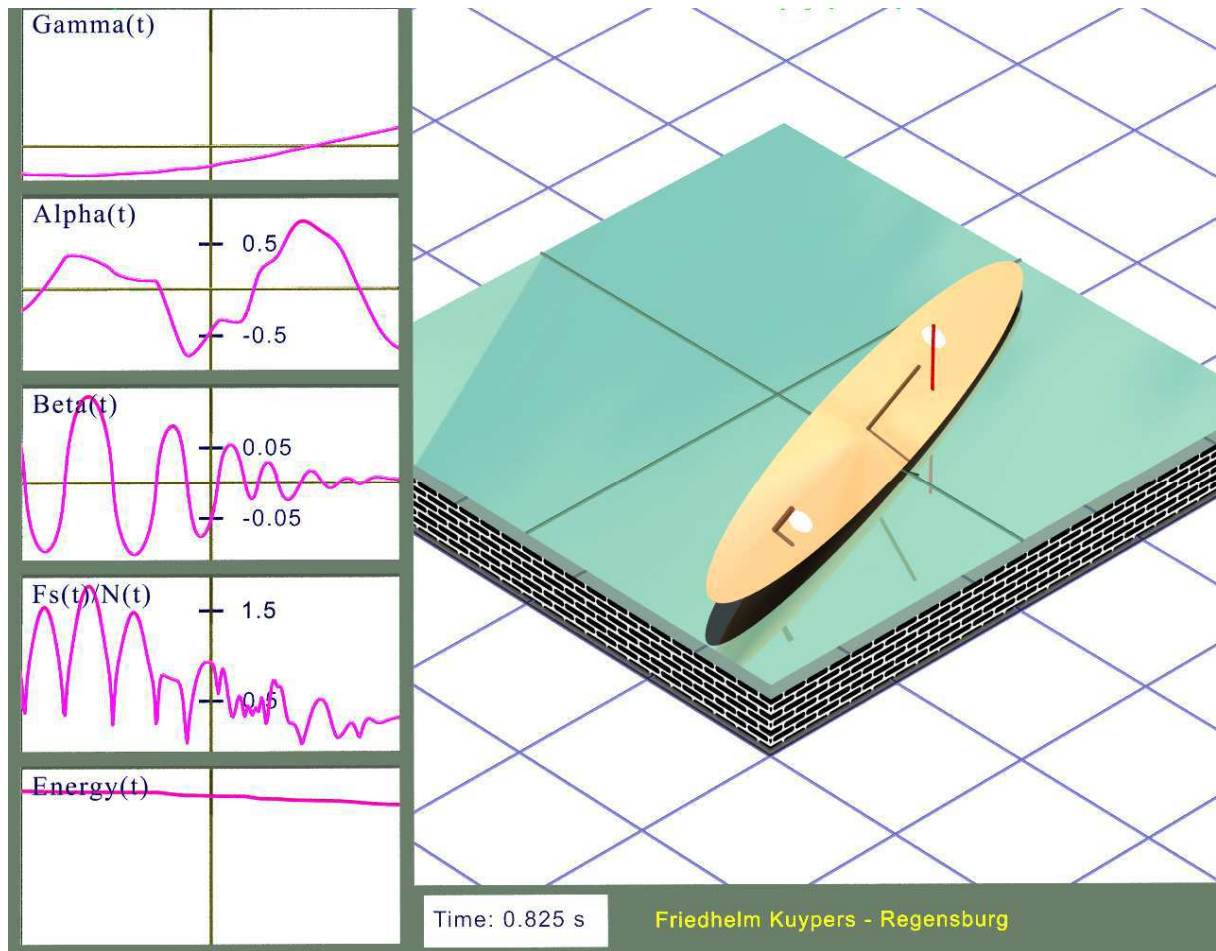


# Wackelstein ohne Schlupf. Harter Boden



**Abb. 1 Momentaufnahme einer POV-Ray-Animation.** Der imaginäre, vertikale **rote** Stab geht durch den Auflagepunkt des Wackelsteines. Die 5 Kurven zeigen den Zeitverlauf der 3 Winkel Gamma, Alpha, Beta, des Verhältnisses Haftreibungskraft/Normalkraft und der Energie.

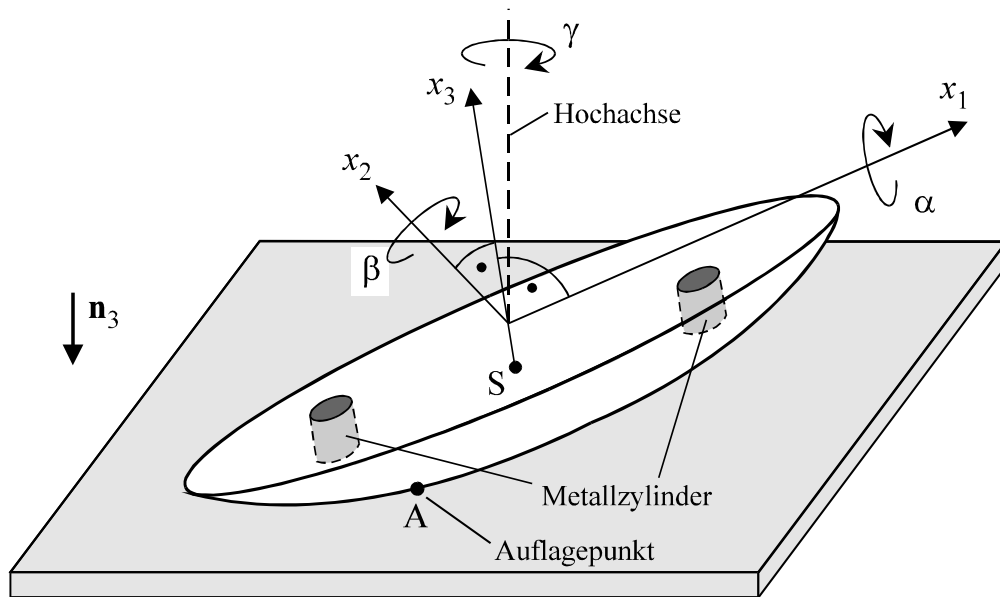
Da das Verhältnis „Haftreibungskraft/Normalkraft“ zeitweise deutlich größer ist als Eins, die Haftreibungszahl  $\mu_0$  aber für Wackelsteine unter Eins liegt, ist die **Annahme „Rollen ohne Schlupf“ bei heftigen Schwingungen unrealistisch**. Daher ist das zweite Modell „Wackelstein *mit* Schlupf. Harter Boden“, das ebenfalls in MECHANICUS eingebaut ist, in der Regel realistischer.

