\circ$	\Rightarrow	Butterseite unten

Diese Ergebnisse stimmen mit den experimentell ermittelten Angaben in [1] gut überein.

Der Kippwinkel beim ersten Bodenkontakt sei α_{Boden} . *Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Toastbrot mit der **Butterseite nach unten** liegen bleibt, wenn gilt*

$$90^\circ < \alpha_{\text{Boden}} < 270^\circ \quad (14)$$

*Andernfalls kommt das Brot mit der **Butterseite nach oben** zu liegen.*

Experimente

In der Veröffentlichung [1] werden die Ergebnisse von Experimenten und von numerischen Berechnungen beschrieben. Aus Gründen der Reproduzierbarkeit der Versuche wurde das *Toastbrot durch einen Holzquader ersetzt*. Für Toastbrot und Holzquader wurden folgende Haftreibungszahlen ermittelt:

Toastbrot auf flachem Tisch und an der Tischkante:

$$f_0^{\text{flach}} \approx 0,58 \quad f_0^{\text{Kante}} \approx 0,62$$

Holzquader auf flachem Tisch und an der Tischkante:

$$f_0^{\text{flach}} \approx 0,40 \quad f_0^{\text{Kante}} \approx 0,32$$

Der Holzquader hat an der Tischkante eine kleinere Haftreibungszahl f_0 als auf dem flachen Tisch. Beim Toastbrot ist es umgekehrt – vielleicht, weil das Brot an der Tischkante leicht eingedrückt wird.

Die Gleitreibungszahl für den Holzquader an der Tischkante wurde zu

$$f^{\text{Kante}} \approx 0,24$$

gemessen.

In den vorangehenden Abb. wurden die Kurven mit den Reibungszahlen 0,32 und 0,24 und mit den anderen Parametern aus [1] berechnet; die Tischhöhe beträgt stets 76 cm. Wie in der Veröffentlichung wurde nur der anfängliche Überhang s_0 variiert.

Die in [1] gemessenen Ergebnisse stimmen überraschend gut mit den hier gemachten numerischen Berechnungen überein – trotz der Einfachheit des Reibungsansatzes. Gemessene und numerisch berechnete Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\alpha}$ beim freien Flug unterscheiden sich höchstens um 5%.

Laut Messungen landet die *Butterseite oben* für

$$8 \text{ mm} < s_0 < 30 \text{ mm}$$

Für größere und kleinere anfängliche Überhänge s_0 landet das Brot auf der Butterseite.

Nach unseren numerischen Berechnungen landet die *Butterseite oben* für

$$10 \text{ mm} < s_0 < 26 \text{ mm}$$

Literatur

- [1] : M. E. Bacon, George Held, Matt James: A closer look at tumbling toast. Am. J. Phys. **69**, 38-43, January 2001.