D Mathematische Formeln

Geometrie

Kreis mit dem Radius r:

$$\text{Umfang} = 2\pi r$$
$$\text{Fläche} = \pi r^2$$

Kugel mit dem Radius r:

$$\text{Oberfläche} = 4\pi r^2$$
$$\text{Volumen} = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Gerader Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe h:

$$\text{Oberfläche} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

Dreieck mit der Basis a und der Höhe h:

$$\text{Fläche} = \tfrac{1}{2} a h$$

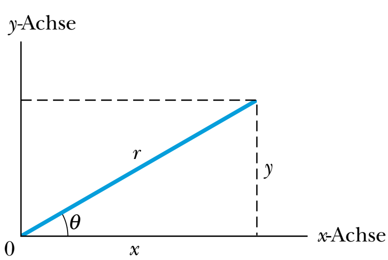
Quadratische Gleichung

Für $ax^2 + bx + c = 0$ gilt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Trigonometrische Funktionen des Winkels θ

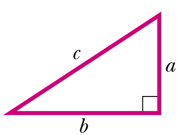
$$\sin\theta = \tfrac{y}{r}$$
$$\cos\theta = \tfrac{x}{r}$$
$$\tan\theta = \tfrac{y}{x}$$
$$\cot\theta = \tfrac{x}{y}$$
$$\sec\theta = \tfrac{r}{x}$$
$$\csc\theta = \tfrac{r}{y}$$



Satz des Pythagoras

Für das abgebildete rechtwinklige Dreieck gilt:

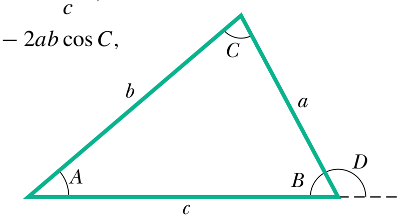
$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Dreiecke

Den Winkeln A, B, C liegen die Seiten a, b, c gegenüber. D ist ein Außenwinkel (Ergänzungswinkel von B zu 180°). Dann gilt:

$$A + B + C = 180°,$$
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$
$$D = A + C.$$



Mathematische Zeichen und Symbole

$=$	ist gleich
$\approx$	ungefähr gleich, rund
$\sim$	in der Größenordnung von
$\neq$	ungleich
$\equiv$	identisch, definiert als
$>$	größer als ($\gg$ viel größer als, groß gegen)
$<$	kleiner als ($\ll$ viel kleiner als, klein gegen)
$\geq$	größer als oder gleich (nicht kleiner als)
$\leq$	kleiner als oder gleich (nicht größer als)
$\pm$	plus oder minus
$\propto$	proportional zu
$\sum$	Summenzeichen
x_{gem}	mittlerer (gemittelter) Wert von x

Trigonometrische Gleichungen

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Binomische Reihe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots \qquad (x^2 < 1)$$

Potenzreihenentwicklung von e^x

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Potenzreihenentwicklung von ln(1+x)

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots \qquad (|x| < 1)$$

Potenzreihenentwicklung trigonometrischer Funktionen (θ in rad)

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots \\
\cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots \\
\tan\theta &= \theta + \frac{\theta^3}{3} + 2\frac{\theta^5}{15} + \cdots
\end{aligned}$$

Cramersche Regel

Das lineare Gleichungssystem

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \text{und} \quad a_2 x + b_2 y = c_2$$

mit den beiden Unbekannten x und y hat folgende Lösungen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

und

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Produkte von Vektoren

Es seien $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ Einheitsvektoren in x-, y- bzw. z-Richtung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1, \\
&\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0, \\
&\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0, \\
&\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y.
\end{aligned}$$

Jeder Vektor $\vec{a}$ mit den Komponenten a_x, a_y und a_z entlang der x-, y- bzw. z-Achse kann in der Form

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

geschrieben werden.

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien beliebige Vektoren mit den Beträgen a, b bzw. c. Dann gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

und

$$(s\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b})$$

(s ist ein Skalar).

Es sei θ der kleinere der beiden Winkel, den die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander einschließen. Dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

sowie

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\
&= (a_y b_z - b_y a_z)\vec{e}_x + (a_z b_x - b_z a_x)\vec{e}_y + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{e}_z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}| &= ab\sin\theta, \\
\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \\
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.
\end{aligned}$$

Ableitungen und Integrale

Im Folgenden stehen u und v für beliebige Funktionen von x, und a und m sind Konstanten. Zu jedem unbestimmten Integral ist eine beliebige Integrationskonstante zu addieren. Eine ausführlichere Übersicht finden Sie im *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press).

1. $\dfrac{dx}{dx} = 1$

2. $\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$

3. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

4. $\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

5. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$

6. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

7. $\dfrac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$

8. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

9. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

10. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

11. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

12. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

13. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

14. $\dfrac{d}{dx}\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}\sin u = \cos u\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\sin u\dfrac{du}{dx}$

1. $\displaystyle\int dx = x$

2. $\displaystyle\int au\,dx = a\int u\,dx$

3. $\displaystyle\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

4. $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ $\qquad (m \neq -1)$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

6. $\displaystyle\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

7. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x$

8. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$

10. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$

11. $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x$

12. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$

13. $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)\mathrm{e}^{-ax}$

14. $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)\mathrm{e}^{-ax}$

15. $\displaystyle\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

16. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

18. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

20. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$ $\qquad (a > 0)$

21. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x+a} = x - a\ln(x+a)$

Gradient, Divergenz und Rotation

Im Folgenden stehen $f(\vec{r})$, $g(\vec{r})$ für stetige skalare Funktionen und $\vec{F}(\vec{r})$, $\vec{G}(\vec{r})$ sind stetige Vektorfunktionen. a ist eine beliebige skalare Konstante und $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Es gilt:

1. $\vec{\nabla} a f(\vec{r}) = a \vec{\nabla} f(\vec{r})$
2. $\vec{\nabla}(f(\vec{r}) + g(\vec{r})) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) + \vec{\nabla} g(\vec{r})$
3. $\vec{\nabla} \cdot (a\vec{F}(\vec{r})) = a(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}))$
4. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(\vec{r}) + \vec{G}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{r})$
5. $\vec{\nabla} \times (a\vec{F}(\vec{r})) = a(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}))$
6. $\vec{\nabla} \times (\vec{F}(\vec{r}) + \vec{G}(\vec{r})) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{G}(\vec{r})$
7. $\vec{\nabla} \times (f(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})) = f(\vec{r})(\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) + (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \times \vec{F}(\vec{r})$
8. $\vec{\nabla} \cdot (f(\vec{r})\vec{F}(\vec{r})) = f(\vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{r}))$
9. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F}(\vec{r}) \times \vec{G}(\vec{r})) = \vec{G}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) - \vec{F}(\vec{r}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}(\vec{r}))$
10. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f(\vec{r})) = \text{rot grad } f(\vec{r}) = 0$
11. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(r)) = \text{div rot } \vec{F}(\vec{r}) = 0$
12. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r})) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}(\vec{r}) = \text{grad div } \vec{F}(\vec{r}) - \Delta \vec{F}(\vec{r})$

wobei $\Delta = \vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ der (skalare) Laplace-Operator ist.