Ein Keltischer Wackelstein oder Keltisches Wackelholz (Englisch: Celt oder Rattleback) ist ein starrer Körper aus Holz, der knapp die  *Hälfte eines länglichen Ellipsoids* bildet, also einen Ellipsoid, von dem etwas mehr als die obere Hälfte abgeschnitten wurde. Die geometrischen Halbachsen haben die Längen

$a$  in  $x_1$  – Richtung

$b$  in  $x_2$  – Richtung

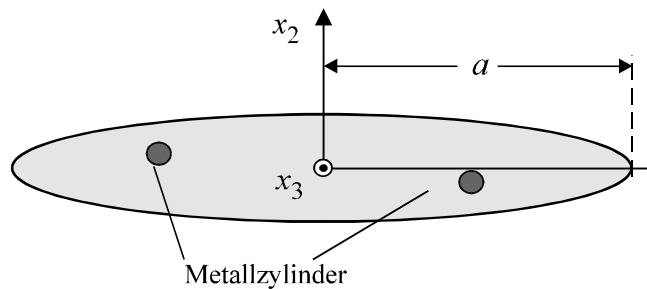
$c$  in  $x_3$  – Richtung



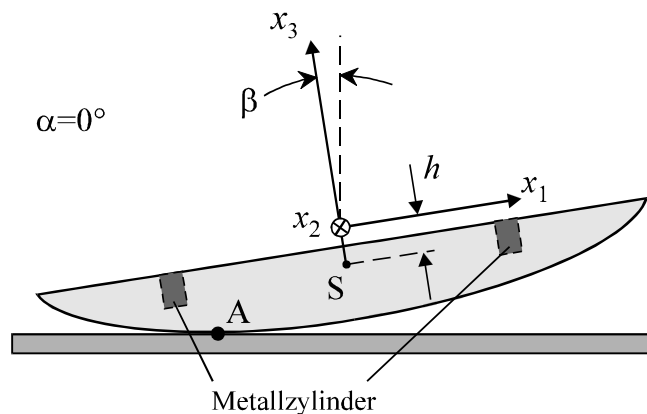
**Abb. 2** Die körperfesten  $x_1, x_2$ -Achsen laufen durch den **geometrischen Mittelpunkt** des (nichtabgeschnittenen) Ellipsoids und sind parallel zur ebenen Decke des Wackelsteins. Die körperfeste  $x_3$ -Achse steht senkrecht auf der Deckfläche. Die Drehungen um  $\alpha, \beta$  erfolgen um die körperfesten  $x_1, x_2$ -Achsen, die  $\gamma$ -Drehung erfolgt um die inertielle Hochachse.

wobei  $a$  deutlich größer ist als  $b, c$  (siehe die Abbn. 2 und 3a). In den Holzkörper werden *neben* der großen Halbachse zwei *Metallzylinder* eingesetzt (siehe die Aufsicht in Abb. 3a). Dadurch wird die *Massenverteilung unsymmetrisch*, so dass in der Ruhelage die zwei *horizontalen Hauptträgheitsachsen nicht* mit den *horizontalen Halbachsen* des Ellipsoids übereinstimmen, sondern mit ihnen einen Winkel  $\delta$  einspannen. Für  $\delta > 0$  sind die Hauptträgheitsachsen im mathematisch positiven Sinn gegenüber den Achsen des Ellipsoids gedreht.

Auf einer flachen Unterlage ruht der Wackelstein stabil, wobei die vertikale Hauptträgheitsachse mit der vertikalen Halbachse des Ellipsoids zusammenfällt.



**Abb. 3a** Aufsicht des Wackelsteins. Hier ist  $\delta < 0$ .



**Abb. 3b** Seitenansicht des Wackelsteins für  $\alpha = 0^\circ$ .

## Besonderheiten des Wackelsteins

Versetzt man einen Wackelstein auf einer horizontalen Unterlage in eine Drehung, so rotiert er bei *einem* Drehsinn – z. B. im Gegenuhrzeigersinn – erwartungsgemäß stabil, wobei die Drehung wegen der Reibung immer langsamer wird und nach einigen Sekunden aufhört. Beim umgekehrten Drehsinn – in diesem Fall im Uhrzeigersinn – zeigt er ein überraschendes Verhalten: Es treten seitliche Kippbewegungen auf, die immer stärker werden und der Rotation die gesamte Bewegungsenergie entziehen. Nach wenigen Sekunden kommt die Rotation völlig zum Erliegen, und die Wackelbewegung enthält die ganze, bis dahin noch vorhandene Bewegungsenergie. Anschließend wird der größte Teil der kinetischen Energie wieder in Rotationsenergie umgesetzt, wobei die Rotation nun die bevorzugte Drehrichtung im Gegenuhrzeigersinn hat. *Der Wackelstein hat seinen Drehimpuls umgekehrt.*

Nur *die* Drehrichtung ist stabil, bei der die zwei horizontalen Hauptträgheitsachsen den horizontalen Halbachsen des Ellipsoids „vorauslaufen“. Der in Abb. 3a dargestellte Wackelstein möchte sich daher im Uhrzeigersinn drehen; für ihn ist der Winkel  $\delta < 0$ . Bei einigen Wackelsteinen kommen im Experiment am Ende der Bewegung drei bis höchstens vier weitere Umkehrungen der Drehrichtung vor; sie sind aber wegen der kleinen verbleibenden Energie nur sehr schwach.

Wackelhölzer können in einigen Spielzeuggeschäften gekauft werden. Mit Geduld und Glück lassen sich am Strand Kieselsteine mit gewölbter Unterfläche und „schiefer“ Massenverteilung finden, die die Eigenschaften eines Wackelsteines haben. Mit solchen Kieselsteinen haben angeblich keltische Priester früher Entscheidungen getroffen.

## Mathematisches Modell

Die Orientierung und damit auch die Bewegung des Wackelsteins werden durch drei Drehungen in folgender Reihenfolge beschrieben:

- 1) Drehung  $\gamma$  um die inertielle Hochachse
- 2) Drehung  $\alpha$  um die körperfeste Längsachse  $x_1$  des Ellipsoids
- 3) Drehung  $\beta$  um die körperfeste Querachse  $x_2$  des Ellipsoids

Der hier simulierte Wackelstein rollt **ohne Schlupf** über den **harten Boden**. Der Wackelstein kann hier also **nicht rutschen** und sein tiefster Punkt kann nicht vom harten Boden abheben. Bei heftigen Bewegungen kann die Haftreibungskraft am Boden zeitweise deutlich größer sein als die Normalkraft des Bodens (siehe die untere Kurve in Abb. 4). Hier ist das Modell „Rollen ohne Schlupf“ nicht realistisch.

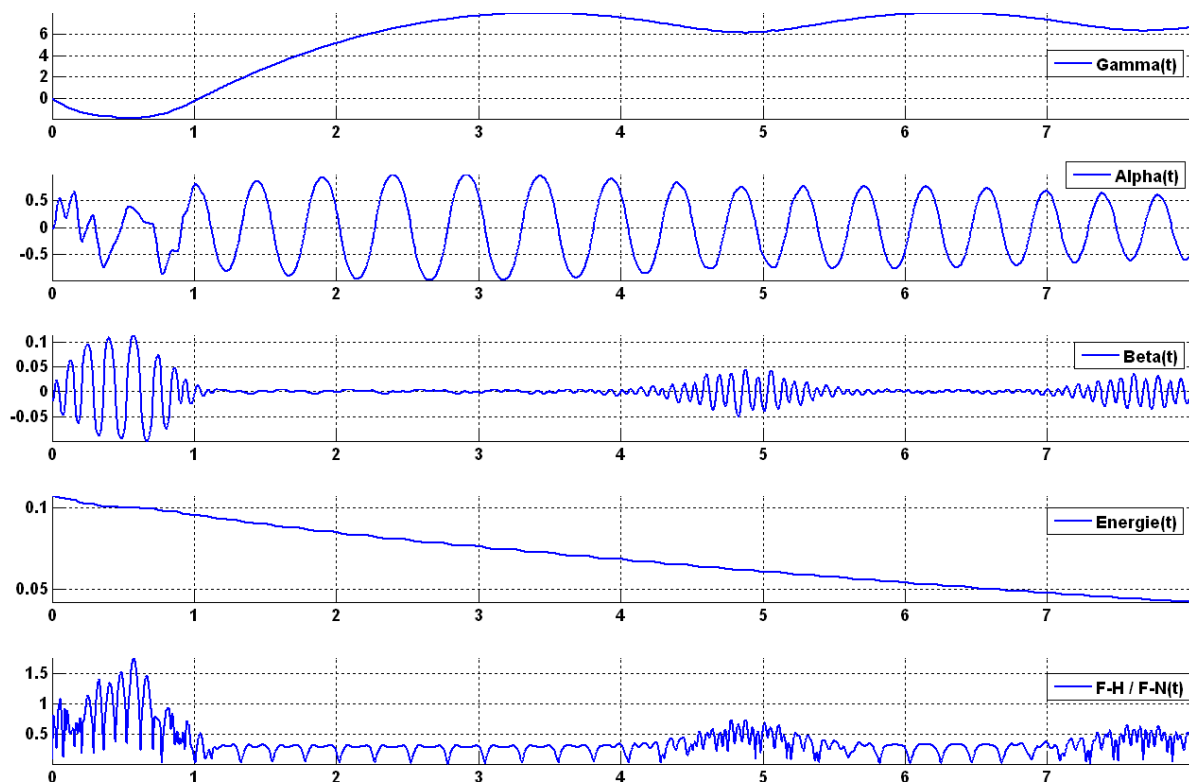
Für die **laminare Luftreibung** wird folgendes körperfeste Reibungsmoment angesetzt:

$$\mathbf{N}_R = - \begin{pmatrix} c_1 \omega_1 \\ c_2 \omega_2 \\ c_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } c_i = \text{Luft-Reibungskoeffizient.}$$

Am Ende dieser Datei werden die sehr langen Dgln. mit den Euler-Gln. aufgestellt.

## Numerische Lösungsverfahren

Das Lösungsverfahren ode113 ist empfehlenswert.



**Abb. 4** Die numerisch berechneten Kurven zeigen die Winkel  $\gamma(t)$ ,  $\alpha(t)$  und  $\beta(t)$  sowie die Energie  $E(t)$  und das Verhältnis Haftkraft/Normalkraft. Die Drehung um die Hochachse wird durch  $\gamma(t)$  beschrieben; der Drehsinn ändert sich insgesamt fünfmal.

Die Anfangsbedingungen und Parameter des Wackelsteins lauten:

$$\alpha = \beta = -0,02 \text{ Rad} \quad \omega_3 = -8 \text{ Rad/s} \quad \text{Die restlichen fünf Anfangsbedingungen sind null.}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad I_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad I_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad I_3 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$a = 0,2 \text{ m} \quad b = 0,03 \text{ m} \quad c = 0,02 \text{ m} \quad \delta = 0,1 \text{ Rad}$$

$$h = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Nach der letzten Kurve ist die Haftkraft  $F_H(t)$  des Wackelsteins bei der ersten Vorzeichenänderung von  $\dot{\gamma}(t)$  zeitweise deutlich größer als die Normalkraft  $F_N(t)$  des Bodens. Hier ist das Modell „Rollen ohne Schlupf“ nicht realistisch.

## Grafik

Zum Wackelstein ohne Schlupf gibt es 16 Zusatzfunktionen. Die drei Zusatzfunktionen

x-Stab      y-Stab      Neigungswinkel Theta

müssen jetzt noch eigens erklärt werden: Dazu denken wir uns einen dünnen, masselosen Stab der Länge  $l = 1 \text{ m}$ , der *senkrecht* auf der ebenen Deckfläche des Wackelsteines steht und daher in der Ruhelage des Wackelsteines senkrecht nach oben zeigt. Die Neigung dieses Stabes verdeutlicht die Größe der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ . Laut Definition sind x-Stab und y-Stab die inertialen x- und y-Komponenten des oberen Stabendes – bezogen auf das untere Stabende:

$$x_{\text{Stab}} = -1 \text{ m} \cdot (\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma)$$

$$y_{\text{Stab}} = -1 \text{ m} \cdot (\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

Der „Neigungswinkel Theta“

$$\vartheta = \arccos(\cos \alpha \cos \beta)$$

ist der Winkel zwischen dem genannten Stab und der Hochachse, die durch das untere Stabende läuft.

## Animation

Der Auflagepunkt (Kontaktpunkt mit dem Boden) wird bei der MatLab-Animation durch einen vertikalen **roten Pfeil**, bei der POV-Ray-Animation durch einen vertikalen **roten Stab** markiert, die beide durch den Auflagepunkt des Wackelsteins gehen.

Zur Verdeutlichung der Kippbewegungen enthält der in der Animation dargestellte Wackelstein einen (oder gar zwei) masselose dünne Stäbchen, die senkrecht auf der ebenen Deckfläche des Wackelsteines stehen. Bei der POV-Ray-Animation werden beide Stäbe von einer senkrecht über ihnen stehenden Lichtquelle beleuchtet und werfen einen Schatten.

Bei **heftigen** Bewegungen sieht die Animation oft wenig überzeugend aus. In diesen Fällen ist es sinnvoll, sich die Kurve

$$\frac{F-H(t)}{F-N(t)} = \frac{\text{Haftkraft}(t)}{\text{Normalkraft}(t)}$$

anzuschauen. Wenn dieses Kräfteverhältnis zu groß ist, also in der Nähe von Eins liegt oder gar größer als Eins ist, so ist die bei der Aufstellung der Dgln. gemachte **Annahme, dass der Wackelstein ohne Schlupf rollt (also nicht rutscht), unrealistisch**. (In diesen Fällen ist das zweite in MECHANICUS eingebettete Modell „Wackelstein *mit* Schlupf. Harter Boden“ realistischer.

Bei MatLab-Animationen können auch vertikale Ansichten auf die inertielle x,z-Ebene und auf die inertielle y,z-Ebene sinnvoll sein. Dazu muss der Anwender während der MatLab-Animation den Button „Drehen“ drücken, dann die rechte Maustaste betätigen und „Go to X-Z view“ oder „Go to Y-Z view“ wählen.

Ein Wackelstein, der sich aufgrund „untypischer“ Anfangsbedingungen überschlägt, bewegt sich laut *mathematischem Modell* wie ein *vollständiger* Ellipsoid, also nicht wie ein abgeschnittener Ellipsoid mit ebener Deckfläche. Bei solchen Überschlägen kann der Wackelstein bei der MatLab-Animation (dort wird er – wie in Abb. 2 – mit ebener Deckfläche dargestellt) zeitweise ohne Bodenkontakt in der Luft fliegen.

Bei der Wahl der Hauptträgheitsmomente  $I_1, I_2, I_3$  einerseits und der Längen  $a, b, c$  der geometrischen Halbachsen andererseits ist zu beachten, dass diese Größen ungefähr zusammenpassen. Andernfalls kann die Animation eventuell etwas befremdlich wirken.

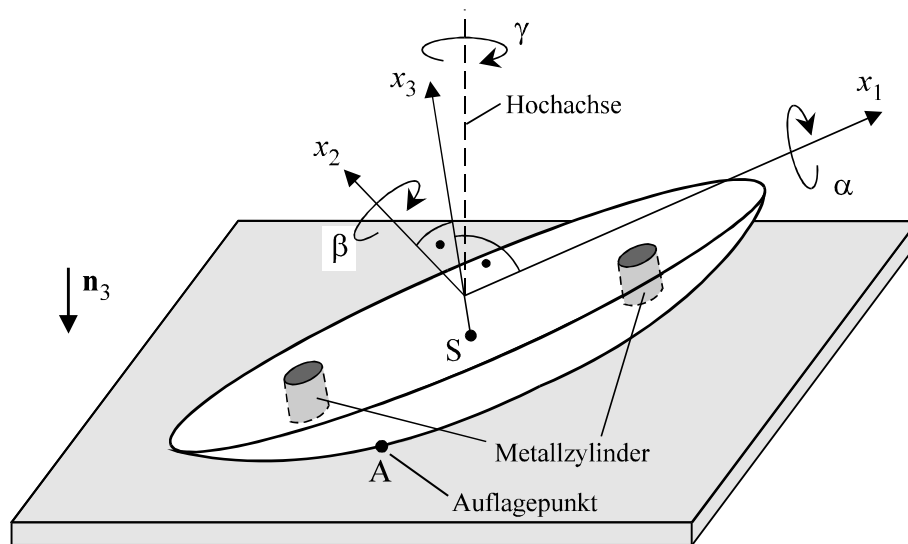
## Aufstellung der Dgln.

Bis zur 8-ten Auflage wurde der Wackelstein in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley-VCH-Verlag behandelt. Da das sehr anspruchsvoll zu berechnende System aus Platzgründen in der 9-ten Auflage des Lehrbuches nicht mehr vorkommt, werden im Folgenden Aufgabenstellung und Lösung aus den früheren Auflagen vorgestellt.

### Schwer Keltischer Wackelstein

Ein Keltischer Wackelstein oder Keltisches Wackelholz (Englisch: Celt oder Rattleback) ist ein starrer Körper aus Holz, der knapp die  *Hälfte eines länglichen Ellipsoids* bildet. Die geometrischen Halbachsen haben die Längen  $a, b, c$ , wobei  $a$  deutlich größer ist als  $b, c$ . In den Holzkörper werden neben der großen Halbachse *zwei Metallzylinder* eingesetzt (siehe die Aufsicht in Abb. 6a). Dadurch wird *die Massenverteilung unsymmetrisch*, so dass in der Ruhelage die zwei *horizontalen* Hauptträgheitsachsen *nicht* mit den *horizontalen* Halbachsen des Ellipsoids übereinstimmen, sondern mit ihnen einen Winkel  $\delta$  einspannen. Auf einer flachen Unterlage ruht der Wackelstein stabil, wobei die vertikale Hauptträgheitsachse mit der vertikalen Halbachse des Ellipsoids zusammenfällt.

Versetzt man einen Wackelstein auf einer horizontalen Unterlage in eine Drehung, so rotiert er bei *einem* Drehsinn – z. B. im Uhrzeigersinn – erwartungsgemäß stabil, wobei die Drehung wegen der Reibung immer langsamer wird und nach einigen Sekunden aufhört. Beim umgekehrten Drehsinn – in diesem Fall im Gegenuhrzeigersinn – zeigt er ein überraschendes Verhalten: Es treten seitliche Kippbewegungen auf, die immer stärker werden und der Rotation die gesamte Bewegungsenergie entziehen. Nach wenigen Sekunden kommt die Rotation völlig zum Erliegen, und die Wackelbewegung enthält die ganze, bis dahin noch vorhandene Bewegungsenergie. Anschließend wird der größte Teil der kinetischen Energie wieder in Rotationsenergie umgesetzt, wobei die Rotation nun die bevorzugte Drehrichtung im Uhrzeigersinn hat. *Der Wackelstein hat seinen Drehimpuls umgekehrt.*



**Abb. 5** Keltischer Wackelstein, dessen körperfeste Achsen  $x_1, x_2, x_3$  parallel sind zu den geometrischen Halbachsen. Die beiden in den Holzellipsoid eingelassenen Metallzylinder verursachen eine Unsymmetrie in der Massenverteilung, so dass die ersten zwei Hauptträgheitsachsen mit den körperfesten Achsen  $x_1, x_2$  einen Winkel  $\delta$  einspannen.

Nur *die* Drehrichtung ist stabil, bei der die zwei horizontalen Hauptträgheitsachsen den horizontalen Halbachsen des Ellipsoids „vorauslaufen“. Bei einigen Wackelsteinen kommen im Experiment am Ende der Bewegung drei bis höchstens vier weitere Umkehrungen der Drehrichtung vor; sie sind allerdings wegen der kleinen verbleibenden Energie nur sehr schwach.

Leider gibt es beim Wackelstein – wie beim Stehaufkreisel – keine anschauliche Erklärung für das ungewöhnliche Verhalten. Auch hier ist der Grund für die geschilderte Bewegung tief in den umfangreichen Bewegungsgln. verborgen. Nur eine wichtige Aussage folgt unmittelbar aus dem Drehimpulssatz: Auf einer glatten, reibungsfreien Unterlage erfolgt keine Umkehrung des Drehimpulses, weil hier keine horizontalen Kräfte und daher kein vertikales Drehmoment auftreten.

Wackelhölzer können in einigen Spielzeuggeschäften gekauft werden. Mit Geduld und Glück lassen sich am Strand Kieselsteine mit gewölbter Unterfläche und „schiefer“ Massenverteilung finden, die die Eigenschaften eines Wackelsteines haben. Mit solchen Kieselsteinen haben angeblich keltische Priester früher Entscheidungen getroffen.

In dieser Aufgabe werden die Bewegungsgln. eines Wackelsteins nicht mit den Lagrange-Gln., sondern vorteilhafter mit dem Drehimpulssatz aufgestellt. Der Wackelstein soll *ohne Schlupf* über den Boden rollen und als Reibung nur geschwindigkeitsproportionale, laminare Luftreibung erfahren.

Zweckmäßigerweise verwenden wir ein *körperfestes Koordinatensystem*, dessen Achsen  $x_1, x_2, x_3$  keine Hauptträgheitsachsen sind, sondern *mit den geometrischen Halbachsen des Ellipsoids zusammenfallen*. Die  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse spannen daher mit den zwei Hauptträgheitsachsen, die in der Ruhelage des Wackelsteins horizontal liegen, den Winkel  $\delta$  auf. Der Ursprung 0 des körperfesten Koordinatensystems liegt im Mittelpunkt des Ellipsoids im Abstand  $h$  oberhalb vom Schwerpunkt (siehe die Seitenansicht in Abb. 6b). In Abb. 5 sind noch der Auflagepunkt A und – links neben der Unterlage – der vertikale Einheitsvektor  $\mathbf{n}_3$  gezeichnet.

Die Orientierung und damit auch die Bewegung des Wackelsteins werden durch drei Drehungen in folgender Reihenfolge beschrieben:

- 1) Drehung  $\gamma$  um die inertielle Hochachse
- 2) Drehung  $\alpha$  um die Längsachse  $x_1$  des Ellipsoids

### 3) Drehung $\beta$ um die Querachse $x_2$ des Ellipsoids

a) Berechne die körperfesten Komponenten  $x_1, x_2, x_3$  des Auflagepunktes A als Funktionen der Winkel  $\alpha, \beta$ .

Empfehlung: Um Zeit zu sparen sollte der Leser die kurzen, aber etwas ungewohnten Rechnungen in Teil a) nicht eigenständig entwickeln, sondern nur in der Lösung nachvollziehen.

b) Berechne im körperfesten Koordinatensystem (in folgender Reihenfolge) die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_S$  und die Beschleunigung  $\mathbf{a}_S$  des Schwerpunktes, die Zwangskraft  $\mathbf{Z}_A$  auf den Wackelstein im Auflagepunkt A und das durch  $\mathbf{Z}_A$  verursachte Drehmoment  $\mathbf{N}$  bzgl. des Schwerpunktes S.

c) Da das verwendete körperfeste Koordinatensystem kein Hauptachsensystem des Trägheitstensors ist, sondern mit den geometrischen Hauptachsen des Ellipsoids zusammenfällt, können die Eulergl. nicht angewendet werden. Stattdessen müssen wir mit der allgemeinen Drehimpulsgl. arbeiten.

Berechne den nichtdiagonalen Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  als Funktion der Hauptträgheitsmomente  $I_1, I_2, I_3$  und des Winkels  $\delta$  zwischen den horizontalen Hauptachsen des Ellipsoids und den horizontalen Hauptträgheitsachsen. Stelle anschließend die Drehimpulsgl. auf.

d) Berechne die körperfesten Komponenten  $\omega_i$  der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\gamma + \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta$  als Funktionen der drei Winkel  $\gamma, \alpha, \beta$  und ihrer Zeitableitungen. Löse diese Gln. nach  $\dot{\gamma}, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$  auf.

e) Diskutiere die numerisch berechneten Kurven.

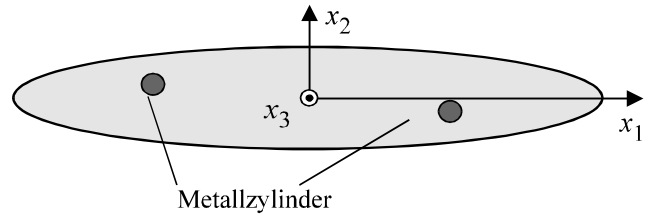


Abb. 6a Aufsicht des Wackelsteins.

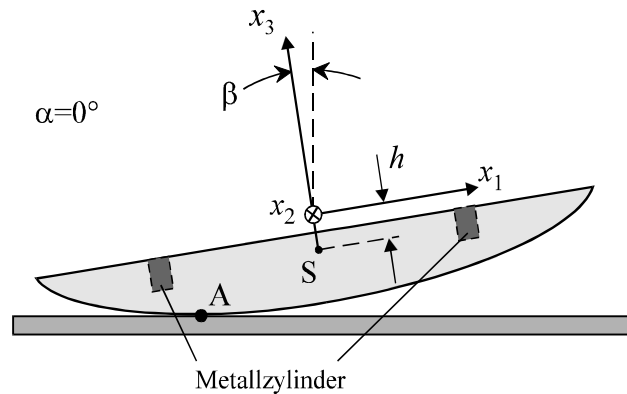


Abb. 6b Seitenansicht des Wackelsteins für  $\alpha = 0^\circ$ .

## Lösung

a) Der Auflagepunkt liegt auf dem Ellipsoid, so dass für seine körperfesten Koordinaten gilt:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0$$

Der Normalenvektor des Ellipsoids steht in A senkrecht:

$$\nabla f|_A = 2\lambda \mathbf{n}_3$$

wobei  $\lambda$  ein unbekannter Skalar ist. Im Folgenden sind  $x_i$  die körperfesten Koordinaten des Auflagepunktes A. Mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_i$  des körperfesten Koordinatensystems folgt

$$\frac{x_1}{a^2} \mathbf{e}_1 + \frac{x_2}{b^2} \mathbf{e}_2 + \frac{x_3}{c^2} \mathbf{e}_3 = \lambda \mathbf{n}_3$$

Wir multiplizieren diese Gl. nacheinander skalar mit  $\mathbf{n}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  und erhalten mit den Definitionen

$$\mu_i := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}_3 \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

die Beziehungen



$$\frac{x_1}{a^2} \mu_1 + \frac{x_2}{b^2} \mu_2 + \frac{x_3}{c^2} \mu_3 = \lambda \quad (2)$$

$$\frac{x_1}{a^2} = \lambda \mu_1 \quad \frac{x_2}{b^2} = \lambda \mu_2 \quad \frac{x_3}{c^2} = \lambda \mu_3 \quad (3a/b/c)$$

Einsetzen von  $\lambda$  aus Gl. (2) in die Gln. (3) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{a^2} (1 - \mu_1^2) - \frac{x_2}{b^2} \mu_1 \mu_2 - \frac{x_3}{c^2} \mu_1 \mu_3 &= 0 \\ -\frac{x_1}{a^2} \mu_2 \mu_1 + \frac{x_2}{b^2} (1 - \mu_2^2) - \frac{x_3}{c^2} \mu_2 \mu_3 &= 0 \\ -\frac{x_1}{a^2} \mu_3 \mu_1 - \frac{x_2}{b^2} \mu_3 \mu_2 + \frac{x_3}{c^2} (1 - \mu_3^2) &= 0 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen kann man sich leicht davon überzeugen, dass dieses Gleichungssystem folgende nichttriviale Lösungen hat:

$$x_1 = \frac{1}{p} a^2 \mu_1 \quad x_2 = \frac{1}{p} b^2 \mu_2 \quad x_3 = \frac{1}{p} c^2 \mu_3 \quad (4a/b/c)$$

mit  $p := \sqrt{(a \mu_1)^2 + (b \mu_2)^2 + (c \mu_3)^2} \quad (5)$

Der vertikale Einheitsvektor  $\mathbf{n}_3$  lautet im körperfesten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \cos \alpha \sin \beta \mathbf{e}_1 - \sin \alpha \mathbf{e}_2 - \cos \alpha \cos \beta \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Nach sukzessiver skalarer Multiplikation mit  $\mathbf{e}_i$  finden wir

$$\mu_1 = \cos \alpha \sin \beta \quad \mu_2 = -\sin \alpha \quad \mu_3 = -\cos \alpha \cos \beta \quad (7a/b/c)$$

Die Gln. (4/5/7) liefern die körperfesten Koordinaten  $x_i$  des Auflagepunktes A als Funktionen der Winkel  $\alpha, \beta$ .

**b)** Da der Wackelstein ohne Schlupf rollen soll, hat der körperfeste Punkt A, der momentan die Unterlage berührt, keine Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A = \mathbf{0} &= \mathbf{v}_S + \vec{\omega} \times \mathbf{r}_{SA} \quad \text{mit } \mathbf{r}_{SA} = \text{Vektor von S nach A} \\ \Rightarrow \mathbf{v}_S &= -\vec{\omega} \times \mathbf{r}_{SA} = -\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_3 x_2 - \omega_2 (x_3 + h) \\ \omega_1 (x_3 + h) - \omega_3 x_1 \\ \omega_2 x_1 - \omega_1 x_2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

mit  $x_3 < 0$  und  $0 < h :=$  Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des Ellipsoids (siehe Abb. 6b). Mit den Abkürzungen

$$k_1 := \omega_2 (v_3 - \dot{x}_3) - \omega_3 (v_2 - \dot{x}_2)$$

$$k_2 := \omega_3 (v_1 - \dot{x}_1) - \omega_1 (v_3 - \dot{x}_3) \quad (9)$$

$$k_3 := \omega_1 (v_2 - \dot{x}_2) - \omega_2 (v_1 - \dot{x}_1)$$

und mit

$$m \mathbf{g} = m g \mathbf{n}_3 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (6)}}}{=} m g \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (10)$$

sowie mit der körperfesten Ableitung  $d_k/dt$  finden wir die *körperfesten* Komponenten der Zwangskraft  $\mathbf{Z}_A$  auf den Wackelstein im Auflagepunkt A:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_A &= m(\mathbf{a}_S - \mathbf{g}) = m \left( \frac{d_k}{dt} \mathbf{v}_S + \vec{\omega} \times \mathbf{v}_S - \mathbf{g} \right) = \\ &= m \begin{pmatrix} \dot{\omega}_3 x_2 & -\dot{\omega}_2 (x_3 + h) + k_1 - g \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\omega}_1 (x_3 + h) - \dot{\omega}_3 x_1 & + k_2 + g \sin \alpha \\ \dot{\omega}_2 x_1 & -\dot{\omega}_1 x_2 + k_3 + g \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

$\mathbf{Z}_A$  erzeugt das Drehmoment

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_{SA} \times \mathbf{Z}_A$$

mit den körperfesten Komponenten

$$\begin{aligned} N_1 &= m \left[ -\dot{\omega}_1 \{x_2^2 + (x_3 + h)^2\} + x_1 \{ \dot{\omega}_2 x_2 + \dot{\omega}_3 (x_3 + h) \} + \right. \\ &\quad \left. + k_3 x_2 - k_2 (x_3 + h) - g \{ (x_3 + h) \sin \alpha - x_2 \cos \alpha \cos \beta \} \right] \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= m \left[ -\dot{\omega}_2 \{x_1^2 + (x_3 + h)^2\} + x_2 \{ \dot{\omega}_1 x_1 + \dot{\omega}_3 (x_3 + h) \} \right. \\ &\quad \left. + k_1 (x_3 + h) - k_3 x_1 - g \cos \alpha \{ x_1 \cos \beta + (x_3 + h) \sin \beta \} \right] \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= m \left[ -\dot{\omega}_3 (x_1^2 + x_2^2) + (x_3 + h) \{ \dot{\omega}_1 x_1 + \dot{\omega}_2 x_2 \} + \right. \\ &\quad \left. + k_2 x_1 - k_1 x_2 + g (x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \sin \beta) \right] \end{aligned} \quad (12c)$$

Die Koordinaten  $x_i$  sind mit den Gln. (4), (5) und (7) als Funktionen der Winkel  $\alpha, \beta$  darzustellen.

Für die *laminare Luftreibung* wird folgendes Reibungsmoment angesetzt:

$$\mathbf{N}_R = \begin{pmatrix} N_{R1} \\ N_{R2} \\ N_{R3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \omega_1 \\ -c_2 \omega_2 \\ -c_3 \omega_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit drei Reibungszahlen } c_i \quad (13)$$

c) Im Hauptachsensystem des Ellipsoids hat der Trägheitstensor  $\mathbf{I}$  die Form

$$\begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} = \mathbf{I} \quad (14)$$

$$\text{mit} \quad A := \frac{1}{2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\delta) \quad (15a)$$

$$B := \frac{1}{2}(I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\delta) \quad (15b)$$

$$F := -\frac{1}{2}(I_1 - I_2) \sin(2\delta) \quad (15c)$$

$$C := I_3 \quad (15d)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \vec{\omega} \times \mathbf{L} &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Gl. (12.3-4)}}}{=} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A\omega_1 - F\omega_2 \\ -F\omega_1 + B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (C-B)\omega_2\omega_3 \\ (A-C)\omega_1\omega_3 \\ (B-A)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} \omega_1\omega_3 \\ -\omega_2\omega_3 \\ \omega_2^2 - \omega_1^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Die Drehimpulsgl.

$$\frac{d_k}{dt} \mathbf{L}_S + \vec{\omega}^{\text{KS}} \times \mathbf{L}_S = \mathbf{N}_S$$

lautet dann

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 - F\dot{\omega}_2 - (B-C)\omega_2\omega_3 + F\omega_1\omega_3 &= N_1 + N_{R1} \\ B\dot{\omega}_2 - F\dot{\omega}_1 - (C-A)\omega_1\omega_3 - F\omega_2\omega_3 &= N_2 + N_{R2} \\ C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 + F(\omega_2^2 - \omega_1^2) &= N_3 + N_{R3} \end{aligned} \quad (17)$$

**d)** Die Berechnung der körperfesten Komponenten von  $\vec{\omega}$  entspricht der Berechnung in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, Unterkapitel „12.5 Die Eulerschen Winkel“. Auch hier setzt sich  $\vec{\omega}$  aus drei Anteilen zusammen:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\gamma + \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta$$

$$\text{mit} \quad \vec{\omega}_\gamma = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich lauten die *körperfesten* Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta \\ \dot{\beta} + \dot{\gamma} \sin \alpha \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \quad (18)$$

Diese drei Gln. lassen sich nach den Zeitableitungen der Winkel auflösen:

$$\dot{\gamma} = (-\omega_1 \sin \beta + \omega_3 \cos \beta) \frac{1}{\cos \alpha} \quad (19a)$$

$$\dot{\alpha} = \omega_1 \cos \beta + \omega_3 \sin \beta \quad (19b)$$

$$\dot{\beta} = (\omega_1 \sin \beta - \omega_3 \cos \beta) \tan \alpha + \omega_2 \quad (19c)$$

Bei gegebenen  $\omega_i(t)$  sind dies drei Dgln. für  $\gamma(t)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ . Sie haben *Singularitäten* bei  $\alpha = (2n+1)\pi/2$  mit  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Bei „üblichen“ Anfangsbedingungen und Parametern werden diese Singularitäten bei der Berechnung nicht erreicht, weil sich der Wackelstein normalerweise nicht auf die Seite legt oder gar überschlägt.

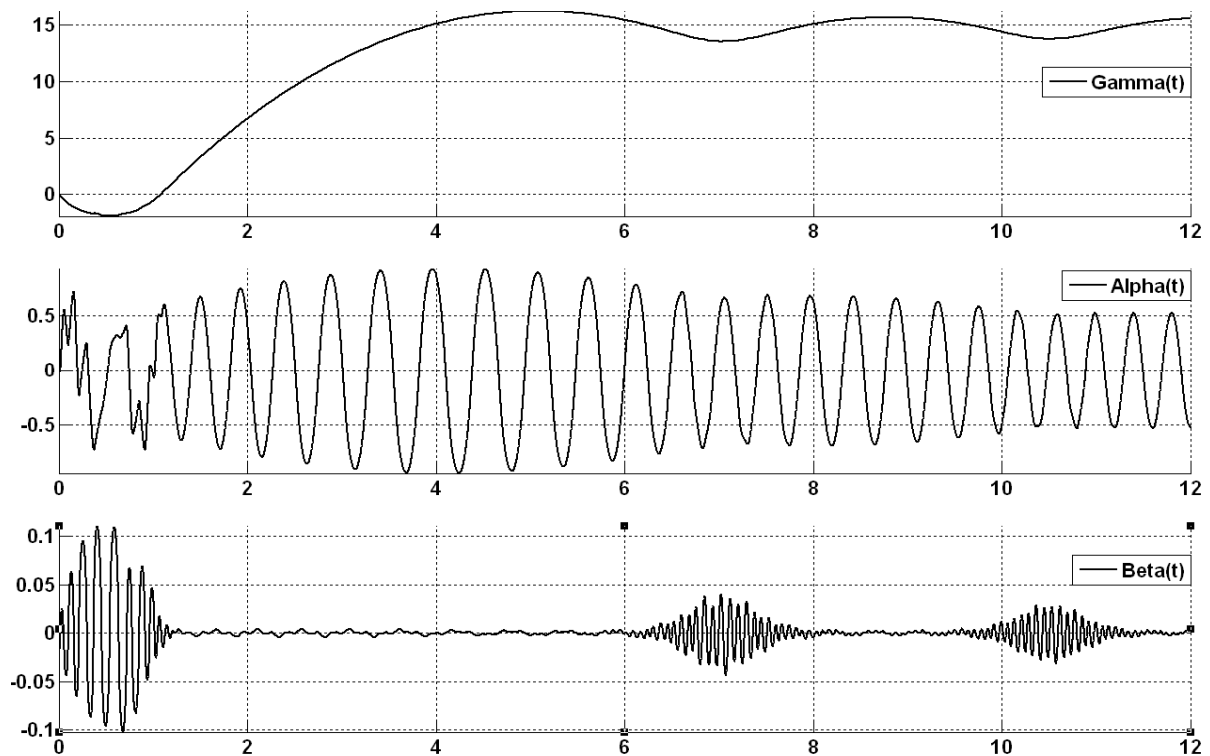
Insgesamt stehen uns jetzt *sechs Dgln. erster Ordnung* für die Bestimmung

- der körperfesten Komponenten  $\omega_i$  der Winkelgeschwindigkeit und
- der Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$

zur Verfügung. Die ersten drei Dgln. sind die Gln. (17), wobei die Drehmomente  $N_i + N_{Ri}$  durch die Gln. (12) und (13) bestimmt sind und die in den Abkürzungen  $k_i$  auftretenden Ableitungen  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  mit den Gln. (19b/c) als Funktionen der  $\omega_i, \alpha, \beta$  geschrieben werden können. Die Dgln. (19) bilden den zweiten Satz der sechs Dgln. erster Ordnung.

e) Die aufgestellten Dgln. und die Ergebnisse der numerischen Berechnung sollten mehrfach überprüft werden. Dafür gibt es im Allg. und speziell beim Wackelstein folgende Möglichkeiten:

- Eventuell vorhandene *Erhaltungsgrößen* müssen bei der numerischen Berechnung auf möglichst vielen Stellen nach dem Komma *konstant* bleiben. Beim Wackelstein ist nur die Energie bei verschwindender Luftreibung konstant.
- Die numerisch berechneten Kurven sollen *physikalisch interpretiert* werden können und müssen *mit Experimenten übereinstimmen*. Abb. 7 zeigt den numerisch berechneten Verlauf der drei Winkel für eine Bewegung mit laminarer Luftreibung und ohne Schlupf. Die Kurven sind offensichtlich vernünftig und decken sich mit Beobachtungen am Wackelstein.
- *Einfache, anschauliche Lösungen* – wie z. B. Drehungen um die vertikal stehende  $x_3$ -Achse mit  $\alpha = \beta = 0$ ,  $\dot{\gamma} \neq 0$  – müssen numerisch und eventuell sogar analytisch bestätigt werden.
- *Spezialfälle*, deren Ergebnisse anderweitig gewonnen wurden, müssen richtig wiedergegeben werden. Beim Wackelstein beschreiben die Berechnungen folgende Spezialfälle richtig:



**Abb. 7 Ein Wackelstein schlingert ohne Schlupf und mit laminarer Luftreibung über einen harten Boden.** Die numerisch berechneten Kurven zeigen die Winkel  $\gamma(t)$ ,  $\alpha(t)$  und  $\beta(t)$ . Die Drehrichtung – beschrieben durch  $\gamma(t)$  – dreht sich fünfmal um.

Die Anfangsbedingungen und Parameter des Wackelsteins lauten:

$$\alpha = \beta = -0,02 \text{ Rad} \quad \omega_3 = -8 \text{ Rad/s} \quad \text{Die restlichen fünf Anfangsbedingungen sind null.}$$

$$m = 1 \text{ kg} \quad I_1 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \quad I_2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad I_3 = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

$$a = 0,2 \text{ m} \quad b = 0,03 \text{ m} \quad c = 0,02 \text{ m} \quad \delta = -0,1 \text{ Rad}$$

$$h = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2/\text{s}$$

- 1) Für  $a = b \gg c$ ,  $h = 0$  und für entsprechende Wahl von  $I_1 = I_2$ ,  $I_3$  erhalten wir eine rollende Münze als Spezialfall (siehe Aufgabe 12–18 in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage).
- 2) Berechnet man mit dem Reibungsansatz (12.9–1) (siehe Aufgabe 12–19 in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage) den Wackelstein in einem erweiterten Modell *mit Schlupf*, so ergibt sich für  $a = b = c$ ,  $I_1 = I_2$  und für  $h \neq 0$  die inhomogene Kugel (Stehaufkreisel ohne Stift) als Spezialfall (siehe Aufgabe 12–19 in Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik*, 9-te Auflage).